四 川 大 学

博 士 学 位 论 文

题 目 Pytkeev 网络及相关问题的研究

作 者 刘 鑫 完成日期 2018 年 3 月 25 日

培 养 单 位 四川大学

指 导 教 师 林 寿 教授

专 业 基 础 数 学

研 究 方 向 拓 扑 学

授予学位日期 年 月 日

摘　要

Pytkeev 网络及相关问题的研究

基础数学专业

研究生　刘鑫　　**指导教师**　林寿

本文主要致力于广义度量空间理论中与 Pytkeev 网络及 k 网络相关的下列问题的研究:

问题 1: [43] 一些不同类型的网络在哪些拓扑空间中是一致的?

问题 2: [68] 设拓扑空间 X 是 Fréchet-Urysohn 空间. 如果 X 具有点可数 cs' 网络, 那么 X 是亚 Lindelöf 空间吗?

问题 3: [91] 设拓扑空间 X 是序列空间. 如果 X 具有点可数 wcs^* 网络, 那么 X 是 D 空间吗?

问题 4: [43] 怎么把 $\mathfrak{P}_0$ 空间或者 $\mathfrak{P}$ 空间刻画为可分度量空间或者度量空间的某种映像?

问题 5: [18] 在 ZFC 下, 是否存在序列空间 X 满足: $sb_\chi(X) < \psi(X)$ 或者 $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$?

问题 6: [68] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是具有紧可数 k 网络的 k 空间. 如果 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 f 是边缘 s 映射吗?

问题 7: [68] 设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖边缘紧映射. 如果空间 X 满足下列任一条件, f 是 1 序列覆盖映射吗?

(1) X 的任意紧子集在 X 中具有可数 sn 网络.

(2) X 的任意紧子集在 X 中具有可数外 sn 网络.

(3) X 有紧可数 sn 网络.

问题 8: [4] 具有可数 sensitive 的拓扑群是否可度量化?

问题 9: [27] 设 X 是具有点可数 k 网络的可数紧空间. 如果 X 具有可数 tightness, 那么 X 是否是可度量化的?

全文的主要内容是第二、三、四章.

第二章系统讨论了具有特定 (strict) Pytkeev 网络空间的基本性质, 包含它与各类网络之间的关系、覆盖性质、映射性质等.

第 1 节主要是围绕问题 1 展开研究, 讨论了 (strict) Pytkeev 网络和 cn 网络、k 网络、wcs^* 网络、cs' 网络等之间的关系, 证明了点可数 Pytkeev 网络是拟 k 网络, cn 网络是 cs' 网络, 并说明了序列空间中的 wcs^* 网络是 Pytkeev 网络以及 Fréchet-Urysohn 空间中的 cs' 网络是 cn 网络, 同时举例说明了一些网络在某些空间中不能相互转化. 最后, 证明了具有点可数 Pytkeev 网络的空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是 M 空间, 以及正则的 q 空间 X 是第一可数空间当且仅当 X 具有强 Pytkeev 性质.

第 2 节主要讨论了具有点可数 cn 网络的空间所具有的覆盖性质, 证明了具有点可数 cn 网络的拓扑空间是亚 Lindelöf 的 D 空间, 此结果肯定地回答了问题 2 以及部分回答了问题 3. 本节还得到了一些关于具有局部可数 (strict) Pytkeev 网络 (或 cn 网络) 空间的结果.

第 3 节围绕问题 4 展开研究, 讨论了具有特定 Pytkeev 网络 (或 cn 网络) 空间的映射性质, 证明了闭映射和有限到一伪开映射保持 Pytkeev 网络, 以及伪开映射保持 cn 网络, 并更进一步地说明了闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间. 同时, 给出几个例子说明某些具有特定 Pytkeev 网络空间不能被一些映射保持.

第三章结合 sensor 族和 Pytkeev 网络的概念, 引入了具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络 (简称: sp 网络), 围绕问题 1 和问题 4, 系统讨论具有特定 sp 网络的空间的性质以及它们与各种广义度量空间类之间的联系.

第 1 节基于 T. Banakh 的 strict Pytkeev 网络和 A.V. Arhangel’skiĭ 的 sensor 族的概念, 引入了具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络 (简称: sp 网络) 这一复合概念, 讨论了 sp 网络、(strict) Pytkeev 网络和 cn 网络、k 网络、wcs^* 网络、cs' 网络之间的关系, 并举例说明在一些特定的空间中, 某些网络不能相互转化.

第 2 节讨论了具有点可数 sp 网络空间的一些特性, 证明了拓扑空间 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像, 同时说明了具有点可数 sp 网络的正则 feebly 紧空间有点可数基.

第 3 节讨论具有 σ 闭包保持 sp 网络空间的性质, 利用 sp 网络刻画了层空间, 即拓扑空间 X 是层空间当且仅当 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间, 并证明了具有 σ 局部有限 sp 网络的正则空间具有 σ 离散 sp 网络.

第四章构造了几个例子, 简化了一些证明, 讨论了 sp 网络在拓扑代数中的应用, 回答或部分回答了问题 5-9.

第 1 节构造了几个具有下述性质的例子: 存在度量空间的商 s 映像 X, 使 X 不具有可数伪特征; 存在闭映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是具有紧可数基的空间, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 但 f 不是边缘 s 映射; 存在从具有可数 sn 网络空间 X 到拓扑空间 Y 的序列覆盖映射 f, 但 f 不是 1 序列覆盖映射. 这些例子分别回答或部分回答了问题 5、问题 6 和问题 7.

第 2 节证明了对于可数个具有点可数 k 网络的正则 k 空间的乘积空间 X, 其子空间 Y 具有点可数基当且仅当 Y 具有可数 fan-tightness, 此结果推广了冯秀峰和 K. Tamano [33] 的结果. 引入 p-Pytkeev 网络的概念, 简化了蔡长勇和林寿 [27] 的定理: "具有点可数 p-k 网络的 totally 可数紧空间是可度量化的" 的证明过程.

第 3 节讨论 sp 特征在拓扑代数中的一些应用, 证明了每一拓扑群 X 有 $spnw(X) = d(X)sp_\chi(X)$, 并说明拓扑群 X 可度量化当且仅当 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间. 通过构造例子, 证明了存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间, 此结果否定回答了问题 8. 最后, 证明了在 **CH** 下存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 X, 使其具有可数 tightness, 但不可度量化, 此结果否定回答了问题 9.

同时, 本文也提出了一些问题供进一步研究.

关键词: Pytkeev 网络; strict Pytkeev 网络; 层空间; k 网络; 亚 Lindelöf 空间; D 空间; sensor; 伪开映射; 拓扑群.

Abstract

Researches on Pytkeev networks and related matters

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: Liu Xin **Supervisor:** Lin Shou

This thesis is devoted to studying (strict) Pytkeev networks, k-networks and related questions in the theory of generalized metrizable spaces as follows:

Question 1: [43] Does which topological spaces some of the types of networks coincide?

Question 2: [68] Is every Fréchet-Urysohn space with a point-countable cs'-network a meta-Lindelöf space?

Question 3: [91] Is every sequential space with a point-countable wcs^*-network a D-space?

Question 4: [43] Find a characterization of $\mathfrak{P}_0$-spaces or $\mathfrak{P}$-spaces analogous to the spaces which are some images of separable metrizable spaces or metrizable spaces?

Question 5: [18] Is there a ZFC-example of a sequential space X with $sb_\chi(X) < \psi(X)$ or at least $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$?

Question 6: [68] Let $f : X \to Y$ be a closed mapping, where X is a k-space with a compact-countable k-network. Is f a boundary-s-mapping if Y contains no closed copy of S_{ω_1}?

Question 7: [68] Suppose that $f : X \to Y$ is a sequence-covering boundary-compact mapping. Is f a 1-sequence-covering mapping if X satisfies one of the following conditions?

(1) Every compact subset of X has a countable sn-network in X.

(2) Every compact subset of X has a countable outer sn-network in X.

(3) X has a compact-countable sn-network.

Question 8: [4] Is every countably-sensitive topological group metrizable?

Question 9: [27] Is a countably compact space X with a point-countable k-network metrizable if X has countable tightness?

The main contents of this paper are chapter two, three and four.

In Chapter 2, we systemically investigate the properties of the spaces with certain Pytkeev networks, including its relationship with various networks, covering properties, mapping properties, and so on.

In Section 2.1, we start the research around Question 1, discuss the relationship with certain networks, which involve Pytkeev networks, strict Pytkeev networks, cn-networks, k-networks, wcs^*-networks and cs'-networks, and prove that each point-countable Pytkeev network for a space is a quasi-k-network, each cn-network for a space is a cs'-network, each wcs^*-network in a sequential space is a Pytkeev network, and each cs'-network in a Fréchet-Urysohn space is a cn-network. Secondly, some examples are given to illustrate that some networks can not be transformed each other in some specific spaces. Finally, we prove that each space with a point-countable Pytkeev network is metrizable if and only if it is an M-space, and every regular q-space with the strong Pytkeev property is a first-countable space.

In Section 2.2, we detect the covering properties on spaces with certain cn-networks, and prove that every space with a point-countable cn-network is a meta-Lindelöf D-space, which gives an affirmative answer to Question 2 and a partial answer to Question 3, and obtain some characterizations of spaces with a locally countable strict Pytkeev network (cn-network).

In Section 2.3, we start the research around Question 4, establish some mapping theorems on spaces with certain Pytkeev networks (cn-networks), and prove that Pytkeev networks are preserved by closed mappings and finite-to-one pseudo-open mappings, and cn-networks are preserved by pseudo-open mappings, in particular, spaces with a point-countable Pytkeev network are preserved by closed mappings. Some examples which show spaces with certain Pytkeev networks are not be preserved by some mappings are constructed.

In Chapter 3, based on the notions of strict Pytkeev networks and sensor families, strict Pytkeev networks with sensors (abbr. sp-network) are introduced in this part. We start the research around Questions 1 and 4, systemically investigate the properties of the spaces with sp-networks and their communications with some classic generalized metrizable spaces.

In Section 3.1, we introduce and study a complex notion which is called a strict Pytkeev network with sensors (abbr. sp-network), based on the notions of T. Banakh's strict Pytkeev networks and A.V. Arhangel' skiĭ's sensor families, we obtain certain relationship among the notions of sp-networks, (strict) Pytkeev networks, cn-networks,

k-networks, wcs^*-networks and cs'-networks, and some examples are given to illustrate that some networks can not be transformed each other in some specific spaces.

In Section 3.2, we study some topological properties of spaces with a point-countable sp-network, and prove that X is a k-space with a point-countable sp-network if and only if it is a pseudo-open s-image of a metrizable space, and each regular feebly compact space with a point-countable sp-network has a point-countable base.

In Section 3.3, we discuss spaces with a σ-closure-preserving sp-network, obtain a new characterization of stratifiable spaces, that is, a topological space is a stratifiable space if and only if it is a regular space with a σ-closure-preserving sp-network; and prove that every regular space with a σ-locally finite sp-network has a σ-discrete sp-network.

In Chapter 4, several examples are constructed and some proofs are simplified. We also discuss the applications of sp-networks in topological algebra, and give some answers or partial answers to Questions 5-9.

In Section 4.1, we give a couple of examples as follows: there exists a quotient s-image of a metric space which does not have countable pseudocharacter; there exists a closed and non-boundary-s-mapping $f : X \to Y$ such that X has a compact-countable base and Y contains no closed copy of S_{ω_1}; there exists a sequence-covering mapping f from a space X with a countable sn-network onto a space Y such that f is not a 1-sequence-covering mapping. These examples give some answers or partial answers to Questions 5, 6 and 7.

In Section 4.2, we prove that let X be the countable Tychonoff product space of regular k-spaces with a point countable k-network, then every subspace Y of X has a point-countable base if and only if it has countable fan-tightness, which generalized X.F. Feng and K. Tamano's result [33]. We introduce p-Pytkeev networks in this part, and the process of proof of the theorem "a totally countably compact space with a point-countable p-k-network is metrizable"of Cai and Lin [27] is simplified.

In Section 4.3, we discuss some applications of sp-character in topological spaces with algebra structures, prove that every topological group X satisfies that $spnw(X) = d(X)sp_\chi(X)$, and a topological group X is metrizable if and only if it is a k-space with countable sp-character. There is a non-Fréchet-Urysohn, sequential topological group with a countable strict Pytkeev network, which gives a negative answer to Question 8. We also prove that under **CH** there is a non-metrizable, countably compact topological group X with a point-countable k-network, and countable tightness, which gives a negative answer to Question 9.

At the same time, some interesting questions are posed.

Key Words: Pytkeev-networks; strict Pytkeev-networks; stratifiable spaces; k-networks; meta-Lindelöf spaces; D-spaces; sensor; pseudo-open mappings; topological groups.

引　言

度量空间理论一直都是一般拓扑学研究的中心课题. 对度量化问题的研究使得诞生了这样的一些空间类, 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类. 这类空间统称为广义度量空间. 1950-1951 年, R.H. Bing [19], J. Nagata [84] 和 Yu. Smirnov[100] 建立了度量空间的内在刻画. 随后, 拓扑学家们对 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理进行了各种推广, 形成了很多极具特色的广义度量空间. 这些空间不但极大的丰富了一般拓扑学的构成, 同时也增加了人们对度量空间更加深入的了解, 使其能把度量空间或者紧空间的一些经典结果推广到更一般的空间类上 [55]. 1959 年, A.V. Arhangel'skiĭ 提出了网络的概念 [1], 并证明了具有可数网络的紧的 Hausdorff 空间有可数基, 从而是可度量化的. 更进一步, A.V. Arhangel'skiĭ [3]、O'Meara [76]、J.A. Guthrie [52]、高智民 [47] 分别引入了弱基、k 网络、cs 网络、cs^* 网络, 发展了广义度量空间理论. 这说明自 20 世纪 60 年代以来, 广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 而且 "*Open Problems in Topology*" [81], "*Open Problems in Topology II*" [89] 和 "*Problems from Topology Proceedings*" [88] 中记载了大量有关广义度量空间与泛函分析、公理集论、组合数学、计算机科学、数理逻辑、动力系统、拓扑代数等其他学科相互交融所形成的问题, 这无疑说明了广义度量理论的重要性以及巨大的发展前景.

1983 年, E.G. Pytkeev 证明了序列空间具有如下性质 [94], 并说明此种性质蕴含可数 tightness：对拓扑空间 X 的任意子集 A 及任意的 $x \in \overline{A} \setminus A$, 在 A 上存在一个由无限子集所构成的集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 满足对 x 的任意邻域 U, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $A_n \subset U$. 此种性质被 V.I. Malykhin 和 G. Tironi 称为 Pytkeev 性质 [74, 定义 0.2]. 2009 年, B. Tsaban 和 L. Zdomskyĭ 对此做了进一步的推广, 引入了强 Pytkeev 性质 [106, 定义 5]：对拓扑空间 X 中的任意一点 x, 都存在 X 的可数子集族 $\mathscr{P}$, 满足对 x 的任意邻域 U 及 X 中满足 $x \in \overline{A} \setminus A$ 的子集 A, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset U$ 且 $P \cap A$ 是无限集. 显然, 若拓扑空间 X 具有强 Pytkeev 性质, 则 X 具有可数 cs^* 特征 [106, p. 8]. 随后, T. Banakh 在 2015 年引入了 (strict) Pytkeev 网络的概念 [11, 定义 1.1]. 与此同时, S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol [43] 提出了 cp 网络、ck 网络和 cn 网络等概念. 随后, 由各种特定的 Pytkeev 网络、cp 网络、ck 网络及 cn 网络所定义的新的空间相继被提出, 例如 $\mathfrak{P}_0$ 空间 [11]、$\mathfrak{P}$ 空间 [43]、strict σ 空间 [43]、strict $\aleph$ 空间 [43] 等. 这些空

间在广义度量空间, 基数函数, 函数空间, 拓扑群及拓扑向量空间中都扮演着极其重要的角色 [15, 12, 41, 44, 42, 63]. 特别地, T. Banakh 证明了可数的 (strict) Pytkeev 网络是 k 网络 (cs^* 网络), 并说明其逆在 k 空间 (Fréchet-Urysohn 空间) 中同样成立 [11]. S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol 证明了若拓扑空间 X 在点 x 处具有可数 cn 网络, 则 X 在点 x 处具有可数 tightness [43, 命题 2.3], 并提出了下述问题.

问题 0.0.1 *一些不同类型的网络在哪些拓扑空间中是一致的?*

T. Banakh、A. Leiderman、S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol 等人研究了具有可数或者 σ 局部有限 Pytkeev 网络、k 网络或者 cs^* 网络的空间, 部分回答了问题 0.0.1 [11, 15, 43].

问题 0.0.1 是一类较广泛的问题. 按广义度量空间的研究方式, 我们尤其感兴趣于由 σ 局部有限网络、σ 闭包保持网络或点可数网络确定的空间类之间的一致性. 如, 正则空间 X 有 σ 局部有限基 (网络, k 网络) 当且仅当 X 有 σ 离散基 [32, p. 282] (网络 [49, 定理 4.11], k 网络 [36, 定理 4]). 所以很自然地有下述问题.

问题 0.0.2 *设 X 是具有 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络的正则空间, 则 X 是否有 σ 离散 (strict) Pytkeev 网络?*

具有 σ 闭包保持 k 网络的 Fréchet-Urysohn 正则空间是层空间 [71, 定理 3.4.3], 而具有 σ 闭包保持 k 网络的正规的 k 空间是仿紧空间 [71, 定理 3.4.11]. 于是有下述问题.

问题 0.0.3 *具有 σ 闭包保持 strict Pytkeev 网络的正规空间是仿紧空间吗?*

点可数集族是可数集族和 σ 局部有限集族的共同推广. 1960 年, V.I. Ponomarev 用度量空间的开 s 映像刻画了具有点可数基的空间 [92]. 事实上, 具有点可数基的空间具有很多有趣的性质. 例如, 具有点可数基的空间是亚 Lindelöf 的 D 空间 [7, 定理 2], 完备映射保持具有点可数基的空间 [34]. 类似地, 具有某一特定点可数网络的空间也具有相似的性质. G. Gruenhage, E.A. Michael 和 Y. Tanaka [51, 命题 8.6] 证明了具有点可数 k 网络的正则 Fréchet-Urysohn 空间是亚 Lindelöf 空间. 彭良雪 [90, 推论 22] 证明了具有点可数 k 网络的 k 空间

是 D 空间. D.K. Burke [25, 推论 4.5] 证明了具有点可数弱基的空间是 D 空间. 林寿和蔡长勇 [68, 引理 2.7] 证明了具有点可数 cs' 网络的序列空间是 D 空间. 林寿, 彭良雪等提出了如下问题.

问题 0.0.4 *[68] 设空间 X 是 Fréchet-Urysohn 空间. 如果 X 具有点可数 cs' 网络, 那么 X 是亚 Lindelöf 空间吗?*

问题 0.0.5 *[91, p. 1050] 设空间 X 是序列空间. 如果 X 具有点可数 wcs^* 网络, 那么 X 是 D 空间吗?*

E.A. Michael [79] 证明了空间 X 是具有可数 k 网络的正则空间当且仅当 X 是可分度量空间的紧覆盖映像; 李招文证明了 [61, 定理 4] 空间 X 是具有 σ 局部有限 k 网络的正则空间当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖 $mssc$ 映像. 在文献 [15, 43] 中, 已讨论了有关具有某种特定 Pytkeev 网络空间的运算性质, 如遗传性、拓扑和性质、Tychonoff 乘积性质以及箱积性质, 但映射性质却少有涉及. 于是, S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol 提出了下述问题.

问题 0.0.6 *[43, 问题 6.8] 怎么把 $\mathfrak{P}_0$ 空间或者 $\mathfrak{P}$ 空间刻画为可分度量空间或者度量空间的某种映像?*

因为 k 网络和 cs^* 网络都是 wcs^* 网络 [69], cs^* 网络是 cs' 网络 [68]. 这便使得我们去寻求 Pytkeev 网络与 wcs^* 网络及 cs' 网络之间的内在联系. **本文第二章**, 我们首先围绕问题 0.0.1, 讨论了具有特定 (strict) Pytkeev 网络、k 网络、cn 网络、wcs^* 网络、cs' 网络的空间之间的关系, 证明了具有点可数 Pytkeev 网络的拓扑空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是 M 空间. 然后, 我们继续讨论了具有点可数 cn 网络的空间的覆盖性质, 证明了具有点可数 cn 网络的空间是亚 Lindelöf 的 D 空间, 此结果肯定回答了问题 0.0.4 以及部分回答了问题 0.0.5. 最后, 我们建立了一些映射定理, 证明了闭映射和有限到一伪开映射保持具有 Pytkeev 网络的空间, 这为问题 0.0.6 的解决提供了强有力的基础.

另一方面, 2010 年, A.V. Arhangel'skiĭ 在一篇关于 Fréchet-Urysohn 空间和收敛性质的研究报告中引入了 sensitive 族 [4]. 按照 A.V. Arhangel'skiĭ 的术语, Pytkeev 网络就是具有 sensitive 的网络. 2011 年, A.V. Arhangel'skiĭ [5] 又进一步提出了 sensor 的概念, 并证明了正则伪紧空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像 [5, 定理 2.13]. 那么, 如果正则的伪紧空间 X

是度量空间的商 s 映像, 则 X 是否具有点可数基呢 [67, 问题 2.2.12]? 因为度量空间的商 s 映像等价于具有点可数 cs^* 网络的序列空间 [71, 推论 2.7.5], 于是可以讨论下述问题.

问题 0.0.7 *设正则空间 X 是伪紧的序列空间. 如果 X 具有点可数 cs^* 网络, 那么 X 有点可数基吗?*

本文第三章结合 sensor 和 strict Pytkeev 网络的概念, 引入了 sp 网络的概念, 围绕问题 0.0.1, 系统讨论了具有特定 sp 网络的空间类的性质以及它们与各种广义度量空间类之间的联系, 证明了拓扑空间 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像, 同时说明了具有点可数 sp 网络的正则 feebly 紧空间有点可数基, 此结果部分回答了问题 0.0.7. 继续讨论了具有 σ 闭包保持 sp 网络空间的性质, 并利用 sp 网络刻画了层空间, 即拓扑空间 X 是层空间当且仅当 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间, 证明了具有 σ 局部有限 sp 网络的正则空间具有 σ 离散 sp 网络. 这些结果部分回答了问题 0.0.2 和问题 0.0.3.

1966 年 A.V.Arhangel'skiĭ 在名著 *Mappings and spaces* 中提出了下述问题: 刻画度量空间的商 s 映像. 1987 年, Y. Tanaka [105] 用具有点可数 cs^* 网络的序列空间给出了该问题较好的回答: 拓扑空间 X 是具有点可数 cs^* 网络的序列空间当且仅当 X 是度量空间的商 s 映像. 这使得一批拓扑学工作者对具有 cs^* 网络的序列空间产生了浓厚的兴趣. 其中, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ 在马丁公理下构造了具有下述性质的例子 [18, 定理 5]: 存在序列空间 X 满足 $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$; 存在序列空间 X 满足 $sb_\chi(X) < \psi(X)$. 为了进一步了解具有 cs^* 网络的序列空间所具有的性质, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ 提出了下述问题.

问题 0.0.8 *[18] 在 ZFC 下, 是否存在序列空间 X 满足: $sb_\chi(X) < \psi(X)$ 或者 $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$?*

近年来, 对点可数覆盖及相关映射理论的研究是广义度量空间理论的一个重要研究方向. 广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题都涉及点可数覆盖的研究. 一种理论是否具有生命力及其生命力的强弱, 判断的标准之一就是看该理论自身或者与其他学科之间是否能持续不断的产生新的问题. 2015 年, 林寿

修订出版的专著《点可数覆盖与序列覆盖映射》[67] 总结了国际上关于点可数覆盖及相关映射理论的研究成果, 评述了学科的发展趋势, 其中提出的大量问题成为该方向最有价值的研究线索, 其中的一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射, 引起了一批拓扑学工作者对点可数覆盖及相关映射理论的研究兴趣. 如, 2016 年, 林寿和蔡长勇讨论了闭映射、边缘紧映射和序列覆盖映射的相关性质, 提出了下述问题.

问题 0.0.9 *[68] 设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是具有紧可数 k 网络的 k 空间. 如果 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 f 是边缘 s 映射吗?*

问题 0.0.10 *[68] 设 $f : X \to Y$ 是序列覆盖边缘紧映射. 如果空间 X 满足下列任一条件, f 是 1 序列覆盖映射吗?*

(1) X 的任意紧子集在 X 中具有可数 sn 网络.

(2) X 的任意紧子集在 X 中具有可数外 sn 网络.

(3) X 有紧可数 sn 网络.

本文第四章主要围绕与点可数性相关的几个问题展开研究, 构造了几个例子, 部分回答了问题 0.0.8, 否定回答了问题 0.0.9 和问题 0.0.10, 还简化一些定理的证明.

拓扑代数是一般拓扑学蓬勃发展的一个重要研究方向. 简单来说, 拓扑代数是拓扑结构和代数结构的有机结合, 在代数结构上赋予不同的拓扑, 从而生成了各种形形色色的空间, 如拓扑群、拓扑环、拓扑域等. 拓扑群作为拓扑代数理论中的核心概念之一, 本身具有很多优美的性质. 如, 1934 年, Pontryagin [93] 证明了每一 T_0 拓扑群是完全正则的; 1936 年, G. Birkhoff [20] 和 S. Kakutani [58] 分别独立证明了每一第一可数的拓扑群是可度量化的; 1942 年, N. Bourbaki 证明了每一局部紧的拓扑群是仿紧的. 近年来, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ [18] 证明了具有可数 cs^* 特征的序列拓扑群是具有 σ 局部有限 k 网络的层空间, 同时它要么可度量, 要么含有次可度量化的 k_ω 开子群 [18, 定理 1]. A.V. Arhangel'skiĭ [4] 指出存在 Fréchet-Urysohn 的拓扑群使其不是可度量化的, 并证明了下述结果. 设 G 是拓扑群且 G 是 Fréchet-Urysohn 空间. 若 G 在某点处有可数 sensitive, 则 G 可度量化 [4, 定理 4.9]. T. Banakh 和 A. Leiderman 证明了局部 narrow 的拓扑群 G 具有强 Pytkeev 性质当且仅当 G 是可度量化的 [15, 定理 7]. 于是有如下问题.

问题 0.0.11 *[4, p. 106] 具有可数 sensitive 的拓扑群是否可度量化?*

问题 0.0.12 *具有强 Pytkeev 性质的序列拓扑群是否可度量化?*

众所周知, 具有点可数 k 网络的紧空间是可度量化的 [51]. G. Gruenhage、E.A. Michael 和 Y. Tanaka 在文献 [51] 中说明了存在具有点可数 k 网络的可数紧空间是不可度量化的. 2015 年, 蔡长勇和林寿 [27] 证明了具有点可数 k 网络的序列紧空间是紧可度量化的. 因为序列紧空间是可数紧的, 所以他们提出了下述问题

问题 0.0.13 *设 X 是具有点可数 k 网络的可数紧空间, 如果 X 是具有可数 tightness, 那么 X 是否可度量化?*

本文的第四章还讨论了 sp 网络在拓扑代数中的一些应用, 证明了拓扑群 G 是可度量化的当且仅当 G 是具有可数 sp 特征的 k 空间, 并举例说明存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间, 此结果否定的回答了问题 0.0.11 和 0.0.12. 最后, 我们利用拓扑群构造了一个例子, 此例子说明在 **CH** 下存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 X, 使其具有可数 tightness, 但不可度量化, 此结果否定回答了问题 0.0.13.

目　录

摘　要 **i**

Abstract **v**

引　言 **i**

第一章　预备知识 **1**

1.1　记号和术语 1

1.2　弱第一可数空间类与网络 2

1.3　映射类 4

第二章　Pytkeev 网络 **7**

2.1　Pytkeev 网络的基本性质 7

2.2　覆盖性质 13

2.3　映射性质 20

第三章　具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络 **27**

3.1　sp 网络 27

3.2　具有点可数 sp 网络的空间 31

3.3　具有 σ 闭包保持 sp 网络的空间 37

第四章　与点可数性相关的几个问题 **43**

4.1 具有点可数 cs^* 网络的空间 43

4.2 具有点可数 k 网络的空间 47

4.3 有关拓扑代数的几个结果 51

第五章　结束语 **59**

5.1 总结 59

5.2 一些尚未解决的问题 62

参考文献 **65**

作者攻读博士学位期间的工作目录 **73**

声　明 **75**

致　谢 **77**

第一章　预备知识

§1.1　记号和术语

约定: 空间均指满足 T_2 分离公理的拓扑空间, 映射均是连续满的.

本节介绍一些常用的记号和术语.

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\mathbb{N},\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{I}$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的正整数子集、有理数子集和单位闭区间. 记 $\mathbb{S}=\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$. ω 有三种含义, 一是 $\mathbb{R}$ 的自然数子集 $\mathbb{N}\cup\{0\}$, 二是第一个无限序数, 三是最小的无限基数, 它们的确切意义在上下文中是不会混淆的. ω_1 是第一个不可数序数.

对于空间 $X,\tau(X)$, 在不引起混淆情况下记为 τ, 表示 X 上的拓扑. $\tau^c(X)$ 表示 X 中的全体闭子集.

对拓扑空间 X, X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为非平凡的, 如果各个 x_n 是互不相同的.

对 X 的集族 $\mathscr{P}$, 记

$$\mathscr{P}^{<\omega}=\{\mathscr{P}'\subset\mathscr{P}:\mathscr{P}'\text{ 有限}\};$$

对 $A\subset X$, $x\in X$, 记

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{P})_x=\{P\in\mathscr{P}:x\in P\};\\
&(\mathscr{P})_A=\{P\in\mathscr{P}:P\cap A\neq\emptyset\};\\
&\mathrm{st}(A,\mathscr{P})=\bigcup(\mathscr{P})_A,\quad \mathrm{st}(x,\mathscr{P})=\bigcup(\mathscr{P})_x;\\
&\mathscr{P}|_A=\{P\cap A:P\in\mathscr{P}\}.
\end{aligned}$$

集合 A 的基数记为 $|A|$. 空间 X 的**权**定义为

$$\omega(X)=\min\{|\mathscr{P}|:\mathscr{P}\text{ 是空间 }X\text{ 的基}\}.$$

空间 X 的**稠密度**定义为

$$d(X)=\min\{|D|:D\text{ 是空间 }X\text{ 的稠密子集}\}.$$

空间 X 在点 x 的**伪特征**定义为

$$\psi(X,x)=\min\{|\mathscr{U}|:\mathscr{P}\text{ 是空间 }X\text{ 的开集族且}\bigcap\mathscr{U}=\{x\}\}.$$

空间 X 的**伪特征**定义为

$$\psi(X)=\sup\{\psi(X,x):x\in X\}.$$

§1.2 弱第一可数空间类与网络

定义 1.2.1 *[71] 设 X 是一拓扑空间, $P\subset X$.*

*(1) 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x, 称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**终于** P 的, 如果存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x\}\cup\{x_n:n\geq m\}\subset P$.*

*(2) P 称为 X 中的点 x 的**序列邻域**, 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P.*

*(3) P 称为 X 的**序列开集**, 若 P 是 P 中每一点的序列邻域.*

*(4) P 称为 X 的**序列闭集**, 若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.*

*(5) X 称为**序列空间**, 若 X 的每一序列开集是 X 的开集.*

*(6) X 称为**具有可数 tightness**, 若 $x\in\overline{A}$, 则存在 A 的可数子集 C 使得 $x\in\overline{C}$; 记为 $t(X)\leq\omega$.*

*(7) X 称为 k **空间**, 若 $A\subset X$ 使得对 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭子集, 则 A 是 X 的闭子集.*

*(8) X 称为 **Fréchet-Uryshon 空间**, 若 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 中点组成的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得在 X 中 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x.*

显然, 第一可数空间 $\Rightarrow$ Fréchet-Uryshon 空间 $\Rightarrow$ 序列空间 $\Rightarrow$ 可数 tightness, k 空间. 这些空间类统称为**弱第一可数空间**. 易验证, 对于空间 X 的子集 P, 若 X 中每一收敛于 x 的序列存在子列终于 P, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

定义 1.2.2 *设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.*

*(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**网络** [32, p. 127], 若 X 中的每一开子集是 $\mathscr{P}$ 的某子集族的并.*

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **(拟) k 网络** *[49, 定义 11.1]*, 若对于 X 中的每一 *(*可数紧*)* 紧子集 K 及 X 中包含 K 的开子集 V, 存在 $\mathscr{P}' \in \mathscr{P}^{<\omega}$ 使得 $K \subset \bigcup \mathscr{P}' \subset V$.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cs 网络** *[52]*, 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P 且 $P \subset V$.

(4) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cs^* 网络** *[47, 定义 3]*, 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的某子列终于 P 且 $P \subset V$.

(5) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cs' 网络** *[68]*, 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 及 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x, x_m\} \subset P \subset U$.

(6) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cn 网络** *[43]*, 若对 $x \in X$ 的任意邻域 U, 都有 $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U\}$ 是 x 的邻域.

(7) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **wcs^* 网络** *[69, p. 79]*, 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 和 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的某子列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 及 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P \subset U$ 且 $\{x_{n_i} : i \geq m\} \subset P$.

(8) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **(strict) Pytkeev 网络** *[11]*, 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的网络且对 x 在 X 中的任一邻域 U 以及 X 中以 x 为聚点的子集 A, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $(x \in)P \subset U$ 且 $P \cap A$ 是无限集.

取定点 $x \in X$, $\mathscr{P}$ 称为 x **在 X 中的网络** *(*或 cs **网络**、cs^* **网络**、cs' **网络**、cn **网络**、wcs^* **网络**、*)*, 若 $x \in \bigcap \mathscr{P}$ 且 $\mathscr{P}$ 在点 x 处满足上述条件 *(1) (*或 *(3)*、*(4)*、*(5)*、*(6)*、*(7))*.

$\mathscr{P}$ 称为 x **在 X 中的 (strict) Pytkeev 网络**, 若 $\mathscr{P}$ 是 x 在 X 中的网络且对 x 在 X 中的任一邻域 U以及 X 中以 x 为聚点的子集 A, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $(x \in)P \subset U$ 且 $P \cap A$ 是无限集.

这些网络之间的基本关系如下图所示.

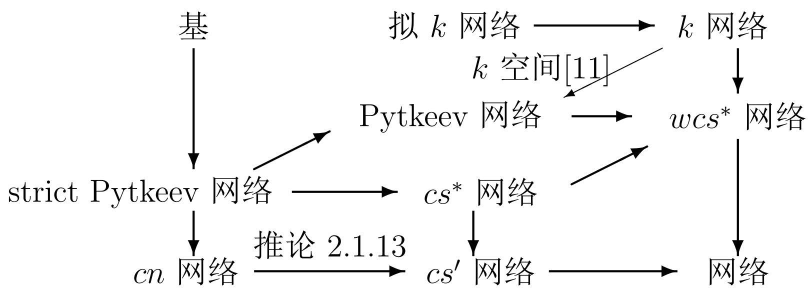

图1

显然, 基是 k 网络, 但不一定是拟 k 网络. 事实上, 令 $X=[0,\omega_1)$, 并赋予其序拓扑. 取 $\mathscr{P}=\{U\subset X: U$ 是开集且存在 $\alpha<\omega_1$ 使得 $U\subset[0,\omega_1)\}$, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的基. 由 $\mathscr{P}$ 的选取可知, X 不能被 $\mathscr{P}$ 中有限个元覆盖, 又因为 X 是可数紧空间, 所以 $\mathscr{P}$ 不是 X 的拟 k 网络.

由上述网络可产生一批重要的广义度量空间类. 如, 具有可数网络的正则空间称为 **cosmic 空间** [79, p. 993]; 具有可数 k 网络的正则空间称为 $\aleph_0$ **空间** [79, 定义 1.2]; 具有可数 Pytkeev 网络的正则空间称为 $\mathfrak{P}_0$ **空间** [11, 定义 1.2]. 显然, $\mathfrak{P}_0$ 空间是 $\aleph_0$ 空间, $\aleph_0$ 空间是 cosmic 空间.

定义 1.2.3 *设空间 X 的子集族 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 满足: 对于 $x\in X$, $\mathscr{P}_x$ 是 x 在 X 中的网络, 并且如果 $U,V\in\mathscr{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathscr{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.*

集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn **网络** *[64], 若每一 $\mathscr{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域. 上述 $\mathscr{P}_x$ 称为 x* **在** *X* **中的** *sn* **网络**.

若空间 X 的每一点都有可数 sn 网络, 则称 X **是** *snf* **可数空间**.

注 1.2.4 *对于空间 X 及 $x\in P\subset X$, "P 是 x 的序列邻域"也称为 P 是 x 的 sequential barrier [18]. 所以, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ 称 snf 可数空间为具有可数 sb 特征的空间.*

定义 1.2.5 *[72] 设 A 是空间 X 的非空子集.*

(1) 集族 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in A}\mathscr{P}_x$ 称为 A **的外** *sn* **网络**, *其中每一 $\mathscr{P}_x$ 是 x 在 X 中的 sn 网络.*

(2) X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 A **在** *X* **中的** *sn* **网络**, *若 $\mathscr{P}$ 中的每一元 P 是 A 中每一点的序列邻域, 并且对 X 中每一包含 A 的开集 V, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $P\subset V$.*

§1.3 映射类

定义 1.3.1 *[32] 设映射 $f:X\to Y$.*

*(1) f 称为***紧映射** *(或***有限到一映射、s 映射、Lindelöf 映射***), 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集 (或有限子集、可分子集、Lindelöf 子集).*

*(2) f 称为***边缘紧映射 (边缘 s 映射)***, 若每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集 (可分子集).*

(3) f 称为**商映射**, 若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集, 则 U 是 Y 的开子集.

(4) f 称为**伪开映射**, 若 V 是 X 的开子集且 $f^{-1}(y) \subset V$, 则 $f(V)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(5) f 称为**开映射**, 若 V 是 X 的开子集, 则 $f(V)$ 是 Y 的开子集.

(6) f 称为**闭映射**, 若 F 是 X 的闭子集, 则 $f(F)$ 是 Y 的闭子集.

(7) f 称为**完备映射**, 若 f 是闭且紧的映射.

显然, 开映射是伪开映射, 伪开映射是商映射. 有限到一闭映射是完备映射, 完备映射是闭映射, 闭映射是伪开映射.

定义 1.3.2 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为**紧覆盖映射** *[79]*, 若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的像.

(1) f 称为**序列商映射** *[21]*, 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_i}\}$ 和 X 中的收敛序列 $\{x_i\}$ 使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$.

(1) f 称为**序列覆盖映射** *[99]*, 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(1) f 称为 **1 序列覆盖映射** *[64]*, 若对于 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足: 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

显然, 1 序列覆盖映射是序列覆盖映射, 序列覆盖映射是序列商映射.

第二章　Pytkeev 网络

2015 年, T. Banakh 引入了 (strict) Pytkeev 网络的概念 [11, 定义 1.1], 讨论了 (strict) Pytkeev 网络与 k 网络、cs^* 网络之间的关系, 证明了可数的 (strict) Pytkeev 网络是 k 网络 (cs^* 网络), 并说明了逆命题在 k 空间 (Fréchet-Urysohn 空间) 中同样成立 [11], 同时还研究了 (strict) Pytkeev 网络在函数空间和拓扑代数中的应用. 随后, S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol [43] 提出了 cp 网络、ck 网络和 cn 网络等概念, 讨论了它们与 (strict) Pytkeev 网络之间的关系, 证明了若拓扑空间 X 在点 x 处具有可数 cn 网络, 则 X 在点 x 处具有可数 tightness [43, 命题 2.3], 并在函数空间和拓扑向量空间中做了很多与 strict Pytkeev 网络有关的工作 [44].

在本章, 我们主要围绕问题 0.0.1、问题 0.0.4 以及问题 0.0.5 展开研究, 系统讨论由 Pytkeev 网络所定义的拓扑空间的基本性质, 包含它与各类网络之间的关系, 覆盖性质, 映射性质等, 回答或部分回答相关问题.

§2.1　Pytkeev 网络的基本性质

本小节我们主要介绍 Pytkeev 网络的概念, 讨论其与 k 网络、wcs^* 网络、cs' 网络及 cn 网络之间的内在联系, 证明了点可数 Pytkeev 网络是拟 k 网络以及cn 网络是 cs' 网络, 并说明了序列空间中的 wcs^* 网络是 Pytkeev 网络以及 Fréchet-Urysohn 空间中的 cs' 网络是 cn 网络, 同时举例说明了一些网络在某些空间中不能相互转化. 最后证明了拓扑空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是具有点可数 Pytkeev 网络的 M 空间, 以及正则的 q 空间 X 是第一可数空间当且仅当 X 具有强 Pytkeev 性质.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的**点可数集族**, 若对于每一 $x \in X$, $\{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$ 是可数的. T. Banakh [11, 命题 1.6] 证明了点可数 Pytkeev 网络是 k 网络. 事实上, 我们可以得到更强的结果.

定理 2.1.1 *点可数 Pytkeev 网络是拟 k 网络.*

证明　设 $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的点可数 Pytkeev 网络. 对于 X 中的任意可数紧子集 K 及包含 K 的开子集 U, 记 $\mathscr{P}_U = \{P \in \mathscr{P} : P \subset U\}$. 对任意的

$x \in U$, 记 $\mathscr{P}_x = \{P \in \mathscr{P}_U : x \in P\}$. 显然, $\mathscr{P}_x$ 是可数的. 因此不妨假设 $\mathscr{P}_x = \{P_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$.

下证: $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的拟 k 网络.

若 $\mathscr{P}$ 不是拟 k 网络, 则对 $\mathscr{P}$ 的任意有限子集族 $\mathscr{F}$ 有 $K \not\subseteq \bigcup\mathscr{F}$. 选取 $x_1 \in K$, 则存在 $x_2 \in K$ 满足 $x_2 \in K \setminus P_1(x_1)$. 以此类推, 我们可以归纳选取 K 中的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x_{k+1} \in K \setminus \bigcup_{i,n<k} P_i(x_n)$. 显然, 对任意的 $i, n < k$, $x_k \notin P_i(x_n)$. 因为 K 是可数紧的, 所以序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有聚点. 设聚点为 y. 令 $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. 从而有 $y \in \overline{A} \setminus A$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 Pytkeev 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset U$ 且 $P \cap A$ 是无限集. 选取 $x_i \in P \cap A$. 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $P = P_m(x_i)$. 根据 x_i 的选取规则可知, 当 $k > m, i$, $x_k \notin P_m(x_i)$. 所以有 $|P_m(x_i) \cap A| \leq \max\{m, i\}$, 这与 $P \cap A$ 是无限集矛盾.

因此, $\mathscr{P}$ 是 X 的拟 k 网络. 证毕.

注 2.1.2 *上述定理的逆命题并不成立.*

事实上, 令 $X = \mathbb{N} \cup \{p\} \subset \beta\mathbb{N}$, 其中 $\beta\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的 Čech-Stone 紧化, $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. 容易验证 X 中的任意可数紧子集是有限集. 因此, $\{\{x\} : x \in X\}$ 是 X 的可数拟 k 网络. 但是, 由文献 [11, 例 1.11] 可知, X 不具有点可数的 Pytkeev 网络.

下面的例子说明定理 2.1.1 中的条件 "点可数" 不能去掉.

例 2.1.3 *存在一个紧空间 X 上 strict Pytkeev 网络, 使其不是 k 网络.*

证明 令 $X = [0, \omega_1]$, 并赋予 X 序拓扑. 易知, X 是紧空间. 记 L 是 X 中全体极限序数所组成的集合. 对任意的 $\alpha < \omega_1$, $n < \omega$, 令

$$P_{\alpha,n} = (\{\beta + n : \beta \in L\} \cap (\alpha, \omega_1]) \cup \{\omega_1\}.$$

显然, $(\alpha, \omega_1] = \bigcup_{n<\omega} P_{\alpha,n}$. 对任意的 $x \in X$, 选取 X 中的子集族 $\mathscr{P}_x$ 满足如下性质: 当 $x \neq \omega_1$ 时, 令 $\mathscr{P}_x$ 是 x 处的局部基且满足 $\bigcup \mathscr{P}_x \subset [0, x]$; 当 $x = \omega_1$ 时, 令 $\mathscr{P}_x = \{P_{\alpha,n} : \alpha < \omega_1, n < \omega\}$. 置 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$. 显然, ω_1 包含于 $\mathscr{P}$ 中 ω_1 多个元中. 因为 X 是紧空间且不能被 $\mathscr{P}$ 中有限多个元覆盖, 所以 $\mathscr{P}$ 不是 X 中的 k 网络.

下证, $\mathscr{P}$ 是 X 的 strict Pytkeev 网络.

显然, $\mathscr{P}$ 是 X 中的网络. 对于 X 中的任意一点 x 及 x 的任意邻域 U 和 X 中以 x 为聚点的子集 A. 不妨假设 $x=\omega_1$, 则存在 $\alpha<\omega_1$ 满足 $(\alpha,\omega_1]\subset U$. 因为 x 是 A 的聚点, 则 $A\cap(\alpha,\omega_1]$ 是不可数集. 又因为

$$A\cap(\alpha,\omega_1]=\bigcup_{n<\omega}A\cap P_{\alpha,n},$$

则存在 $n<\omega$, 使得 $A\cap P_{\alpha,n}$ 是无限集. 显然 $x\in P_{\alpha,n}\subset U$.

因此 $\mathscr{P}$ 是 X 中的 strict Pytkeev 网络. 证毕.

拓扑空间 X 称为 M **空间** [82, p. 150], 若存在度量空间 M 及 M 到 X 的闭映射 f 使其满足对 X 中的任意一点 x 有 $f^{-1}(x)$ 是 X 中的可数紧集.

由定义易知, 度量空间和可数紧空间是 M 空间. 因为空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是具有点可数拟 k 网络的 M 空间 [51, 推论 4.2], 所以我们有下述推论.

推论 2.1.4 *拓扑空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是具有点可数 Pytkeev 网络的 M 空间.*

拓扑空间 X 称为**具有可数 fan-tightness** [6], 若 X 中的集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 A_n 的有限子集 B_n 使得 $x\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n}$.

显然, 若空间 X 具有可数 fan-tightness, 则 X 具有可数 tightness.

我们还需要一系列引理.

引理 2.1.5 *[11, 命题 1.7] k 空间中的 k 网络是 Pytkeev 网络.*

引理 2.1.6 *[15, 命题 1.6] 拓扑空间 X 是第一可数的当且仅当 X 具有强 Pytkeev 性质和可数 fan-tightness.*

引理 2.1.7 *[43, 命题2.3] 具有可数 cn 特征的空间有可数 tightness.*

1984 年, G. Gruenhage、E.A. Michael 和 Y. Tanaka 证明了下述结果.

引理 2.1.8 *[51, 推论 3.6] 具有点可数 k 网络的第一可数正则空间有点可数基.*

由上述引理, 可得下述推论

推论 2.1.9 *设空间 X 是具有点可数 strict Pytkeev 网络的正则空间. 若 X 有可数 fan-tightness, 则 X 有点可数基*

证明 因为 X 有点可数 strict Pytkeev 网络, 所以 X 有强 Pytkeev 性质. 由引理 2.1.6 可知, X 是第一可数的. 再由定理 2.1.1 可知, X 有点可数 k 网络. 于是, 由引理 2.1.8 知 X 具有点可数基. 证毕.

由引理 2.1.5 可知, k 空间中的 k 网络是 Pytkeev 网络, 那么在序列空间中呢? 下述定理告诉我们, 在序列空间中我们可以得到更一般的结果.

定理 2.1.10 *设拓扑空间 X 是序列空间. 若 X 具有 wcs^* 网络, 则 X 有 Pytkeev 网络.*

证明 设集族 $\mathscr{P}$ 是序列空间 X 的 wcs^* 网络. 任取 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 O 以及 X 中以 x 为聚点的子集 A. 令

$$B = (A \setminus \{x\}) \cup (X \setminus O),$$

则有 $x \in \overline{B} \setminus B$. 因为 X 是序列空间, 所以 B 不是序列闭的, 因此存在 B 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于一点 $z \notin B$. 由于 $X \setminus O$ 是闭集, 所以不妨假设所有的 x_n 互不相同且都包含于 A. 因为 $X \setminus O \subset B$, 所以 $z \in O$. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 wcs^* 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 和 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 及 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_{n_i} : i > m\} \subset P \subset O$. 因此 $P \cap A$ 是无限集.

所以 $\mathscr{P}$ 是 X 的 Pytkeev 网络. 证毕.

注 2.1.11 *定理 2.1.10 的中的条件"序列空间"不能减弱为"k 空间".*

事实上, 正整数集 $\mathbb{N}$ 的 Čech-Stone 紧化空间 $\beta\mathbb{N}$ 是具有点可数 cs^* 网络的紧空间, 但 $\beta\mathbb{N}$ 没有点可数的 Pytkeev 网络. 因为 $\beta\mathbb{N}$ 不含非平凡的收敛序列 [32, 推论 3.6.15], 所以 $\{\{x\} : x \in \beta\mathbb{N}\}$ 就是 $\beta\mathbb{N}$ 中的点可数 cs^* 网络. 再由推论 2.1.4 可知, $\beta\mathbb{N}$ 不含有点可数的 Pytkeev 网络.

引理 2.1.12 *设 $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络当且仅当 $\mathscr{P}$ 是 X 中的网络且对任意的 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 U 以及 X 中以 x 为聚点的子集 A, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 和 $z \in A \setminus \{x\}$ 满足 $\{x, z\} \subset P \subset U$.*

证明 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络. 显然, $\mathscr{P}$ 是 X 中的网络. 设 $x \in X$, U 是 x 的任意邻域, A 是 X 中任意以 x 为聚点的子集. 因为 $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U\}$ 是 x 的邻域, 所以存在

$$z \in (A \setminus \{x\}) \cap (\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U\}),$$

因此存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x, z\} \subset P \subset U$, 即存在 $P \in \mathscr{P}$ 和 $z \in A \setminus \{x\}$ 满足 $\{x, z\} \subset P \subset U$.

另一方面, 令 U 是 X 中 x 的邻域, 记 $V = \bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U\}$. 若 V 不是 x 的邻域, 则 $x \in \overline{X \setminus V}$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 中的网络, $x \in V$, 因此 x 是 $X \setminus V$ 的聚点. 由题设条件, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 和 $z \in X \setminus V$ 满足 $\{x, z\} \subset P \subset U$, 矛盾. 因此, $\mathcal{P}$ 是 X 中的 cn 网络. 证毕.

由 cs' 网络的定义和引理 2.1.12, 可直接得到下述推论.

推论 2.1.13 *cn 网络是 cs' 网络.*

定理 2.1.14 *具有 cs' 网络的 Fréchet-Urysohn 空间具有 cn 网络.*

证明 设拓扑空间 X 是 Fréchet-Urysohn 空间, $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs' 网络. 任取 $x \in X$ 及 x 的邻域 U, 令

$$V = \bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U\}.$$

若 $x \notin V^\circ$, 则 $x \in \overline{X \setminus V}$. 因为 X 是 Fréchet-Uryshon 空间, 所以存在 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus V$ 收敛于 x. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs' 网络, 所以存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x, x_m\} \subset P \subset U$. 从而有 $P \subset V$ 且 $x_m \in P \cap (X \setminus V)$, 这与 $P \cap (X \setminus V) = \emptyset$ 矛盾.

所以, $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络. 证毕.

注 2.1.15 *(1) 存在一个具有点可数 k 网络的第一可数空间, 使其不具有点可数 cn 网络, 如例 2.2.7.*

(2) 存在一个具有点可数 cs^* 网络的序列空间, 使其不具有点可数 cn 网络, 如例 2.3.12.

(3) 存在一个具有点可数 cn 网络的 Fréchet-Urysohn 空间, 使其不具有点可数 wcs^* 网络.

事实上, 存在一个非第一可数的正则可数 Fréchet-Urysohn 空间 S [96, 例2.3]. 因为 S 不具有点可数的 k 网络 [68, 注 2.10(4)], 所以由定理 2.1.1 和 2.1.10 可知, S 不具有点可数的 wcs^* 网络. 记 $S = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. 令 $\mathscr{P} = \{\{s_n, s_m\} : n, m \in \mathbb{N}\}$, 则 $\mathscr{P}$ 是 S 的可数 cs' 网络. 由定理 2.1.14 可知 $\mathscr{P}$ 是 S 的可数 cn 网络.

拓扑空间 X 称为 q **空间** [78, p. 173], 如果对 X 中的任意一点 x, 都存在 x 的开邻域序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 若 $x_n \in U_n(x)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点.

显然, 可数紧空间是 M 空间, M 空间是 q 空间.

下述定理 2.1.16 改进了 A.V. Arhangel'skiĭ 和 A. Bella 的下述结果 [6, 推论 2]: 正则的可数紧空间 X 具有可数 tightness 当且仅当 X 有可数 fan-tightness.

定理 2.1.16 *设 X 是正则 q 空间. 若 X 有可数 tightness, 则 X 有可数 fan-tightness.*

证明 取定 $x \in X$, 选取 X 中的序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使其满足 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. 不妨假设, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 满足 $x \notin A_n$. 因为 X 是 q 空间, 所以存在 x 的开领域列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 q 空间的条件. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $B_n = A_n \cap U_n$. 显然, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$. 因为 X 是 q 空间, 所以对满足任意的 $x_n \in B_n$ 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点.

记 $\mathscr{H} = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in B_n, n \in \mathbb{N}\}$. 对任意的 $H \in \mathscr{H}$, 设序列 H 在 X 中的聚点为 z_H. 令 $S = \{z_H : H \in \mathscr{H}\}$.

下证**:** $x \in \overline{S}$.

假设不成立, 则 $U = X \setminus \overline{S}$ 是 x 的开邻域. 因 X 是正则空间, 所以存在 X 的开子集 V 满足 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. 显然, 对任意的 $n \in \omega$ 都有 $V \cap B_n \neq \emptyset$. 因此, 对任意的 $n \in \omega$, 我们可以选取 $z_n \in B_n \cap V$, 则序列 $C = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}$ 且有聚点 z_C. 显然, $z_C \in S$. 但是 $z_C \in \overline{V} \subset U = X \setminus \overline{S}$, 矛盾.

因为 X 有可数 tightness, 所以存在可数集 $M \subset S$ 满足 $x \in \overline{M}$. 令 $M = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 可以选取序列 $D_n = \{z_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}$ 使其满足 $y_n = z_{D_n}$ 是序列 D_n 的聚点. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $K_n = \{z_{1,n}, z_{2,n}, ..., z_{n,n}\}$, $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, 则有 $K_n \subset B_n \subset A_n$. 设 W 是 x 的开邻域, 则有 $W \cap M \neq \emptyset$.

因此存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $y_n\in W\cap M$. 又因为 y_n 是 D_n 的聚点, 则存在 $m>n$ 满足 $z_{n,m}\in W\cap K_m$. 这说明 $W\cap K\neq\emptyset$. 从而有 $x\in\overline{K}=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n}$. 所以 X 有可数 fan-tightness. 证毕.

由定理 2.1.16 和引理 2.1.6 可得下述结果.

推论 2.1.17 *设 X 是正则的 q 空间, 则 X 具有强 Pytkeev 性质当且仅当 X 是第一可数空间.*

空间 X 在**点** x **的** cn **特征** [32] 定义为

$$cn_\chi(X,x)=\min\{|\mathscr{P}|:\mathscr{P}\text{ 是空间 }X\text{ 在点 }x\text{ 的 }cn\text{ 网络}\}.$$

空间 X 的 cn **特征** [32] 定义为

$$cn_\chi(X)=\sup\{cn_\chi(X,x):x\in X\}.$$

易验证, 具有强 Pytkeev 性质的空间有可数 cn 特征, 所以由推论 2.1.17, 我们有下述问题.

问题 2.1.18 *设 X 是正则的 q 空间, 若 X 具有可数 cn 特征, 则 X 是第一可数空间吗?*

§2.2 覆盖性质

本小节我们主要讨论具有 cn 网络或 strict Pytkeev 网络的空间的覆盖性质, 并证明了具有点可数 cn 网络的空间是亚 Lindelöf 的 D 空间, 此结果肯定地回答了问题 0.0.4, 以及部分回答了问题 0.0.5. 本节还得到了一些关于具有局部可数 (strict) Pytkeev 网络 (或 cn 网络) 的空间的结果.

拓扑空间 X 称为**亚 Lindelöf 空间** [24, p. 370], 若 X 的任意开覆盖都有点可数的开加细覆盖. 拓扑空间 X 称为**遗传亚 Lindelöf 空间**, 若 X 的任意子空间是亚 Lindelöf 空间.

G. Gruenhage, E.A. Michael 和 Y. Tanaka [51, 命题 8.6] 证明了具有点可数 k 网络的正则 Fréchet-Urysohn 空间是亚 Lindelöf 空间. 由引理 2.1.5 知 k 空间中的 k 网络是 Pytkeev 网络, 所以下述定理 2.2.1 推广了 G. Gruenhage、E.A. Michael 和 Y. Tanaka 的结果.

定理 2.2.1 具有点可数 cn 网络的拓扑空间是遗传亚 *Lindelöf* 空间.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 cn 网络. 易证, 点可数 cn 网络具有遗传性. 因此我们只需要证明 X 是亚 Lindelöf 空间即可.

设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 是 X 的任一开覆盖, 其中 γ 是良序集. 对任意的 $\alpha < \gamma$, 令

$$V_\alpha = \Big(\bigcup\{P \in \mathscr{P} : P \subset U_\alpha, P \not\subset U_\beta \text{ if } \beta < \alpha\}\Big)^\circ.$$

显然, $V_\alpha \subset U_\alpha$.

下证: $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha < \gamma\}$ 是 X 中的点可数开覆盖.

对任意的 $x \in X$, 记 $\alpha(x) = \min\{\alpha < \gamma : x \in U_\alpha\}$, 则 $x \in U_{\alpha(x)}$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 中的 cn 网络, 所以 $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U_{\alpha(x)}\}$ 是 x 的邻域, 则有

$$\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U_{\alpha(x)}\} \subset \{P \in \mathscr{P} : P \subset U_{\alpha(x)}, P \not\subset U_\beta \text{ if } \beta < \alpha(x)\}.$$

于是有

$$\begin{aligned} x &\in \Big(\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset U_{\alpha(x)}\}\Big)^\circ \\ &\subset \Big(\bigcup\{P \in \mathscr{P} : P \subset U_{\alpha(x)}, P \not\subset U_\beta \text{ if } \beta < \alpha(x)\}\Big)^\circ \\ &= V_{\alpha(x)}. \end{aligned}$$

因此 $\mathscr{V}$ 是 X 中的开覆盖.

下证 $\mathscr{V}$ 是点可数的.

假若不是, 则存在 $x \in X$ 及 γ 的不可数子集 Γ 满足对于每一 $\alpha \in \Gamma$ 有 $x \in V_\alpha$. 记 $\mathscr{P}_x = \{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$. 我们可以选取一个集合 $P_\alpha \in \mathscr{P}_x$ 满足对每一 $\beta < \alpha$ 都有 $P_\alpha \subset U_\alpha$ 且 $P_\alpha \not\subset U_\beta$. 因为 $\mathscr{P}_x$ 是可数集, 而 Γ 是不可数集, 我们可以假设对任意的 $\alpha, \beta \in \Gamma$ 有 $P_\alpha = P_\beta$. 取定不同的 $\alpha, \beta \in \Gamma$, 设 $\beta < \alpha$, 则 $U_\beta \supset P_\beta = P_\alpha \not\subset U_\beta$, 矛盾. 故 $\mathscr{V}$ 是点可数的.

综上所述, X 是遗传亚 Lindelöf 空间. 证毕.

由定理 2.2.1 和定理 2.1.14 可得下述推论 2.2.2, 此推论肯定地回答了问题 0.0.4.

推论 2.2.2 具有点可数 cs' 网络的 *Fréchet-Urysohn* 空间是遗传亚 *Lindelöf* 空间.

由图 1 可知, strict Pytkeev 网络是 cn 网络, 所以有下述推论 2.2.3.

推论 2.2.3 *具有点可数 strict Pytkeev 网络的空间是遗传亚 Lindelöf 空间.*

推论 2.2.4 *具有由可分子集组成的点可数 cn 网络的空间是可分 Lindelöf 空间的拓扑和.*

证明 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 中由可分子集构成的点可数 cn 网络. 由定理 2.2.1 可知, X 是亚 Lindelöf 空间. 因为对任意的 $x \in X$, $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$ 是 x 的邻域, 所以 X 是局部可分空间. 由 [51, 命题 8.7], X 是 Lindelöf 空间的拓扑和. 易证局部可分的 Lindelöf 空间是可分的.

故, X 是可分 Lindelöf 空间的拓扑和. 证毕.

设 $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的**星可数集族** [24, p. 368], 若对于每一 $Q \in \mathscr{P}$，$\{P \in \mathscr{P} : P \cap Q \neq \emptyset\}$ 是可数的. $\mathscr{P}$ 称为 X 的**局部可数集族** [24, p. 349], 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V 使得 V 至多与 $\mathscr{P}$ 中可数多个元相交. 可数多个局部可数集族的并称为 σ **局部可数集族**.

定理 2.2.5 *对于拓扑空间 X, 下述条件互相等价:*

(1) X 具有局部可数的 strict Pytkeev 网络.

(2) X 具有星可数的 strict Pytkeev 网络.

(3) X 具有由可分子集构成的 σ 局部可数 strict Pytkeev 网络.

(4) X 是具有可数 (strict) Pytkeev 网络的空间的拓扑和.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的局部可数 strict Pytkeev 网络. 对任意的 $x \in X$, 存在 x 的邻域 V_x 满足 V_x 至多于 $\mathscr{P}$ 中可数多个元相交. 令 $\mathscr{P}^* = \{P \in \mathscr{P} : P \subset V_x, x \in X\}$. 显然可得 $\mathscr{P}^*$ 是 X 的星可数 strict Pytkeev 网络. 证毕.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的星可数 strict Pytkeev 网络. 对任意的 $P \in \mathscr{P}$, 集族 $\mathscr{P}|_P = \{Q \cap P : Q \in \mathscr{P}\}$ 是 P 的可数网络, 因此 P 是 X 的可分子集. 对任意的 $x \in X$, 令 $U = \bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$, 则 U 是 x 的邻域. 因为 $\mathscr{P}$ 是星可数集族, U 至多于 $\mathscr{P}$ 中可数多个元相交. 因此 $\mathscr{P}$ 是局部可数集族. 从而 X 有由可分子集构成的 σ 局部可数 strict Pytkeev 网络. 证毕.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设集族 $\mathscr{P}$ 是 X 中由可分子集构成的 σ 局部可数 strict Pytkeev 网络. 对任意的 $P \in \mathscr{P}$, 由推论 2.2.3 可知, P 是亚 Lindelöf 空间, 因此 P 是 Lindelöf 空间. 又因为 Lindelöf 空间中的局部可数集族是可数的, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的星可数集族. 因此 $\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 其中 $\mathscr{P}_\alpha$ 是可数的且 $(\bigcup \mathscr{P}_\alpha) \cap (\bigcup \mathscr{P}_\beta) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\mathscr{P}_\alpha = \mathscr{P}_\beta$ [24, 引理 3.10]. 对任意的 $\alpha \in \Lambda$, 记 $X_\alpha = \bigcup \mathscr{P}_\alpha$. 如果 $x \in X_\alpha$, 则有 $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\} \subset X_\alpha$. 所以 X_α 是 x 的邻域. 这说明 X_α 是 X 中的开集. 于是我们有 $X = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. 显然, 任意的 $\mathscr{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 strict Pytkeev 网络. 故 X 是具有可数 (strict) Pytkeev 网络的空间的拓扑和. 证毕.

(4) $\Rightarrow$ (1). 由 [11, p. 152] 可知, 具有可数 Pytkeev 网络的空间有可数 strict Pytkeev 网络. 因此, 若 X 是具有可数 (strict) Pytkeev 网络的空间的拓扑和, 则 X 有局部可数的 strict Pytkeev 网络. 证毕.

注 2.2.6 *通过定理 2.2.5 的证明过程可知, 定理 2.2.5 条件中的 strict Pytkeev 网络换成 cn 网络同样成立.*

例 2.2.7 *存在一个具有星可数、局部可数及由可分子集构成的 σ 离散 Pytkeev 网络的第一可数空间, 使其不具有点可数的 cs' 网络.*

证明 令 $S = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$, $L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, $X = S \cup L$. 记 τ^* 是 X 的欧氏子空间拓扑. X 赋予半圆盘拓扑 [101, p. 96]:

$$\tau = \{\tau^*\} \bigcup \{\{x\} \cup (S \cap U) : x \in L, x \in U \in \tau^*\}$$

称 (X, τ) 为半圆盘空间.

易验证, X 是可分且第一可数空间. 但是 X 不是 Lindelöf 空间. 因此 X 不是亚 Lindelöf 空间. 由推论 2.2.2, X 不具有点可数的 cs' 网络.

对 $x \in \mathbb{R}^2, r > 0$, 记 $B(x,r)$ 为 x 的球形邻域. 令

$$\mathscr{P} = \{\{p\} : p \in L\} \bigcup \{B(q, 1/n) \cap S : q \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

因为 L 是 X 闭离散集, 所以 $\mathscr{P}$ 是 X 的星可数、局部可数且是由可分子集构成的 σ 离散集族.

下证 $\mathscr{P}$ 是 X 中的 wcs^* 网络.

设 $p\in U\in\tau$, $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 U 中收敛于 p 的序列. 因为 L 是离散集, 我们可以假设所有的 $p_k\in S$, 则关于欧氏子空间拓扑 τ^* 序列 $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也收敛于 p. 又因为 $\{B(q,1/n)\cap X: q\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}\}$ 是 τ^* 的可数基, 于是存在 $q\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 和 $i,m\in\mathbb{N}$, 使 $\{p\}\cup\{p_k: k\geq i\}\subset B(q,1/m)\cap X\subset U$, 从而 $\{p_k: k\geq i\}\subset B(q,1/m)\cap S\subset U$. 因此, $\mathscr{P}$ 是 X 中的 wcs^* 网络. 由定理 2.1.10 可知, $\mathscr{P}$ 是 X 的 Pytkeev 网络. 证毕.

空间 (X,τ) 的**邻域指派**是一个函数 $\varphi: X\to\tau$ 满足 $x\in\varphi(x)$ $(\forall x\in X)$. 拓扑空间 X 称为 **D 空间** [29], 如果对 X 的每一邻域指派 φ, 存在 X 的闭离散集 D 使得 $\{\varphi(d): d\in D\}$ 覆盖 X. 拓扑空间 X 称为**遗传 D 空间**, 若 X 的任意子空间是 D 空间.

2010年, 彭良雪证明了下述结果.

引理 2.2.8 *[90, 推论 18] 设集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数集族. 如果对 X 的任意非闭子集 A, 存在 $x\in\overline{A}\setminus A$, 使得对 x 的任意领域 U, 有 $P\in\mathscr{P}$ 满足 $x\in P\subset U$ 且 $P\cap A\neq\emptyset$, 则 X 是 D 空间.*

由引理 2.2.8 可得下述结果.

定理 2.2.9 *具有点可数 cn 网络的空间是遗传 D 空间.*

证明 方法一: 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 cn 网络. 因为点可数 cn 网络具有遗传性, 所以我们只需要证明 X 是 D 空间即可. 由引理 2.1.12 可知, X 满足引理 2.2.8 的条件, 所以 X 是遗传 D 空间.

事实上, 我们在此可给出一个直接的证明.

方法二: 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 cn 网络. 因为点可数 cn 网络具有遗传性, 所以我们只需要证明 X 是 D 空间即可. 记 φ 是 X 的邻域指派. 对于每一 $x\in X$, 记 $\{P\in\mathscr{P}: x\in P\}$ 为 $(\mathscr{P})_x$, 同时令

$$\mathscr{P}_x=\{P\in(\mathscr{P})_x: \text{ 存在 } z\in X \text{ 使得 } z\in P\subset\varphi(z)\},$$
$$C(x)=\bigcup\{c(P): P\in\mathscr{P}_x\},$$

其中对任意的 $P\in\mathscr{P}_x$, $c(P)=\{z\in P: P\subset\varphi(z)\}$. 把可数集 $\mathscr{P}_x$ 良序化. 下面由超限递归确定一个序数 μ 及可数集之族 $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mu}$, 并证明 $\bigcup_{\alpha<\mu}A_\alpha$ 是 X 中的闭离散集.

置 $A_0=\emptyset$. 对于序数 β, 假设对于每一序数 $\alpha<\beta$ 已经定义了可数子集 $A_\alpha\subset X$, 记 $O_\alpha=\bigcup_{x\in A_\alpha}\varphi(x)$. 如果 $\bigcup_{\alpha<\beta}O_\alpha=X$, 则归纳完成并取 $\mu=\beta$. 如果 $\bigcup_{\alpha<\beta}O_\alpha\neq X$, 依如下方式定义 A_β.

取定 $z_\beta\in X\setminus\bigcup_{\alpha<\beta}O_\alpha$. 令 $F_0^\beta=\{z_\beta\}$. 归纳构造 X 的递增的有限子集列 $\{F_n^\beta\}_{n\in\omega}$. 假定已经定义了 F_n^β. 对于每一 $x\in F_n^\beta$, 令

$$R(x)=\Big(C(x)\setminus\bigcup_{s\in F_n^\beta}\varphi(s)\Big)\setminus\bigcup_{\alpha<\beta}O_\alpha,\quad E_n^\beta=\{x\in F_n^\beta:R(x)\neq\emptyset\}.$$

若 $E_n^\beta=\emptyset$, 则令 $F_{n+1}^\beta=F_n^\beta$. 如果 $E_n^\beta\neq\emptyset$, 则对于每一 $x\in E_n^\beta$, 由于 $R(x)\neq\emptyset$, 存在 $z\in R(x)$ 及 $P\in\mathscr{P}_x$ 使得 $z\in R(x)\cap c(P)$, 于是可以令

$$k(x,n)=\min\{n,|\{P\in\mathscr{P}_x:R(x)\cap c(P)\neq\emptyset\}|\}.$$

记良序集 $\mathscr{P}_x$ 中最初的 $k(x,n)$ 个使得 $R(x)\cap c(P)\neq\emptyset$ 的元 P 为 $\{P_{x,i}\}_{i\leq k(x,n)}$. 对于每一 $i\leq k(x,n)$, 取定 $z(x,i)\in R(x)\cap c(P_{x,i})$. 再令

$$F_{n+1}^\beta=F_n^\beta\cup\{z(x,i):x\in E_n^\beta,1\leq i\leq k(x,n)\}.$$

由此, 完成了序列 $\{F_n^\beta\}_{n\in\omega}$ 的构造. 现在, 定义 $A_\beta=\bigcup_{n\in\omega}F_n^\beta$.

上述超限递归的构造过程表明: 存在序数 μ, 以及 X 的可数集之族 $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ 满足 $\bigcup_{\alpha<\mu}O_\alpha=X$, 其中 $O_\alpha=\bigcup_{x\in A_\alpha}\varphi(x)$. 由集列 $\{F_n^\beta\}_{n\in\omega}$ 的构造, 易见

(1) 如果 $\beta\leq\gamma<\mu$ 且 $0\leq n<k<\omega$, 则

$$\Big(\bigcup_{\alpha<\beta}O_\alpha\Big)\cap F_n^\gamma=\emptyset \text{ and } \Big(\bigcup_{s\in F_n^\beta}\varphi(s)\Big)\cap(F_k^\beta\setminus F_n^\beta)=\emptyset.$$

(2) 如果 $x\in A_\beta$, 则 $C(x)\subset\bigcup_{\alpha\leq\beta}O_\alpha$.

最后只需证 $D=\bigcup_{\alpha<\mu}A_\alpha$ 是 X 的闭离散子集.

设 E 是 D 的任意子集. 如果 E 不是 X 中闭集, 则存在 $y\in\overline{E}\setminus E$. 记 $\gamma=\min\{\delta<\mu:y\in O_\delta=\bigcup_{x\in A_\delta}\varphi(x)\}$. 从而存在 $z\in A_\gamma=\bigcup_{n\in\omega}F_n^\gamma$ 使得 $y\in\varphi(z)$. 于是可以选取最小的 $m\in\omega$ 满足 $z\in F_m^\gamma$ 且 $y\in\varphi(z)$. 由于 F_m^γ 是有限集, 则 $\varphi(y)\cap\varphi(z)\setminus(F_m^\gamma\setminus\{y\})$ 是 y 的邻域. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络, 由引理 2.1.12 可知, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 和 $y'\in P\cap E$ 使得

$$\{y,y'\}\subset P\subset\varphi(y)\cap\varphi(z)\setminus(F_m^\gamma\setminus\{y\}).$$

因此 $y' \notin F_m^\gamma$, $P \in \mathscr{P}_{y'}$ 且 $y \in c(P) \subset C(y')$. 当 $\gamma' > \gamma$, 由 (1), 有 $(\bigcup_{\alpha<\gamma} O_\alpha) \cap F_n^{\gamma'} = \emptyset$. 由于 $y' \in \varphi(z) \subset O_\gamma$, 则 $y' \notin A_{\gamma'}$. 对于任意的 $k \in \omega$, 若 $k \leq m$, 则有 $y' \notin F_m^\gamma$ 和 $F_k^\gamma \subset F_m^\gamma$; 若 $k > m$, 因为 $y' \in \varphi(z)$ 和 $z \in F_m^\gamma$, 由 (1), 则有 $y' \notin F_k^\gamma \setminus F_m^\gamma$, 从而有 $y' \notin F_k^\gamma$. 因此 $y' \notin A_\gamma$. 又因为 $y' \in E \subset D = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$, 所以存在 $\beta < \gamma$ 满足 $y' \in A_\beta$. 由 (2), $C(y') \subset \bigcup_{\alpha\leq\beta} O_\alpha$. 则有 $y \in \bigcup_{\alpha\leq\beta} O_\alpha$. 这与 $y \in O_\gamma$ 及 γ 的最小性相矛盾. 从而说明 D 是 X 中的闭离散集.

显然, $X = \bigcup_{d\in D} \varphi(x)$. 因此, X 是遗传 D 空间. 证毕.

因为可数紧的 D 空间是紧空间 [23, 命题 1.4], 所以由定理 2.2.9 可得下述推论.

推论 2.2.10 *具有点可数 cn 网络的可数紧空间是紧空间.*

由图 1 可知, strict Pytkeev 网络是 cn 网络, 所以有下述推论.

推论 2.2.11 *具有点可数 strict Pytkeev 网络的空间是遗传 D 空间.*

注 2.2.12 *由定理 2.1.10 可知, 问题 0.0.5 等价于具有点可数 Pytkeev 网络的序列空间是否是 D 空间? 所以, 推论 2.2.11 部分回答了问题 0.0.5.*

定义 2.2.13 *拓扑空间 X 称为***单调正规空间** *[54, 定义 2.1], 如果对 X 的每一对不相交闭子集 (H, K), 可使对应着开集 $D(H, K)$ 满足:*

(1) $H \subset D(H, K) \subset \overline{D(H, K)} \subset X \setminus K$;

(2) 如 $H \subset H'$, $K' \subset K$, (H', K') 是不相交的闭集, 则 $D(H, K) \subset D(H', K')$.

*此对应函数 D 称为 X 上的***单调正规算子***.*

众所周知, 单调正规的 D 空间是仿紧空间 [23, 定理 17]. 而由推论 2.2.11 可知, 具有点可数 strict Pytkeev 网络的正规空间是 D 空间. 此外, 若正规的 $\aleph$ 空间 X 是k 空间, 则 X 是仿紧空间 [37], 所以下列问题的提出是自然的.

问题 2.2.14 *正规的 $\mathfrak{P}$ 空间是仿紧空间吗?*

§2.3 映射性质

本小节主要讨论具有特定 (strict) Pytkeev 网络空间的映射性质, 证明了闭映射和有限到一伪开映射保持 Pytkeev 网络, 以及伪开映射保持 cn 网络, 并更进一步地说明了闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间. 同时, 给出几个例子说明某些具有特定 Pytkeev 网络的空间不能被一些映射保持.

定理 2.3.1 *闭映射保持(stric) Pytkeev 网络.*

证明 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 (strict) Pytkeev 网络, $f: X \to Y$ 是闭映射. 任取 Y 中的点 y 及 Y 中以 y 为聚点的子集 A. 给定 y 的开邻域 $O \subset Y$, 若存在 $P \in \mathscr{P}$ 满足 $(y \in) f(P) \subset O$ 且 $f(P) \cap A$ 是无限集, 则命题得证.

对任意的 $z \in A \setminus \{y\}$, 选取 $x_z \in f^{-1}(z)$. 记 $B = \{x_z : z \in A \setminus \{y\}\}$, 则 $f(B) = A \setminus \{y\}$. 因为 f 是闭映射, 所以 $y \in \overline{A \setminus \{y\}} = f(\overline{B})$, 从而存在 $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{B}$ 满足 $f(x) = y$ 且 $x \notin B$. 于是 x 是 B 的聚点. 显然存在 x 的邻域 V 满足 $f(V) \subset O$. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 (strict) Pytkeev 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $(x \in) P \subset V$ 且 $P \cap B$ 是无限集. 于是有

$$(y \in) f(P) \subset f(V) \subset O \text{ 且 } f(P) \cap A \text{ 是无限集.}$$

所以 $\{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 X 的 (strict) Pytkeev 网络. 证毕.

空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为**局部有限的** [24, p. 349], 如果对每一 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 仅与 $\mathscr{P}$ 中有限多个元相交.

推论 2.3.2 *完备映射保持具有 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络的空间.*

证明 设 $f: X \to Y$ 是完备映射, 集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络. 由定理 2.3.1 可知, 集族 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 (strict) Pytkeev 网络. 由于完备映射保持局部有限集族 [32, 引理 3.10.11], 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 中的 σ 局部有限集族. 即 Y 有 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络. 证毕.

由定理 2.3.1 可得如下推论.

推论 2.3.3 *可数到一闭映射保持具有点可数 strict Pytkeev 网络的空间.*

证明 设 $f:X\to Y$ 是可数到一闭映射, $\mathscr{P}$ 是 X 的 strict Pytkeev 网络. 由定理 2.3.1 可知, $\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$ 是 Y 的 strict Pytkeev 网络. 由于 f 是可数到一映射, 则 $\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$ X 中的点可数集族, 所以 $\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$ 是 Y 的点可数 strict Pytkeev 网络. 证毕.

单位闭区间 $\mathbb{I}$ 中的不可数子集 B 称为 $\mathbb{I}$ 中的 **Bernstein 集** [32, p. 339], 若 B 及 $\mathbb{I}\setminus B$ 关于欧氏拓扑的闭子集都是可数集. 设 B 是 $\mathbb{I}$ 中的 Bernstein 集, 集族 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{I}$ 通常拓扑上的可数基. $\mathbb{I}_B$ 表示集 $\mathbb{I}$ 赋予关于 B 的 **Michael 直线拓扑** [77]: $\mathbb{I}$ 的子集 G 是 $\mathbb{I}_B$ 的开集当且仅当存在 $\mathbb{I}$ 关于欧氏拓扑的开集 U 和 B 的子集 D 使得 $G=U\cup D$. 容易验证, $\mathbb{I}_B$ 有下述性质.

引理 2.3.4 *[67, 例 2.3.12] 设 $\mathbb{I}_B$ 是 Michael 直线, $C=\mathbb{I}\setminus B$, 则有*

(1) $\mathbb{I}_B$ 是具有点可数基的遗传仿紧空间.

(2) $\mathbb{I}\setminus B$ 是 $\mathbb{I}_B$ 的闭可分子集.

(3) 对 B 的任意不可数子集 A, 有 $\overline{A}\not\subseteq B$.

下面的例 2.3.5 说明推论 2.3.3 中的条件“ 任意的 $f^{-1}(y)$ 是可数的” 不能替换为“ 任意的 $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的”.

例 2.3.5 闭 *Lindelöf* 映射不保持具有点可数 *strict Pytkeev* 网络的空间.

证明 记单位闭区间 [0, 1] 为 $\mathbb{I}$ 且赋予其通常拓扑, B 是 $\mathbb{I}$ 中的 Bernstein 集. $\mathbb{I}_B$ 表示集 $\mathbb{I}$ 赋予的关于 B 的 Michael 直线拓扑.

记

$$\mathbb{S}_1=\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{N}\}.$$

令

$$X=\mathbb{I}_B\times\mathbb{S}_1,\quad A=\mathbb{I}_B\times\{0\},\quad Y=X/A.$$

则 A 是 X 的闭子空间. 令 $q:X\to Y$ 是自然商映射, 则 q 是闭映射. 由引理 2.3.4 (1) 知, X 是具有点可数基的正则 Lindelöf 空间. Y 不具有点可数 cs^* 网络 [98, 定理 2.4]. 所以, X 具有点可数 strict Pytkeev 网络, 且由图 1 可知 Y 没有点可数 strict Pytkeev 网络. 从而说明了闭 Lindelöf 映射不保持具有点可数 strict Pytkeev 网络的空间. 证毕.

众所周知, 闭映射不保持具有点可数 k 网络的空间 [97, 例 1], 完备映射不保持具有点可数 cs^* 网络的空间 [71, 例3.1.20(8)]. 那么闭映射是否保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间呢? 下述定理给此问题以肯定回答.

定理 2.3.6 *闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间.*

证明 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 Pytkeev 网络, $f: X \to Y$ 是闭映射. 对任意的 $y \in Y$, 选取 $x_y \in f^{-1}(y)$. 记 $Q = \{x_y : y \in Y\}$. 令 $\mathscr{Q} = \{f(P \cap Q) : P \in \mathscr{P}\}$. 如果存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $y \in f(P \cap Q)$, 则 $f^{-1}(y) \cap P \cap Q \neq \emptyset$, 即 $x_y \in P$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 中的点可数集族, 集族 $\mathscr{Q}$ 在 Y 中也是点可数的. 因此只需证集族 $\mathscr{Q}$ 是 Y 的 Pytkeev 网络.

任取 Y 中以 $y \in Y$ 为聚点的子集 A 及 y 的任一开邻域 O 满足 $y \in O \subset Y$. 记 $B = \{x_z : z \in A \setminus \{y\}\}$. 由定理 2.3.1 的证明过程可知, 存在 $x \in f^{-1}(y) \cap (\overline{B} \setminus B)$ 及 x 的邻域 V 使得 $f(V) \subset O$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 Pytkeev 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset V$ 且 $P \cap B$ 是无限集. 从而有

$$f(P \cap Q) \subset f(P) \subset f(V) \subset O$$

且

$$f(P \cap B) \cap A \subset f(P \cap Q) \cap A \text{ 是无限集.}$$

于是 $\mathscr{Q}$ 是 Y 的 Pytkeev 网络. 证毕.

1994 年, 林寿和 Y. Tanaka [69] 证明了: 闭映射保持具有点可数 k 网络的 k 空间. 事实上, 利用本节所介绍的 Pytkeev 网络, 同样可以得到此结果, 见下述推论.

推论 2.3.7 *[69, 定理 5] 闭映射保持具有点可数 (拟 k) k 网络的 k 空间.*

证明 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 空间 X 是具有点可数 k 网络 (拟 k 网络) 的 k 空间. 因为商映射保持 k 空间 [32, 定理 3.3.23], 所以空间 Y 是 k 空间. 由引理 2.1.5 和 定理 2.3.6, 空间 Y 有点可数 Pytkeev 网络. 由定理 2.1.1 可知, Y 具有点可数的 (拟) k 网络. 证毕.

定理 2.3.8 *有限到一伪开映射保持 (strict) Pytkeev 网络.*

证明 设集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 (strict) Pytkeev 网络, $f: X \to Y$ 是有限到一伪开映射. 任取 Y 中的点 y 及 Y 中以 y 为聚点的子集 A. 显然, $y \in \overline{A \setminus \{y\}}$.

断言. $f^{-1}(y) \bigcap \overline{f^{-1}(A \setminus \{y\})} \neq \emptyset$.

假设不成立, 则有 $f^{-1}(y) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(A \setminus \{y\})}$. 因为 f 是伪开映射, 所以有 $y \in f(X \setminus \overline{f^{-1}(A \setminus \{y\})})^{\circ} \subset Y \setminus \overline{A \setminus \{y\}}$, 矛盾.

取定 $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A \setminus \{y\})}$. 对 y 的任意开邻域 $O \subset Y$, 显然存在 x 的开领域 V 使得 $f(V) \subset O$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 (strict) Pytkeev 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 满足 $(x \in)P \subset V$ 和 $P \cap f^{-1}(A \setminus \{y\})$ 是无限集. 又因为 f 是有限到一映射, 所以 $f(P) \cap (A \setminus \{y\})$ 是无限集且 $(y \in)f(P) \subset O$. 从而说明 $\{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 (strict) Pytkeev 网络. 证毕.

由有限到一映射的定义可知, 有限到一映射保持点可数集族, 所以下述推论是显然的.

推论 2.3.9 有限到一伪开映射保持具有点可数 *(strict) Pytkeev* 网络的空间.

定理 2.3.10 伪开映射保持 cn 网络.

证明 设集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络, $f : X \to Y$ 是伪开映射. 下证 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 中的 cn 网络.

对任意的 $y \in Y$ 及 y 的任一邻域 U, 记

$$W = \bigcup \{f(P) \in f(\mathscr{P}) : y \in f(P) \subset U\}.$$

对任意的 $x \in f^{-1}(y)$, 记

$$V_x = \bigcup \{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset f^{-1}(U)\}.$$

对任意的 $x \in f^{-1}(y)$ 显然有 $f(V_x) \subset W$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cn 网络, 所以有 $x \in V_x^{\circ}$. 于是 $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V_x^{\circ}$. 又因为 f 是伪开映射, 所以有

$$y \in f(\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V_x^{\circ})^{\circ} \subset f(\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V_x) \subset W.$$

因此, W 是 Y 中 y 的邻域.

于是有 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 cn 网络. 证毕.

设集族 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖, 称 X **关于** $\mathscr{P}$ **具有弱拓扑**, 或称 X **由** $\mathscr{P}$ **所确定** [51, p. 303], 如果 X 中的任意子集 U 是开 (闭) 的当且仅当对任意的 $P \in \mathscr{P}$, $U \cap P$ 是 P 中的开 (闭) 集.

引理 2.3.11 *[51, 引理 1.8] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖, $Z=\bigoplus\mathscr{P}$. 令 $f:Z\to X$ 是自然映射. f 是商映射当且仅当 X 关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑.*

下面的例子表明, 推论 2.3.9 和定理 2.3.10 中的条件"伪开映射"不能替换成"商映射".

例 2.3.12 *有限到一商映射不保持具有点可数 strict Pytkeev 网络 (cn 网络) 的空间.*

证明 定义
$$X=\mathbb{I}\times\mathbb{S}_1,\ Y=\mathbb{I}\times(\mathbb{S}_1\setminus\{0\}).$$
赋予 X 下述拓扑 [51, 例 9.3]: Y 作为 X 的子空间具有欧氏拓扑. $(t,0)\in X$ 的邻域基元形如
$$\{(t,0)\}\cup\bigcup\{V(t,k):k\geq n\},\quad n\in\mathbb{N},$$
其中 $V(t,k)$ 是 $(t,1/k)$ 在子空间 $\mathbb{I}\times\{1/k\}$ 的开邻域.

令
$$M=(\bigoplus\{\mathbb{I}\times\{1/n\}:n\in\mathbb{N}\})\oplus(\bigoplus\{\{t\}\times\mathbb{S}_1:t\in\mathbb{I}\}).$$
那么 M 是局部紧的可度量空间, 因此 M 有点可数的 strict Pytkeev 网络 (cn 网络).

令 $f:M\to X$ 是自然映射. 因为 X 关于点有限覆盖 $\{\mathbb{I}\times\{1/n\}:n\in\mathbb{N}\}\bigcup\{\{t\}\times\mathbb{S}_1:t\in\mathbb{I}\}$ 具有弱拓扑, 由引理 2.3.11, f 是有限到一商映射.

易验证, X 是可分正则空间. 因为 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 是不可数的闭离散子空间, 所以 X 不是 Lindelöf 空间, 从而 X 不是亚 Lindelöf 空间. 由推论 2.2.3 (定理 2.2.1), X 没有点可数的 strict Pytkeev 网络 (cn 网络).

同时, 因为 X 是度量空间的有限到一商映像, 所以 X 是具有点可数 cs^* 网络的序列空间 [105, 引理 2.2]. 证毕.

下述例 2.3.13 表明, 推论 2.3.9 中的条件"有限到一映射"不能替换成"可数到一映射".

例 2.3.13 *[107, 例 1] 可数到一开映射不保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间.*

证明 设 $X = \{0\} \cup \{(n,k) : n,k \in \mathbb{N}\})$, p 为 $\mathbb{N}$ 上的一个极大滤子. 以 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 内的全体函数构成的集合. 对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$, 记

$$V(n,m) = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 : k \geq m\}.$$

对任意的 $F \subset \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 记

$$H(F,f) = \bigcup \{V(n, f(n)) : n \in F\}.$$

对任意的 $x \in X$, 定义 X 上的拓扑为：若 $x \in X \setminus \{0\}$, 则 $\{x\}$ 是 X 中开集; 若 $x = 0$, 则 x 的邻域基为 $\mathscr{U}_x = \{\{0\} \cup H(F,f) : F \in p, f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

对任意的 $i, k \in \mathbb{N}$, 记

$$P_{i,k} = \{(i,m) \in \mathbb{N}^2 : m \geq k\} \text{ 及 } \mathscr{P} = \{P_{i,k} : i,k \in \mathbb{N}\}.$$

显然, $\mathscr{P}$ 是 0 点的可数 Pytkeev 网络. 即 X 有可数 Pytkeev 网络.

令 $Y = \mathbb{N} \cup \{p\}$, 其中 $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. 集合 Y 赋予 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑. 因为 Y 在点 p 处没有可数 Pytkeev 网络 [11, 例 1.11], 所以可知 Y 不具有强 Pytkeev 性质.

定义映射 $f : X \to Y$ 如下: $f(0) = p$; 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $f(\{(n,k) : k \in \mathbb{N}\}) = \{n\}$. 显然, f 是可数到一映射.

下证 f 是开映射.

对任意的 $U \in \tau(X)$, 若 $0 \notin U$, 则有 $f(U) \subset \mathbb{N}$, 由于 $\mathbb{N}$ 是离散的, 所以有 $f(U) \in \tau(Y)$; 若 $0 \in U$, 则存在 $F = \{n_i : i \in \mathbb{N}\} \in p$ 及 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 满足 $\{0\} \cup H(F,f) \subset U$, 所以 $\{p\} \cup F \subset f(U)$, 于是有 $f(U) \in \tau(Y)$. 因此 f 是开映射. 证毕.

因为完备映射是闭映射, 闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间, 所以下述问题的提出是很自然的.

问题 2.3.14 完备映射是否保持具有点可数 *strict Pytkeev* 网络的空间?

第三章　具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络

在上一章, 我们介绍了 Pytkeev 网络的概念, 并讨论了其相关性质. 事实上, 2010 年, A.V. Arhangel'skiĭ 在一篇关于 Fréchet-Urysohn 空间和收敛性质的研究报告中介绍和讨论了 sensitive 族 [4]. 按照 A.V. Arhangel'skiĭ 的术语, Pytkeev 网络就是具有 sensitive 的网络. 2011 年, A.V. Arhangel'skiĭ [5] 又进一步提出了 sensor 的概念, 并证明了正则伪紧空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像 [5, 定理 2.13]. 那么, 如果正则伪紧空间是度量空间的商 s 映像, 是否具有点可数基呢 [67, 问题 2.2.12]? 因为度量空间的商 s 映像等价于具有点可数 cs^* 网络的序列空间 [71, 推论 2.7.5], 于是有了下述问题 (即问题 0.0.7)：设正则空间 X 是伪紧的序列空间. 如果 X 具有点可数 cs^* 网络, 则 X 是否有点可数基?

在本章, 我们结合 Pytkeev 网络和 sensor 族的概念, 提出了具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络 (简称: sp 网络) 这一复合概念, 围绕问题 0.0.1、问题 0.0.6 和问题 0.0.7, 系统讨论具有特定 sp 网络的空间的性质以及它们与各种广义度量空间类之间的联系, 回答或部分回答相关问题.

§3.1　sp 网络

在本节, 我们主要介绍 sp 网络的概念, 讨论 sp 网络与 (strict) Pytkeev 网络、k 网络、cs^* 网络、wcs^* 网络等网络之间的关系, 并举例说明在一些特定的空间中, 某些网络不能相互转化, 同时还讨论了与具有特定 sp 网络空间相关的映射性质.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{S}$ 在 $H \subset X$ 中称为 **sensor** [5, p. 217], 若对 H 在 X 中的任意开邻域 $O(H)$ 及 X 中满足 $H \cap \overline{A} \neq \varnothing$ 的子集 A, 都存在 $P \in \mathscr{S}$ 使得 $P \subset O(H)$ 且 $H \cap \overline{A \cap P} \neq \varnothing$.

类似地, $\mathscr{S}$ 称为**在点 x 处 sensor**, 如果对 x 的邻域 U 及 X 中满足 $x \in \overline{A}$ 的子集 A, 都存在 $P \in \mathscr{S}$ 使得 $P \subset U$ 且 $x \in \overline{A \cap P}$.

根据上述有关 sensor 族的定义, 结合上一章节中 Pytkeev 网络的概念, 我们提出了一个新的复合概念.

定义 3.1.1 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的**具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络** *(简称: sp* **网络**), 如果对 $x \in \overline{A} \cap U$, 其中 U 是 X 的开集, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in P \subset U$ 且 $x \in \overline{P \cap A}$.

给定 $x \in X$, $\mathscr{P}$ 称为 X **中点** x **处的** *sp* **网络**, 如果 $\mathscr{P}$ 在点 x 处满足上面提到的条件.

注 3.1.2 我们可以称定义 *3.1.1* 中的概念为*"strict sensor"*, 但是我们认为"具有 *sensor* 的 *strict Pytkeev* 网络" 更为贴切一点. 不过"具有 *sensor* 的 *strict Pytkeev* 网络"这个称呼有点长, 不利于书写, 所以我们需要给出一个简称. 我们很自然的想到可以简称为 *"sps* 网络" 或者 *"ssp* 网络". 不过为了简单起见, 我们选取了 *"sp* 网络" 来称呼 "具有 *sensor* 的 *strict Pytkeev* 网络". 直观上来说, *"sp* 网络" 作为 *strict Pytkeev* 网络简称更为合适一点.

事实上, *S.S. Gabriyelyan, J. Kąkol* 在 *[43,* 定义 *1.1]* 引入了 *cp* 网络的概念. 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 中 x 处的 *cp* 网络, 若 x 是孤立点, 则 $\{x\} \in \mathscr{P}$; 若 x 不是孤立点, 则对 X 中任意满足 $x \in \overline{A} \setminus A$ 的子集 A 及 x 的任意邻域 U, 都存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \cap A$ 是无限集且 $x \in P \subset U$. 易证在 T_1 空间中, 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 *strict Pytkeev* 网络当且仅当 $\mathscr{P}$ 是 X 的 *cp* 网络. 因此, 在 T_1 空间中 *strict Pytkeev* 网络可以简称为 *cp* 网络.

综上考虑, 我们最终选取了 *"sp* 网络" 来称呼 "具有 *sensor* 的 *strict Pytkeev* 网络".

显然, 拓扑空间中的基是 *sp* 网络; *sp* 网络是 strict Pytkeev 网络 (*cp* 网络). 那么, 逆命题是否成立? 或者在什么情况下逆命题成立呢? 由下述引理 3.1.3 可知, Fréchet-Urysohn 空间中的 strict Pytkeev 网络是 *sp* 网络. 此结果推广了 T. Banakh 和 A. Leiderman 的结果: Fréchet-Urysohn 空间中的 cs^* 网络是 strict Pytkeev 网络 [15, 命题 1.8].

引理 3.1.3 *Fréchet-Urysohn* 空间中的 cs^* 网络是 *sp* 网络.

证明 设 X 是 Fréchet-Urysohn 空间, 集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 网络. 给定 $x \in O \cap \overline{A}$, 其中 O 是 X 中的开子集. 因 X 是 Fréchet-Urysohn 空间, 则存在 A 中的收敛序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的某子列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 终于 P 且 $x \in P \subset U$. 因此 $x \in \overline{P \cap A}$. 于是, 集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 *sp* 网络. 证毕.

注 3.1.4 引理 *3.1.3* 中的条件 *“cs* 网络”* 不能替换成 *“Pytkeev 网络”*, 见例 *3.2.8*.

下述例 3.1.6 说明引理 3.1.3 中的条件 “Fréchet-Urysohn 空间” 不能减弱为“序列空间”. 为此, 我们还需要下述引理.

引理 3.1.5 *[51, 推论 3.4]* 具有点可数 k 网络的 k 空间是序列空间.

例 3.1.6 *Arens* 空间 S_2.

(1) S_2 是具有可数 *strict Pytkeev* 网络的序列空间.

(2) S_2 不具有可数 *sp* 网络.

证明 令

$$X = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\},$$

其中所有的 x_n, $x_{n,m}$ 及 x 都是互不相同的. 在 X 上赋予下述拓扑称为 **Arens 空间** [32, 例 1.6.19]: 所有的 $x_{n,m}$ 都是 X 的孤立点; 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 点 x_n 的邻域基元形如 $\{x_n\} \cup \{x_{n,m} : m > k\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}$; 点 x 的邻域基元形如 $\{x\} \cup \bigcup_{n \geq k} V_n$, $k \in \mathbb{N}$, 其中 V_n 是 x_n 的邻域 (1950 年 R. Arens 构造了这空间). Arens 空间简记为 S_2.

易验证, S_2 是具有可数 cs^* 网络的序列空间且不是 Fréchet-Urysohn 空间 [71, 例 1.8.6]. 因此, 由定理 2.1.10 可知 X 具有可数 Pytkeev 网络, 即 X 有可数 strict Pytkeev 网络 [11, p. 152].

下证, X 在点 x 处没有可数 *sp* 网络.

如果有, 那么我们可设 $\mathscr{F}$ 是 x 处的可数 *sp* 网络. 记

$$X_0 = \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\},\ \mathscr{F}' = \{F \in \mathscr{F} : x \in \overline{F \cap X_0}\}.$$

若 $F \in \mathscr{F}'$, 则 $\{n \in \mathbb{N} : x_{n,m} \in F, m \in \mathbb{N}\}$ 是无限集. 因此, 对任意的 $F \in \mathscr{F}'$, 存在 X_0 的子集 C 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$|C \cap \{x_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}| \leq 1 \ \text{ 且 } \ |C \cap F| = 1.$$

因为 $x \in (X \setminus C) \cap \overline{X_0}$ 且 C 是 X 中的闭子集, 所以存在集 $F \in \mathscr{F}$ 使得

$$x \in F \subset X \setminus C \text{ 且 } x \in \overline{F \cap X_0},$$

矛盾.

所以, X 在点 x 处没有可数 *sp* 网络, 即 X 不具有强 Pytkeev 性质. 证毕.

例 3.1.7 *存在一个紧空间 X 上的 sp 网络, 使其不是 k 网络.*

证明 设空间 $X=[0,\omega_1]$, 并赋予 X 序拓扑. 取 $\mathscr{P}$ 为例 2.1.3 中的 Pytkeev 网络, 则可知 $\mathscr{P}$ 不是 k 网络.

下证 $\mathscr{P}$ 是 X 的 sp 网络.

给定 $x\in U\cap\overline{A}$, 其中 A 是 X 的子集, U 是开集. 不失一般性, 我们可假设 $x=\omega_1\in\overline{A}\setminus A$, 则存在一个序数 $\alpha<\omega_1$ 使得 $(\alpha,\omega_1]\subset U$. 因为 x 是 A 的聚点, 所以 $A\cap(\alpha,\omega_1]$ 是不可数集. 由 $A\cap(\alpha,\omega_1]=\bigcup_{n<\omega}A\cap P_{\alpha,n}$ 可知, 存在 $n<\omega$ 使得 $A\cap P_{\alpha,n}$ 是不可数集. 于是有 $x\in\overline{A\cap P_{\alpha,n}}$ 且 $x\in P_{\alpha,n}\subset U$. 因此, $\mathscr{P}$ 是 X 的 sp 网络. 证毕.

事实上, 具有 sp 网络的空间其本身也具有良好的拓扑性质. 由 sp 网络的定义, 易得下述结果.

定理 3.1.8 *具有可数 sp 网络的空间的任一子空间也具有可数 sp 网络.*

定理 3.1.9 *设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族拓扑空间, 且 $|A|\le\omega$. 如果每一空间 X_α 都具有可数 sp 网络 $\mathscr{P}_\alpha$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{P}_\alpha$ 是 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的可数 sp 网络.*

上一章, 我们讨论了具有 Pytkeev 网络的空间的映射性质, 证明了有限到一的伪开映射保持 Pytkeev 网络. 事实上, sp 网络同样具有良好的映射性质.

定理 3.1.10 *伪开映射保持 sp 网络.*

证明 设集族 $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的 sp 网络, $f:X\to Y$ 是伪开映射. 给定 $y\in O\cap\overline{A}$, 其中 A 是 X 的子集, O 是开集.

断言. $f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}\neq\varnothing$.

否则, 则有 $f^{-1}(y)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}$. 因为 f 是伪开映射, 所以

$$y\in[f(X\setminus\overline{f^{-1}(A)})]^\circ\subset Y\setminus\overline{A},$$

矛盾. 于是, 存在点 $x\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}$ 及 x 的邻域 V 使得 $f(V)\subset O$. 由于集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 sp 网络, 所以存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$x\in P\subset V \text{ 且 } x\in\overline{P\cap f^{-1}(A)}.$$

于是有

$$y = f(x) \in f(\overline{P \cap f^{-1}(A)}) \subset \overline{f(P) \cap A}$$

且

$$y \in f(P) \subset O.$$

从而有 $\mathscr{Q} = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 sp 网络. 证毕.

下述推论是显然的.

推论 3.1.11 *伪开映射保持具有可数 sp 网络的空间.*

注 3.1.12 *商映射不保持 sp 网络, 见例 3.2.9.*

§3.2 具有点可数 sp 网络的空间

在本节, 我们主要讨论具有点可数 sp 网络的空间所具有的拓扑性质, 证明了拓扑空间 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像, 还说明了具有点可数 sp 网络的正则 feebly 紧空间有点可数基, 此结果部分回答了问题 0.0.7.

众所周知, 具有某些特定点可数网络的空间可以表示为度量空间的某种 s 映像 [71]. 如下述引理.

引理 3.2.1 *[71, 定理 2.7.17] 拓扑空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的开 s 映像.*

引理 3.2.2 *[71, 推论 2.7.5] 拓扑空间 X 是具有点可数 cs^* 网络的序列空间当且仅当 X 是度量空间的商 s 映像.*

下面的定理 3.2.4, 我们得到了具有点可数 sp 网络的空间与度量空间的伪开 s 映像之间的一些关系. 为此, 我们还需要回顾一些概念.

拓扑空间 X 称为**序列扇** [8, p. 316], 如果 X 是把 ω 个非平凡收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. 一般地, 序列扇记为 S_ω. 关于 S_ω, 有下述经典结果.

引理 3.2.3 *[65, 推论 2.13 和 3.9]* 设拓扑空间 X 是具有点可数 k 网络的 k 空间, 那么

(1) X 是 *Fréchet-Urysohn* 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(2) X 是第一可数空间当且仅当 X 不含闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

定理 3.2.4 对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间.

(2) X 是具有点可数 cs^* 网络的 *Fréchet-Urysohn* 空间.

(3) X 是度量空间的伪开 s 映像.

证明　已知 (2) $\Leftrightarrow$ (3) [71, 推论 2.7.5]. 由引理 3.1.3 可知 (2) $\Rightarrow$ (1). 因此我们只需证: (1) $\Rightarrow$ (2). 设 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间. 显然, X 具有点可数的 cs^* 网络. 由例 3.1.6 可知, X 不含闭子空间同胚于 S_2. 再由定理 2.1.1 和引理 3.2.3(1) 可知, X 是 Fréchet-Urysohn 空间. 证毕.

前面我们已经介绍过, 具有可数 sp 网络的空间其子空间同样具有可数 sp 网络, 以及可数个具有可数 sp 网络的空间其拓扑和仍然具有可数 sp 网络. 这些性质和 Pytkeev 网络一致, 但是具有可数 sp 网络的空间是否具有可数可乘性呢? 事实上, 下面的例 3.2.5 告诉我们, 有限可乘都无法保持具有可数 sp 网络的空间.

拓扑空间 X 称为 k_ω **空间** [40, p. 111], 如果 X 关于某一由紧子集组成的可数闭覆盖具有弱拓扑.

显然, k_ω 空间是 k 空间.

例 3.2.5 序列扇 S_ω.

(1) S_ω 是 *Fréchet-Urysohn* $\aleph_0$, k_ω 空间.

(2) S_ω 具有可数 sp 网络.

(3) $(S_\omega)^2$ 不具有点可数 sp 网络.

证明　由于 S_ω 是可分局部紧度量空间的闭映像, 则易证 S_ω 是正则的 Fréchet-Urysohn $\aleph_0$, k_ω 空间 [71, 例 1.8.7]. 再由推论 3.1.11 可知, S_ω 具有可数 sp 网络.

因为 S_ω 是 k_ω 空间, 所以 $(S_\omega)^2$ 也是 k_ω 空间 [40, p. 113], 即 $(S_\omega)^2$ 是 k 空间. 已知 $(S_\omega)^2$ 不是 Fréchet-Urysohn 空间 [71, 定理 2.5.24(2)]. 由定理 3.2.4, $(S_\omega)^2$ 不具有点可数的 sp 网络. 证毕.

定理 3.2.6 正则空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是 k 空间且 X^2 有点可数 sp 网络.

证明 必要性是显然的, 我们只需证明充分性. 设 X 是 k 空间且 X^2 有点可数的 sp 网络. 由于空间 X^2 有点可数的 sp 网络, 由例 3.1.6 和例 3.2.5 可知, X 不含闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 又因为 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间, 由引理 3.2.3 中的 (2) 可知 X 是第一可数空间. 再由引理 2.1.8 可知, X 有点可数基. 证毕.

在上一章, 我们证明了有限到一伪开映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间, 并举例说明可数到一的开映射不保持 Pytkeev 网络. 那么, 可数到一的开映射是否保持具有点可数 sp 网络的空间呢? 由下述定理可知, 具有点可数 sp 网络的空间有着更好的映射性质.

定理 3.2.7 可数到一的伪开映射保持具有点可数 sp 网络的空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是可数到一的伪开映射, 集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 sp 网络. 由定理 3.1.10 可知, $\{f(P): P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 sp 网络. 又因为 f 是可数到一映射, 所以 $\{f(P): P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 中的点可数集族, 即 $\{f(P): P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的点可数 sp 网络. 证毕.

在上一章, 我们证明了闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间. 那么, 闭映射是否保持具有点可数 sp 网络的空间呢? 由下面例子可知, 答案是否定的.

例 3.2.8 闭映射不保持具有点可数 sp 网络的空间.

证明 设 S_{ω_1} 是把 ω_1 个非平凡收敛序列的拓扑和中的非孤立点粘成一点所成的商空间. 显然, S_{ω_1} 是度量空间的闭映像. 因此, S_{ω_1} 是具有点可数 k 网络的 Fréchet-Urysohn 空间 [71, 定理 2.5.8]. 于是由引理 2.1.5 可知, S_{ω_1} 具有点可数 Pytkeev 网络. 而由 [71, 例 1.8.7] 可知 S_{ω_1} 没有点可数的 cs^* 网络, 因此 S_{ω_1} 没有点可数 sp 网络. 显然, S_{ω_1} 是具有点可数 sp 网络空间的闭映像. 证毕.

在上一章, 我们证明了有限到一商映射不保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间. 事实上, 有限到一商映射同样不保持具有点可数 sp 网络的空间.

例 3.2.9 有限到一商映射不保持具有点可数 sp 网络的空间.

证明 由例 2.3.12 可知, 存在一个局部紧的度量空间 M 及不具有点可数 Pytkeev 网络的空间 X, 同时存在有限到一的商映射 $f: M \to X$. 显然, M 具有点可数的 sp 网络, 然而 X 不具有点可数 sp 网络. 证毕.

空间 X 称为 **feebly 紧空间** [102, p. 482], 如果 X 的每一局部有限的开集族是有限的.

空间 X 称为**伪紧空间** [46], 如果 X 上的每一实值连续函数是有界的.

显然, 可数紧空间是 feebly 紧空间, feebly 紧空间是伪紧空间, 而完全正则的伪紧空间是 feebly 紧的. 由推论 2.1.4 可知, 具有点可数 Pytkeev 网络的正则可数紧空间有点可数基. 那么很自然的有下述问题: 具有点可数 sp 网络的正则 feebly 紧空间是否有点可数基呢?

引理 3.2.10 *设拓扑空间 X 是 feebly 紧的正则空间. 若 X 在点 $x \in X$ 处有可数 sp 网络, 则 X 在点 x 处有可数局部基.*

证明 取定 $x \in X$. 设 $\mathscr{P}_x$ 是 x 在 X 中的可数 sp 网络. 令

$$\mathscr{B}_x = \{\overline{\bigcup \mathscr{P}'} : \mathscr{P}' \in [\mathscr{P}_x]^{<\omega}\},$$

则 $\mathscr{B}_x$ 是可数的.

下证 $\{B \in \mathscr{B}_x : x \in B^\circ\}$ 是 x 在 X 中的局部基.

选取 x 的任一邻域 V. 记

$$\mathscr{Q} = \{\overline{P} \subset V : P \in \mathscr{P}_x\} = \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $B_n = \bigcup\{Q_i : i \leq n\}$. 那么 $x \in Q_n \subset B_n \subset V$ 且 $B_n \in \mathscr{B}_x$. 令 $A_n = X \setminus B_n$, 则 A_n 是 X 的开集. 再令

$$S = \{s \in X : \text{存在 } X \text{ 开集列 } \mathscr{W}_s = \{W_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ 满足:}$$

$$\mathscr{W}_s \text{ 在 } s \text{ 不是局部有限的, 且每一} W_i \subset A_i, s \notin \overline{W_i}\}.$$

断言1. 若 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则 $x \in \overline{S}$.

设 O 是点 x 的开邻域. 由 X 的正则性, 存在 x 的开邻域 G 使得 $x \in \overline{G} \subset O$. 因为 X 在 x 处有可数 sp 网络, 所以 X 在 x 处有可数 tightness [43, 命题 2.3]. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $x \in \overline{A_n}$, 故存在可数集 $D_n \subset A_n$ 使得 $x \in \overline{D_n}$. 因

为 $x \notin A_n$, 所以 D_n 是无限集. 记 $D_n = \{d_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$. 又因为 A_n 是开集, 于是我们可以选取出 X 的开集列 $\{W_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $x \notin \overline{W_{n,i}}$ 且 $d_{n,i} \in W_{n,i} \subset A_n$, 则有 $x \in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_{n,i}}$. 因此存在 $i(n) \in \mathbb{N}$ 使得 $G \cap W_{n,i(n)} \neq \varnothing$. 由于 X 是 feebly 紧的, 所以存在 $s \in X$ 使得开集族 $\{G \cap W_{n,i(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在点 s 处不是局部有限的. 于是有 $s \in S \cap \overline{G} \subset S \cap O$. 从而可知, $x \in \overline{S}$.

断言2. 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in B_n^\circ$.

假设不成立, 则有 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. 由断言 1, $x \in \overline{S}$. 因为 X 在点 x 处有可数 tightness, 所以存在集合 $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S$ 使得 $x \in \overline{\{s_n : n \in \mathbb{N}\}}$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 因为 $s_n \in S$, 所以存在 X 中的开集列 $\mathscr{H}_n = \{H_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 $\mathscr{H}_n$ 在点 s_n 处不是局部有限的, 且每一 $H_{n,i} \subset A_i$, $x \notin \overline{H_{n,i}}$. 记

$$H = \bigcup\{H_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, n \leq i\}.$$

设 U 是点 x 在 X 中的任一开邻域, 则存在 $s_n \in U$. 因为集族 $\mathscr{H}_n$ 在点 s_n 处不是局部有限的, 所以存在 $k \geq n$ 使得 $U \cap H_{n,k} \neq \varnothing$ 及 $U \cap H \neq \varnothing$. 于是有 $x \in \overline{H}$. 由于集族 $\mathscr{P}_x$ 是点 x 的 sp 网络, 则存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in \overline{Q_i \cap H}$. 又因为对任意的 $j \geq i$, 都有

$$B_i \cap H_{n,j} \subset B_i \cap A_i = \varnothing,$$

所以

$$x \in \overline{B_i \cap H} \subset \bigcup\{\overline{H_{n,j}} : n \leq j < i\},$$

矛盾.

综上所述, $\{B \in \mathscr{B}_x : x \in B^\circ\}$ 就是点 x 的可数局部基. 证毕.

由引理 3.2.10 和引理 3.1.5 可得下述结果.

定理 3.2.11 *设正则空间 X 是 feebly 紧空间. 如果 X 具有点可数的 sp 网络, 则 X 具有点可数基.*

由定理 3.2.4 和定理 3.2.11 可得下述推论.

推论 3.2.12 *[5] 如果映射 $f : X \to Y$ 是度量空间 X 到正则 feebly 紧空间 Y 的伪开 s 映射, 则空间 Y 有点可数基.*

引理 3.2.13 设拓扑空间 X 是可分的正则空间. 如果空间 X 具有点可数 sp 网络, 则 X 是 $\aleph_0$ 空间.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 sp 网络. 由 X 的正则性, 如果 $x \in U \cap \overline{A}$, 其中 U 是开集, A 是 X 的子集, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in P \subset \overline{P} \subset U$ 且 $x \in \overline{P \cap A}$. 设 D 是空间 X 的可数稠密子集, 记 $\mathscr{R} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}, P \cap D \neq \varnothing\}$.

下证: 集族 $\mathscr{R}$ 是空间 X 的 k 网络.

对 X 中任意开子集 U, 记 $\mathscr{R}_U = \{R \in \mathscr{R} : R \subset U\}$, 则有 $\mathscr{R}_U$ 覆盖 U. 事实上, 对任意的 $x \in U$, 都有 $x \in \overline{D}$, 所以存在集合 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in \overline{P} \subset U$ 且 $x \in \overline{P \cap D}$. 因此, $x \in \overline{P} \in \mathscr{R}_U$.

对于 X 的任意开子集 U 及紧子集 $K \subset U$. 记 $\mathscr{R}_U$ 为 $\{R_i : i \in \mathbb{N}\}$, 则 K 被 $\mathscr{R}_U$ 中的有限个元覆盖. 假若不是, 我们可以归纳选取出 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $x_n \in K \setminus \bigcup_{i\leq n} R_i$. 由定理 3.2.11 可知, K 是第一可数的, 所以 K 是序列紧的, 因此序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 且 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于点 $x \in K$. 又因为 $\mathscr{R}_U$ 覆盖 K, 则有 $x \in \bigcup_{i\leq n_1} R_i$. 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 由于

$$x_{n_k} \in \overline{D} \cap (U \setminus \bigcup_{i\leq n_k} R_i),$$

则存在 $P_k \in \mathscr{P}$ 使得

$$x_{n_k} \in \overline{P_k} \subset U \setminus \bigcup_{i\leq n_k} R_i$$

且

$$x_{n_k} \in \overline{D \cap P_k}.$$

从而对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 有 $x \in \overline{D \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k}$ 且 $x \notin \overline{P_k}$. 由于 $x \in U$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in \overline{P} \subset U$ 且 $x \in \overline{P \cap D \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k}$. 于是 $\overline{P} \in \mathscr{R}_U$, 则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 有 $\overline{P} = R_{i_0}$. 于是, 当 $k \geq i_0$ 时, 有

$$\overline{P_k} \subset X \setminus \bigcup_{i\leq n_k} R_i \subset X \setminus R_{i_0} = X \setminus \overline{P},$$

即 $P \cap P_k = \varnothing$. 因此,

$$x \in \overline{P \cap \bigcup_{k<i_0} P_k} \subset \bigcup_{k<i_0} \overline{P_k},$$

矛盾. 从而说明了 K 被 $\mathscr{R}_U$ 中有限个元覆盖. 即集族 $\mathscr{R}$ 是空间 X 的可数 k 网络, X 是 $\aleph_0$ 空间. 证毕.

定理 3.2.14 设正则空间 X 具有可分子集组成的点可数 sp 网络, 则 X 可以表示为 $\aleph_0$ 空间的拓扑和.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 sp 网络, 其中任意的 $P \in \mathscr{P}$, P 是 X 的可分子集. 由定理 2.2.1 可知, X 是亚 Lindelöf 空间. 对任意的 $x \in X$, 集合 $\bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$ 是 x 的邻域. 否则有 $x \in \overline{X \setminus \bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\}}$, 则存在 $P_0 \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in P_0$ 且 $x \in \overline{P_0 \cap (X \setminus \bigcup\{P \in \mathscr{P} : x \in P\})}$, 矛盾. 因此 X 是局部可分空间. 由 [51, 命题 8.7], X 是 Lindelöf 空间的拓扑和. 又因为局部可分的 Lindelöf 空间是可分的, 所以 X 是可分空间的拓扑和, 则由引理 3.2.13, X 是 $\aleph_0$ 空间的拓扑和. 证毕.

围绕引理 3.2.13, 提出下列问题是自然的.

问题 3.2.15 具有点可数 sp 网络的 $\aleph_0$ 空间是 $\mathfrak{P}_0$ 空间吗?

问题 3.2.16 怎么把具有点可数 sp 网络的空间刻画为度量空间的某种映像?

§3.3 具有 σ 闭包保持 sp 网络的空间

在本节, 我们主要讨论具有 σ 闭包保持 sp 网络空间的性质, 证明了拓扑空间 X 是层空间当且仅当 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间, 以及具有 σ 局部有限 sp 网络的正则空间具有 σ 离散 sp 网络.

设 $\mathscr{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的**闭包保持集族** [24, p. 350], 若对每一 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 都有 $\bigcup\{\overline{P} : P \in \mathscr{P}'\} = \overline{\bigcup\{P : P \in \mathscr{P}'\}}$.

$\mathscr{P}$ 称为 X 的**离散集族** [24, p. 349], 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 的开邻域 U 使得 U 至多与 $\mathscr{P}$ 中一个元相交.

易知, 离散集族是局部有限集族, 局部有限集族是闭包保持集族; 互不相交的闭包保持闭集族是离散的.

回顾一些有特定的 σ 闭包保持集族所定义的空间.

拓扑空间 X 称为 M_1 **空间** [28, 定义 1.1], 若 X 是具有 σ 闭包保持基的正则空间.

集族 $\mathscr{B}$ 称为拓扑空间 X 的 **拟基** [28, p. 105], 若对任意的 $x \in X$ 及 x 的邻域 U, 都存在集合 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B^\circ \subset B \subset U$. 拓扑空间 X 称为 M_2 **空间** [28, 定义 1.2], 若 X 是具有 σ 闭包保持拟基的正则空间.

设有 X 的集对 (P_1, P_2) 所成的族 $\mathscr{P} = \{(P_1, P_2)\}$, 这里 P_1 是开集且 $P_1 \subset P_2$, 称 $\mathscr{P}$ 是 X 的 **对基** [28, p. 106], 如果对每一 $x \in X$ 及 x 的开邻域 U, 存在 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$. 对族 $\mathscr{P}$ 称为 **垫状的** [24, p. 352], 如果对任意的 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$,

$$\overline{\bigcup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}} \subset \bigcup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}.$$

拓扑空间 X 称为 M_3 **空间** [28, 定义 1.3], 若 X 具有 σ 垫状对基.

拓扑空间 X 称为 σ **空间** [49, 定义 4.3], 若 X 具有 σ 闭包保持 (等价于 σ 离散) 网络 [49, 定理 4.11]. 显然有 [49]

$$\begin{aligned} \text{度量空间} &\Rightarrow M_1 \text{ 空间} \Rightarrow M_2 \text{ 空间} \\ &\Rightarrow M_3 \text{ 空间} \Rightarrow \text{仿紧 } \sigma \text{ 空间}. \end{aligned}$$

G. Gruenhage [48] 和 H.J.K. Junnila [57] 分别独立的证明了 M_3 空间是 M_2 空间. 问题 "M_2 空间是否是 M_1 空间?" 是一般拓扑学中最困难的经典问题之一 [50]. 另一方面, C.R. Borges 引入层空间的概念并证明了层空间等价于 M_3 空间 [22, 定理 7.2].

定义 3.3.1 *拓扑空间 X 称为***半层空间** *[71, 定义 1.4.3], 如果存在函数 $G : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 满足:*

(1) $F \in \tau \Rightarrow F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G(n, F)$;

(2) $F \subset K \Rightarrow G(n, F) \subset G(n, K)$.

若更设,

(3) $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G(n, F)^\circ$,

*则称 X 是***层空间** *[22, 定义 1.1].*

众所周知, 层空间是 σ 空间, σ 空间是半层空间 [49, 定理 5.9].

引理 3.3.2 *对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:*

(1) X 是层空间.

(2) X 是具有 σ 闭包保持拟基的正则空间 [48, 57].

(3) X 是单调正规的半层空间 [54, 定理 2.5].

利用 sp 网络, 我们得到了层空间的一种新的刻画方式, 此结果部分回答了问题 0.0.6.

定理 3.3.3 *拓扑空间 X 是层空间当且仅当 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间.*

证明 易证拟基是 sp 网络. 因此, 由引理 3.3.2 可知, 层空间是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间.

另一方面, 设 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是空间 X 的 σ 闭包保持 sp 网络, 其中每一 $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持的. 由 X 的正则性, 不妨假设 $\mathscr{F}_n$ 中的元都是 X 中的闭子集. 显然, X 是半层空间. 由引理 3.3.2, 我们只需证 X 是单调正规空间即可.

对空间 X 中任意互不相交的闭集对 (H, K), 令

$$D(H,K) = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)^\circ,$$

其中

$$U_n = \bigcup\{F \in \bigcup_{i\le n} \mathscr{F}_n : F\cap K = \varnothing\} \setminus \bigcup\{F \in \bigcup_{i\le n} \mathscr{F}_n : F\cap H = \varnothing\}.$$

下证 D 是 X 上的单调正规算子. 显然, 若 $H \subset H'$, $K' \subset K$, 且 H', K' 是 X 中不相交的闭集, 则有 $D(H,K) \subset D(H',K')$.

下证 $H \subset D(H,K)$.

如若不然, 则存在 $x \in H \setminus D(H,K)$, 从而有 $x \in \overline{X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i} \cap H$. 由于 $x \in X \setminus K$, 所以存在 $P \in \mathscr{F}$ 使得 $x \in P \subset X \setminus K$ 且 $x \in \overline{P \cap (X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i)}$, 则存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $P \in \mathscr{F}_k$. 因为 $x \in H$, 所以

$$X \setminus \bigcup\{F \in \bigcup_{i\le k} \mathscr{F}_i : F\cap H = \varnothing\}$$

是点 x 的开邻域, 于是有

$$(X \setminus \bigcup\{F \in \bigcup_{i\le k} \mathscr{F}_i : F\cap H = \varnothing\}) \cap P \cap (X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \neq \varnothing.$$

又因为

$$P \setminus \bigcup\{F \in \bigcup_{i\le k} \mathscr{F}_i : F\cap H = \varnothing\} \subset U_k,$$

所以

$$U_k \cap (X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \neq \varnothing,$$

矛盾. 因此, $H \subset D(H,K)$.

下证 $\overline{D(H,K)} \subset X \setminus K$. 假设存在 $x \in \overline{D(H,K)} \cap K$, 则 $x \in X \setminus H$. 因为 $\mathscr{F}$ 是 X 的 sp 网络, 所以存在 $Q \in \mathscr{F}$ 使得 $x \in Q \subset X \setminus H$ 且 $x \in \overline{Q \cap D(H,K)}$. 因此, 我们可以选取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $Q \in \mathscr{F}_m$, 这时 $Q \cap U_k = \varnothing$, 对任意的 $k \geq m$. 从而有

$$x \in \overline{Q \cap \bigcup_{i<m} U_i} \subset \overline{\bigcup_{i<m} U_i} = \bigcup_{i<m} \overline{U_i}.$$

于是, 存在 $i_0 < m$ 满足

$$x \in \overline{U_{i_0}} \subset \bigcup \{F \in \bigcup_{i\leq i_0} \mathscr{F}_i : F \cap K = \varnothing\} \subset X \setminus K,$$

矛盾. 故 $\overline{D(H,K)} \subset X \setminus K$. 所以, X 是单调正规空间. 从而 X 是层空间. 证毕.

注 3.3.4 *(1) 由定理 3.3.3 和引理 3.3.2 可知具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间 X 是仿紧空间, 因此 X 是集态正规空间 [24, p. 352].*

(2) 存在一个具有 σ 局部有限 Pytkeev 网络 (k 网络) 的非正规的正则序列空间 [37, 例 3.3].

(3) 在马丁公理及否定连续统假设下, 存在 k 空间是 $\aleph_0$ 空间, 但不是单调正规空间, 即不是层空间 [37, 例 3.4].

众所周知, 正则空间 X 具有 σ 局部有限基当且仅当 X 具有 σ 离散基 [32, p. 282]. 同样的, 正则空间 X 具有 σ 局部有限 k 网络 (cs^* 网络, wcs^* 网络) 当且仅当 X 具有 σ 离散 k 网络 [36, 定理 4] (cs^* 网络, wcs^* 网络 [71, 定理 3.8.4]).

下面的部分, 我们主要讨论具有 σ 局部有限 sp 网络的空间所具有的性质, 证明了具有 σ 局部有限 sp 网络的正则空间有 σ 离散 sp 网络, 此结果部分回答了问题 0.0.2.

设 $\mathscr{P}$、$\mathscr{Q}$ 是 X 中的子集族. 记

$$\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathscr{P}, Q \in \mathscr{Q}\}.$$

集族 $\mathscr{P}$ 称为 **星有限的** [24, p. 368], 如果 $\mathscr{P}$ 中的每一个元仅与 $\mathscr{P}$ 中有限多个元相交.

定理 3.3.5 *对于正则空间 X, 下述条件相互等价:*

(1) *X 有 σ 离散 sp 网络.*

(2) *X 有 σ 局部有限 sp 网络.*

证明 (1) $\Rightarrow$ (2), 显然.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 X 具有 σ 局部有限 sp 网络 $\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$. 因为 X 是正则空间, 我们可以假设 $\mathscr{P}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_m$, 其中每一 $\mathscr{P}_m$ 是关于有限交封闭的局部有限闭集族.

对每一 $m\in\mathbb{N}$, 由 $\mathscr{P}_m$ 的局部有限性, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$ 使得 $\mathscr{U}_m$ 的每个元仅与 $\mathscr{P}_m$ 的有限个元相交. 因定理 3.3.3, X 是仿紧空间, 因此 $\mathscr{U}_m$ 有 σ 离散的闭加细覆盖 $\{F_\beta:\beta\in B_{m,n},n\in\mathbb{N}\}$, 其中对每一$n\in\mathbb{N}$, $\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 都是离散集族. 从而可知, 若 $\beta\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_{m,n}$, 则 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交.

由 X 的仿紧性, 对每一对 $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, 存在 X 中互不相交的开集族 $\{W_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 使得每一 $F_\beta\subset W_\beta$. 令

$$C_{m,n}=\{(\alpha,\beta):P_\alpha\in\mathscr{P}_m,\beta\in B_{m,n}\text{ and }P_\alpha\cap F_\beta\neq\varnothing\}.$$

下证集族 $\{P_\alpha\cap W_\beta:(\alpha,\beta)\in C_{m,n}\}$ 是星有限的. 事实上, 如果 $(P_\alpha\cap W_\beta)\cap(P_\gamma\cap W_\delta)\neq\varnothing$, 这里 $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in C_{m,n}$, 则有 $W_\beta\cap W_\delta\neq\varnothing$, $\beta,\delta\in B_{m,n}$. 然而 $\{W_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 中的元是互不相交的, 这就使得 $\beta=\delta$. 从而 $(\gamma,\beta)\in C_{m,n}$, $P_\gamma\cap F_\beta\neq\varnothing$. 由于 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交, P_γ 是其中一个, 这说明只有有限对 $(\gamma,\delta)\in C_{m,n}$ 满足 $(P_\alpha\cap W_\beta)\cap(P_\gamma\cap W_\delta)\neq\varnothing$.

固定正整数 m,n, 对任意的 $(\alpha,\beta)\in C_{m,n}$ 及 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$S(\alpha,\beta,i)=P_\alpha\cap\bigcup\{P_\gamma\in\mathscr{P}_i:P_\gamma\subset W_\beta\},$$

则有 $S(\alpha,\beta,i)\subset P_\alpha\cap W_\beta$. 记

$$\mathscr{S}(m,n,i)=\{S(\alpha,\beta,i):(\alpha,\beta)\in C_{m,n}\}.$$

因集族 $\{P_\alpha\cap W_\beta:(\alpha,\beta)\in C_{m,n}\}$ 是星有限的, 所以 $\mathscr{S}(m,n,i)$ 星有限. 同时我们注意到 $\mathscr{S}(m,n,i)$ 的元是局部有限集族 $\mathscr{P}_m\bigwedge\mathscr{P}_i$ 的子集族的并, 因此,

$\mathscr{S}(m,n,i)$ 是闭包保持的. 因为星有限集族是 σ 互不相交集族 [24, 引理 3.10], 而互不相交的闭包保持闭集族的离散的, 所以集族 $\mathscr{S}(m,n,i)$ 是 σ 离散的.

令

$$\mathscr{S}=\bigcup\{\mathscr{S}(m,n,i):m,n,i\in\mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{S}$ 是 X 中的 σ 离散闭集族. 下证 $\mathscr{S}$ 是 X 的 sp 网络.

取 $x\in U\cap\overline{Y}$, 其中 U 是开集, Y 是 X 的子集. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 sp 网络, 所以存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $P_\alpha\in\mathscr{P}_m$ 使得 $x\in\overline{P_\alpha\cap Y}$ 且 $x\in P_\alpha\subset U$. 又因为 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}=X$, 所以存在 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\beta\in B_{m,n}$ 使得 $x\in F_\beta$. 因此, $P_\alpha\cap F_\beta\neq\varnothing$, $(\alpha,\beta)\in C_{m,n}$. 因 $x\in W_\beta$, 所以存在 $i\in\mathbb{N}$ 及 $P_\gamma\in\mathscr{P}_i$ 使得 $x\in P_\gamma\subset W_\beta\cap U$ 且 $x\in\overline{P_\gamma\cap P_\alpha\cap Y}$. 从而有

$$x\in\overline{S(\alpha,\beta,i)\cap Y}\subset S(\alpha,\beta,i)\subset P_\alpha\subset U.$$

所以, 集族 $\mathscr{S}$ 是 X 的 sp 网络. 证毕.

第四章　与点可数性相关的几个问题

广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 其活力主要体现在解决问题及拓展应用. 广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题都涉及点可数覆盖的研究, 其中有一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射, 引起了一批拓扑学工作者对点可数覆盖及相关映射理论的兴趣, 促进了各种类型的网络理论与度量空间映射理论的发展, 从而使得许多优秀的结果不断涌现. 特别地, 2015 年林寿修订出版的专著《点可数覆盖与序列覆盖映射》[67] 总结了国际上关于点可数覆盖及相关映射理论的研究成果, 评述了学科的发展趋势, 其中提出的大量问题成为该方向最有价值的研究线索.

在本章, 我们主要围绕与点可数性相关的几个问题展开研究, 构造了几个例子, 简化了一些证明, 回答或部分回答了 T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ [18] 及林寿和蔡长勇 [68] 所提的一些问题.

§4.1　具有点可数 cs^* 网络的空间

在本小节, 我们构造了几个具有下述性质的例子: 存在度量空间的商 s 映像 X, 使 X 不具有可数伪特征; 存在闭映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是具有紧可数基的空间, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 但 f 不是边缘 s 映射; 存在从具有可数 sn 网络空间 X 到拓扑空间 Y 的序列覆盖映射 f, 但 f 不是 1 序列覆盖映射. 这些结果分别回答或部分回答了 T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ [18] 及林寿和蔡长勇 [68] 所提的一些问题.

1966 年 A.V.Arhangel'skiĭ 在名著 *Mappings and spaces* 中提出了下述问题: 刻画度量空间的商 s 映像. 1987 年, Y. Tanaka [105] 用具有点可数 cs^* 网络的序列空间给出了该问题较好的回答 (即引理 3.2.2) : 拓扑空间 X 是具有点可数 cs^* 网络的序列空间当且仅当 X 是度量空间的商 s 映像. 这使得一批拓扑学工作者对具有 cs^* 网络的序列空间产生了浓厚的兴趣. 其中, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ 在马丁公理下构造了具有下述性质的例子 [18, 定理 5]: 存在序列空间 X 满足 $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$; 存在序列空间 X 满足 $sb_\chi(X) < \psi(X)$. 为了进一步了解具有 cs^* 网络的序列空间所具有的拓扑性质, T. Banakh 和 L. Zdomskyĭ 提出了下述问题 (即问题 0.0.8).

问题 4.1.1 *[18] 在 ZFC 下, 是否存在序列空间 X 满足: $sb_\chi(X) < \psi(X)$ 或者 $cs^*_\chi(X) < \psi(X)$?*

为了回答这个问题, 我们还需要一系列引理.

引理 4.1.2 *[21] 设 $f: X \to Y$ 是商映射, X 是序列空间. 若 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中的收敛序列, 则存在 X 中的收敛序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得序列 $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列.*

由引理 4.1.2 易得下述结果.

引理 4.1.3 *设 $\mathscr{P}$ 是序列空间 X 的 cs^* 网络. 如果 $f: X \to Y$ 是商映射, 则集族 $\{f(P): P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 cs^* 网络.*

由引理 3.2.2 可知, 度量空间的商 s 映像是具有点可数 cs^* 网络的序列空间, 所以下述例 4.1.4 部分回答了问题 4.1.1 (即问题 0.0.8).

例 4.1.4 *存在拓扑空间 X, 使其是度量空间的商 s 映像, 但 X 不具有可数伪特征.*

证明 设 $\mathbb{I}_B$ 是 Michael 直线, $C = \mathbb{I} \setminus B$. 由例 2.3.4 (2) 可知, $C = \mathbb{I} \setminus B$ 是 $\mathbb{I}_B$ 的闭可分子集. 把 $\mathbb{I}_B$ 的子集 C 算作一类, 其他的点每一点算作一类, 在类所成的集上给以商拓扑, 得商空间 X. 记 $f: \mathbb{I}_B \to X$ 为自然商映射, $\{y\} = f(C)$, 则 f 是闭映射且 X 是正规的序列空间. 由于 $f^{-1}(y) = C$ 是 $\mathbb{I}_B$ 的可分子集, 所以 f 是 s 映射. 即 f 是商 s 映射.

由例 2.3.4 (1) 可知, $\mathbb{I}_B$ 具有点可数基. 设 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{I}_B$ 的点可数基. 由引理 4.1.3 可知, 集族 $\{f(P): P \in \mathscr{P}\}$ 是 X 的点可数 cs^* 网络. 因此, $cs^*_\chi(X) = \omega$. 再由引理 3.2.2 可知, X 是度量空间的商 s 映像.

下证: $\psi(X) > \omega$.

事实上, 如果 $\psi(X) = \omega$, 则可设 $\{y\}$ 是 Y 中的 G_δ 集. 因此, 我们可以假设 $\{y\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$, 其中 V_n 是 X 中开集且 $V_1 = X$. 于是可令 $C = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, 其中 U_n 是 $\mathbb{I}_B$ 中开集且 $U_1 = \mathbb{I}_B$. 又由于 $\mathbb{I}_B$ 的正规性, 我们不妨假设 $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$. 记 $P_n = \overline{U_n} \setminus U_{n+1}$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 可知 P_n 是闭集且 $\mathbb{I}_B = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, 于是存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 P_i 是不可数集. 再由例 2.3.4 (3) 可

知, $P_i\cap C\neq\emptyset$, 但由 P_i 的定义可知 $P_i\cap C=\emptyset$, 矛盾. 从而有 $\psi(X)>\aleph_0$. 证毕.

映射 $f:X\to Y$ 称为 **subproper** [13], 如果存在 X 的子集 Z 使得 $f(Z)=Y$ 且对任一在 Y 中具有紧闭包的集 K, 集 $Z\cap f^{-1}(K)$ 在 X 中具有紧闭包. 空间 X 称为 k^* **可度量空间** [13], 若 X 是度量空间的 subproper 映像.

回顾著名的 Hanai-Morita-Stone 定理 [32, 定理 4.4.17]. 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间, 则 Y 是度量空间当且仅当每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是紧子集. 此定理进一步可以推广为 [104]: 对任意的 $y\in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是紧的当且仅当 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω. 自然地, 研究闭映射、边缘紧映射、边缘 s 映射等映射就成为了拓扑学工作者研究的焦点之一. 为此, 林寿和蔡长勇证明了下述结果 [68]: 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 k^* 可度量的 k 空间. 若 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 则 f 是边缘 s 映射. 因为 k^* 可度量空间具有紧可数 k 网络 [13], 所以他们提出了下述问题 (即问题 0.0.9).

问题 4.1.5 *[68] 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是具有紧可数 k 网络的 k 空间. 如果 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 f 是边缘 s 映射吗?*

下述例子否定地回答了问题 4.1.5 (即问题 0.0.9).

例 4.1.6 *存在闭映射 $f:X\to Y$, 其中 X 是具有紧可数基的空间, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 但 f 不是边缘 s 映射.*

证明 令

$$X=\mathbb{I}_B\times(\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{N}\})\setminus\{(x,0):x\in\mathbb{I}\setminus B\},$$

其中 $\mathbb{I}_B$ 是 Michael 直线. 由例 2.3.4 (1) 可知, X 具有点可数基.

下证: X 有紧可数基.

设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数基, K 是 X 的任一紧子集. 显然, K 是紧度量的. 于是 K 是可分的. 设 D 是 K 的可数稠密子集, 则对任意 $z\in K$ 有 $z\in \mathrm{cl}_K(D)$. 对 X 的任意开子集 U, 若 $U\cap K\neq\emptyset$, 则 $U\cap K$ 是 K 中的开子集. 于是存在 $d\in U\cap K\cap D$. 即对 X 的任意开集 U, 若 $U\cap K\neq\emptyset$, 则 $U\cap D\neq\emptyset$. 又因为 D 是可数集且 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数基, 所以 K 仅与 $\mathscr{P}$ 中可数多个元相交. 即 X 具有紧可数基.

设空间 Y 是把 X 的子集 $\{(x,0):x\in B\}$ 粘成一点 y 所成的商空间, 令 $f:X\to Y$ 是自然商映射. 易验证, f 是闭映射, 但不是边缘 s 映射.

下证空间 Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

若不然, 因为 Y 中异于 y 的点有可数邻域基, 所以 Y 有闭子空间 $\{y\}\cup\{y(\alpha,n):\alpha<\omega_1,n\in\mathbb{N}\}$ 同胚于 S_{ω_1}, 其中对任意的 $\alpha<\omega_1$, $\{y(\alpha,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于点 y. 对任意的 $\alpha<\omega_1$, 由引理 4.1.2, 序列 $\{y(\alpha,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都存在 X 中的收敛子序列 $\{y(\alpha,n(\alpha,i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 设 x_α 是序列 $\{y(\alpha,n(\alpha,i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 X 中的收敛点, 则 $x_\alpha\in B\times\{0\}$. 又因为 B 中的点都是 $\mathbb{I}_B$ 中的孤立点, 不妨假设当 $n(\alpha,i+1)<n(\alpha,i)\in\mathbb{N}$ 时, 有 $y(\alpha,n(\alpha,i))=(x_\alpha,1/n(\alpha,i))$, 且对任意的 $\alpha<\omega_1$, x_α 互不相同. 于是存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $|\{\alpha<\omega_1:n(\alpha,i)=m\}|=\omega_1$. 令 $A=\{p_1(x_\alpha):n(\alpha,i)=m\}$, 其中 $p_1:X\to\mathbb{I}_B$ 是投影映射. 则 $f(A\times\{1/m\})$ 是 Y 中的闭离散子集, 因此 $A\times\{1/m\}$ 是 X 中的闭离散子集. 但是, 因为 A 是 B 中的不可数子集, 所以由引理 2.3.4 (3) 可知, A 不是 $\mathbb{I}_B$ 的闭子集, 矛盾. 因此, Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 证毕.

1971 年, Siwiec [99] 引入序列覆盖映射的概念, 并证明了第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射. 燕鹏飞、林寿和江守礼 [108] 更进一步地证明了度量空间上的序列覆盖紧映射是 1 序列覆盖映射 [70]. 于是, 林寿和蔡长勇提出了下述问题 (即问题 0.0.10).

问题 4.1.7 *[68] 设 $f:X\to Y$ 是序列覆盖边缘紧映射. 如果空间 X 满足下列任一条件, f 是 1 序列覆盖映射吗?*

(1) X 的任意紧子集在 X 中具有可数 sn 网络.

(2) X 的任意紧子集在 X 中具有可数外 sn 网络.

(3) X 有紧可数 sn 网络.

下述例子给予问题 4.1.7 (问题 0.0.10) (2),(3) 以否定回答.

例 4.1.8 *存在从具有可数 sn 网络空间 X 到拓扑空间 Y 的序列覆盖映射 f, 但 f 不是 1 序列覆盖映射.*

证明 设

$$X=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x(n,k):n,k\in\mathbb{N}\}$$

同胚于 Arens 空间 S_2, 其中对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且序列 $\{x(n,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_n. 容易验证, 空间 X 具有可数 sn 网络, 且 X 的任意紧子集有可数外 sn 网络.

设 $Y = \{y\} \cup \{y(n,k) : n,k \in \mathbb{N}\}$ 同胚于扇空间 S_ω, 其中对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\{y(n,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 y. 定义 $f : X \to Y$ 如下: $f(\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{y\}$; 对任意的 $i, j \in \mathbb{N}$, $f(x(j, j\times i - j + k)) = y(k,i)$ 且 $k \le j$. 显然, f 是连续的.

下证: f 是序列覆盖映射.

对 S_ω 中任意包含收敛点的收敛序列 K, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$K \subset \{y\} \cup \{y(n,k) : k \in \mathbb{N}, n \le n_0\}$$

且

$$f(\{x_n\} \cup \{x(n_0,k) : k \in \mathbb{N}\}) = \{y\} \cup \{y(n,k) : k \in \mathbb{N}, n \le n_0\}.$$

则

$$L = f^{-1}(K) \cap (\{x_n\} \cup \{x(n_0,k) : k \in \mathbb{N}\})$$

是 $\{x_n\} \cup \{x(n_0,k) : k \in \mathbb{N}\}$ 的子列且有 $f(L) = K$. 所以, f 是序列覆盖映射.

下证: f 不是 1 序列覆盖映射.

假设 f 是 1 序列覆盖映射, 则对任意的 $y \in Y$ 都存在 $x_y \in f^{-1}(y)$ 满足对任意包含收敛点的收敛序列 K, 都存在包含收敛点的收敛序列 L 使得 $f(L) = K$. 于是存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_y = x_n$. 记 $K = \{y\} \cup \{y(n+1,k) : k \in \mathbb{N}\}$, 则不存在收敛于 x_y 的序列 L 使得 $f(L \cup \{x_y\}) = K$, 矛盾. 因此, f 不是 1 序列覆盖映射. 证毕.

§4.2 具有点可数 k 网络的空间

k 网络一直是广义度量空间理论中的核心概念之一, 具有点可数 k 网络的空间本身也具有良好的拓扑性质. 如, 具有点可数 k 网络的 k 空间是序列空间 [51], 具有点可数 k 网络的第一可数正则空间有点可数基 [51]. 因此, 研究具有点可数 k 网络的空间, 能更好的帮助我们理解具有某种特定可数性的空间.

在本节, 我们主要讨论具有点可数 k 网络空间的性质, 内容由两部分组成, 一是讨论 Arhangel'skiĭ 和 A. Bella 的一个问题, 二是引入 p-Pytkeev 网络的概

念, 并利用 p-Pytkeev 网络简化了蔡长勇和林寿 [27] 的定理: “具有点可数 p-k 网络的 totally 可数紧空间是可度量化的”的证明过程.

在本节的第一部分, 我们主要证明了对于可数个具有点可数 k 网络的正则 k 空间的乘积空间 X, 其子空间 Y 具有点可数基当且仅当 Y 具有可数 fan-tightness. 此结果推广了冯秀峰和 K. Tamano 的结果, 也是对 Arhangel'skiĭ 和 A. Bella 所提问题的再次回答.

拓扑空间 X 称为**强 Fréchet-Urysohn 空间** [99], 如果 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都存在 $x_n\in A_n$ 使得在 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于点 x.

A. Arhangel'skiĭ 和 A. Bella [6] 证明了下述经典结果.

引理 4.2.1 *[6] 拓扑空间 X 是强 Fréchet-Urysohn 空间当且仅当 X 是 Fréchet-Urysohn 空间且具有可数 fan-tightness.*

拓扑空间 X 称为 **Lašnev 空间**, 如果 X 是度量空间的闭映像.

K. Tamano [103] 证明了可数多个 Lašnev 空间的乘积空间的强 Fréchet-Urysohn 子空间是可度量化的. 于是, A. Arhangel'skiĭ 和 A. Bella [6] 提出了下述问题.

问题 4.2.2 *设 X 是可数个 Lašnev 空间的乘积空间, Y 是 X 的任意子空间. 若 Y 具有可数 fan-tightness, 则 Y 是否可度量化?*

1997 年, 冯秀峰和 K. Tamano [33] 肯定地回答了问题 4.2.2. 那么, 是否可以把条件中的 “Lašnev 空间”替换成“度量空间的商 s 映像”呢? 即下述问题.

问题 4.2.3 *设 X 是可数个度量空间的商 s 映像的乘积空间. 如果 X 的子空间 Y 有可数 fan-tightness, 则 Y 是否有点可数基?*

因为度量空间的闭映像和度量空间的商 s 映像都是具有点可数 k 网络的 k 空间 [105, 命题 1.8], 所以可讨论如下更有趣的问题.

问题 4.2.4 *设 X 是可数个具有点可数 k 网络的 k 空间的乘积空间. 若 X 的子空间 Y 具有可数 fan-tightness, 则 Y 是否有点可数基?*

为解决上述问题, 我们还需要下述引理.

引理 4.2.5 *[11] 设正则空间 X 具有可数 Pytkeev 网络. 若 X 有可数 fan-tightness, 则 X 是可分的度量空间.*

下述定理, 给出问题 4.2.4 较好的回答.

定理 4.2.6 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族具有点可数 k 网络的正则 k 空间, 则乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 的任意具有可数 *fan-tightness* 的子空间具有点可数基.

证明 设 C 是乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 的任一子空间且 C 有可数 fan-tightness. 容易验证乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 具有点可数 k 网络 [51]. 由引理 2.1.5 可知, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 空间 X_n 都具有点可数的 Pytkeev 网络. 设 $\mathscr{P}_n$ 是空间 X_n 的点可数 Pytkeev 网络.

下证 C 是 Fréchet-Urysohn 空间.

选取 C 中的子集 A 及 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$, 使其满足 $x \in \mathrm{cl}_C(A)$. 因为 C 有可数 fan tightness, 所以 C 有可数 tightness, 则存在 A 的可数子集 D 使得 $x \in \mathrm{cl}_C(D)$. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $B_n = \{x_n\} \cup p_n(D)$, 其中 $p_n : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to X_n$ 是投影映射. 因为集族 $\mathscr{P}_n$ 是点可数的, 所以 $\mathscr{P}_n|_{B_n}$ 是 X_n 的子空间 B_n 的可数 Pytkeev 网络. 设 $B = (\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap C$, 则有 $D \subset B$ 及 $x \in \mathrm{cl}_C(D) \cap B = \mathrm{cl}_B(D)$. 又因为可数 Pytkeev 网络关于可数可乘封闭 [11], 所以易得空间 B 具有可数 fan-tightness 且具有可数 Pytkeev 网络. 从而由引理 4.2.5 可知, B 是可度量化的. 于是存在 D 中的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 B 中收敛于 x. 因此, 序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 C 中收敛于点 x. 从而, C 是 Fréchet-Urysohn 空间. 再由引理 4.2.1 可知, C 是强 Fréchet-Urysohn 空间. 又因为具有点可数 k 网络的强 Fréchet-Urysohn 正则空间有点可数基 [51], 所以 C 有点可数基. 证毕.

下述推论, 给出问题 4.2.3 较好的回答. .

推论 4.2.7 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族度量空间的商 s 映像, 其中每一 X_n 是正则空间, 则乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 的任意具有可数 *fan-tightness* 的子空间具有点可数基.

因为度量空间的闭映像是具有点可数 k 网络的正则 Fréchet-Urysohn 空间 [38], 所以有下述推论.

推论 4.2.8 *[33]* 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族 *Lašnev* 空间, 则乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 的任意具有可数 *fan-tightness* 的子空间是可度量的.

在本节的第二部分, 类似 p-k 网络的定义, 我们定义了 p-Pytkeev 网络的概念, 并讨论了两者之间的相互关系, 由此简化了蔡长勇和林寿的下述定理: "具有点可数 p-k 网络的 totally 可数紧空间可度量化"的证明过程.

定义 4.2.9 *[51]* 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **(拟-)p-k 网络**, 若对 X 的任意紧 (可数紧) 子集 K 及 $y \in X \setminus K$, 都存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集族 $\mathscr{P}'$ 使得 $K \subset \bigcup \mathscr{P}' \subset X \setminus \{y\}$.

定义 4.2.10 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **p-Pytkeev 网络**, 若对任意的 $x \in X$, X 中任意以 x 为聚点的子集 A 及 $y \neq x$, 存在集合 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \cap A$ 是无限集且 $P \subset X \setminus \{y\}$.

显然, 拟 p-k 网络是 p-k 网络.

在第二章, 我们证明了点可数的 Pytkeev 网络是拟 k 网络 (见定理 2.1.1), 那么, 点可数的 p-Pytkeev 网络是拟 p-k 网络吗? 下述定理给以肯定回答.

定理 4.2.11 点可数的 *p-Pytkeev* 网络是拟 p-k 网络.

证明 设集族 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 p-Pytkeev 网络. 下证, 集族 $\mathscr{P}$ 是拟 p-k 网络.

设 K 是 X 中任一可数紧子集, $y \in X \setminus K$. 因为 $\mathscr{P}$ 是点可数集族, 所以对任意的 $x \in X$, 可令

$$\mathscr{P}_x = \{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset X \setminus \{y\}\} = \{P_n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

若 $\mathscr{P}$ 不是拟 p-k 网络, 则可归纳选取

$$x_n \in K \setminus \bigcup \{P_i(x_j) : i, j < n\}.$$

令 $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则 A 是 K 中的无限子集, 于是 A 有聚点 $x' \in X \setminus \{y\}$. 因为 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 p-Pytkeev 网络, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset X \setminus \{y\}$ 且 $P \cap A$ 是无限集. 于是, 可选取 $i, j \in \mathbb{N}$ 使得 $P = P_i(x_j)$. 但是由 x_n 的选取

可知, 当 $k > \max\{i,j\}$ 时, $x_k \notin P_i(x_j)$. 从而有 $|A \cap P_i(x_j)| \leq \max\{i,j\}$, 这与 $P \cap A$ 是无限集矛盾. 所以集族 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的拟 p-k 网络. 证毕.

由于具有点可数 (拟) p-k 网络的 (可数紧) 紧空间是可度量的 [51, (定理4.1), 定理3.3], 所以下述推论是显然的.

推论 4.2.12 具有点可数 *p-Pytkeev* 网络的可数紧空间是可度量化的.

拓扑空间 X 称为 **totally 可数紧**, 若空间 X 中的任意序列都含有子列具有紧闭包.

定理 4.2.13 *totally* 可数紧空间的点可数 p-k 网络是 *p-Pytkeev* 网络.

证明 设 X 是 totally 可数紧空间, 集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 p-k 网络. 下证 $\mathscr{P}$ 是 X 的 p-Pytkeev 网络.

给定点 $x \in X$ 及 X 中以 x 为聚点的子集 A. 任取 $y \neq x$. 因为 X 是 Hausdorff 空间, 所以存在开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 记 $B = A \cap U$. 则有 $x \in \overline{B}$ 且 $\overline{B} \subset X \setminus \{y\}$. 因为 X 是 totally 可数紧空间, 所以存在 B 的无限子集 C 使得 $\overline{C}$ 是紧的. 于是有 $\overline{C} \subset \overline{B} \subset X \setminus \{y\}$. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 p-k 网络, 所以存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集族 $\mathscr{P}'$ 使得 $K \subset \bigcup \mathscr{P}' \subset X \setminus \{y\}$ 于是存在 $P \in \mathscr{P}' \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset X \setminus \{y\}$ 且 $P \cap C$ 是无限集. 因此, $\mathscr{P}$ 是 X 的 p-Pytkeev 网络. 证毕.

由于 totally 可数紧空间是可数紧空间, 则由推论 4.2.12 和定理 4.2.13 可得下述推论, 此推论简化了蔡长勇和林寿的下述定理的证明.

推论 4.2.14 *[27, 定理2.2]* 若拓扑空间 X 是具有点可数 p-k 网络的 *totally* 可数紧空间, 则 X 可度量化.

§4.3 有关拓扑代数的几个结果

拓扑代数已经成为一般拓扑学及其应用的新发展方向之一. 近年来, 我国学者在拓扑代数中做了大量重要的工作, 其主要贡献之一就是把广义度量空间理论应用于拓扑代数的研究. 2010 年, 刘川和林寿在文献 [73] 中首次明确地阐述用广义度量方法研究拓扑代数的思想, 深得国内外同行的赞赏. 研究拓扑代数

中的广义度量性质, 不仅能加深对拓扑代数自身结构的理解, 也是两者之间交叉发展的有效途经之一.

在本节, 我们主要是研究拓扑代数中的广义度量性质, 讨论具有 sp 特征的拓扑代数结构的一些拓扑性质, 证明了任意的拓扑群 X 都满足 $spnw(X) = d(X)$ $sp_\chi(X)$以及拓扑群 X 是可度量化的当且仅当 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间, 并举例说明存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间, 此结果否定回答了问题 0.0.11 和问题 0.0.12. 最后, 我们利用拓扑群构造了一个例子, 此例子说明在 **CH** 下存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 X, 使其具有可数 tightness, 但不可度量化, 此结果否定回答了问题 0.0.13.

首先, 我们引入与 sp 网络相关的基数函数, 讨论 sp 特征在拓扑代数中的一些应用, 证明了任意的拓扑群 X 都满足 $spnw(X) = d(X)sp_\chi(X)$ 以及任意的仿拓扑群 X 都满足 $spnw(X) = nw(X)sp_\chi(X)$.

回顾一些拓扑代数空间类.

设 G 是拓扑空间, 同时也是一个群. 空间 G 称为**半拓扑群** [10, p. 12], 若 G 的乘积运算 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 按此拓扑是分离连续的. 空间 G 称为**拟拓扑群** [10, p. 12], 若 G 到自身的逆运算 $x \mapsto x^{-1}$ 是连续的. 空间 G 称为**仿拓扑群** [10, p. 12], 若 G 的乘积运算 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 按此拓扑是联合连续的. 空间 G 称为**拓扑群** [10, p. 12], 若 G 既是仿拓扑群又是拟拓扑群.

回顾一些基数函数的概念.

空间 X 的**网络势** [32] 定义为

$$nw(X) = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \text{ 是空间 } X \text{ 的网络}\}.$$

空间 X 在**点 x 的特征** [32] 定义为

$$\chi(X, x) = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \text{ 是空间 } X \text{ 在点 } x \text{ 的邻域基}\}.$$

空间 X 的**特征** [32] 定义为

$$\chi(X) = \sup\{\chi(X, x) : x \in X\}.$$

类似地, 我们定义下述几个新的基数不变量.

空间 X 的 **sp 网络势**定义为

$$spnw(X) = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \text{ 是空间 } X \text{ 的 } sp \text{ 网络}\}.$$

空间 X 在**点** x **的** sp **特征**定义为

$$sp_\chi(X,x)=\min\{|\mathscr{P}|:\mathscr{P} \text{ 是空间 } X \text{ 在点 } x \text{ 的 } sp \text{ 网络}\}.$$

空间 X 的 sp **特征**定义为

$$sp_\chi(X)=\sup\{sp_\chi(X,x):x\in X\}.$$

在仿拓扑群中, 我们可得下述结果.

定理 4.3.1 *设 X 是仿拓扑群, 则 $spnw(X)=nw(X)sp_\chi(X)$.*

证明 易证 $nw(X)sp_\chi(X)\leq spnw(X)$.

只需证 $spnw(X)\leq nw(X)sp_\chi(X)$. 设集族 $\mathscr{P}$ 是仿拓扑群 X 在单位元 e 处的 sp 网络且满足 $|\mathscr{P}|=sp_\chi(X,e)$. 另设 $\mathscr{N}$ 是 X 的网络且有 $|\mathscr{N}|=nw(X)$. 令

$$\mathscr{Q}=\{NP:N\in\mathscr{N},P\in\mathscr{P}\}.$$

断言. $\mathscr{Q}$ 是 X 的 sp 网络.

给定 $x\in U\cap\overline{A}$, 其中 U 是开集及 A 是 X 的子集. 若存在 $N\in\mathscr{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $x\in NP\subset U$ 且 $x\in\overline{NP\cap A}$, 则命题得证. 因为 X 是仿拓扑群, 所以存在 x 的邻域 U_x 和 e 的邻域 U_e 满足 $U_xU_e\subset U$. 又因为 $\mathscr{N}$ 是 X 的网络, 所以存在集合 $N\in\mathscr{N}$ 使得 $x\in N\subset U_x$. 因为 $x\in\overline{A}$, 所以 $e\in\overline{x^{-1}A}$, 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 在 e 处的 sp 网络, 所以存在集合 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$e\in P\subset U_e \text{ 且 } e\in\overline{P\cap x^{-1}A}.$$

于是有

$$x\in NP\subset U_xU_e\subset U$$

且

$$x\in x\overline{P\cap x^{-1}A}=\overline{xP\cap A}\subset\overline{NP\cap A}.$$

因此, $\mathscr{Q}$ 是 X 的 sp 网络. 由于

$$|\mathscr{Q}|\leq|\mathscr{N}||\mathscr{P}|=nw(X)sp_\chi(X,e),$$

于是有

$$spnw(X)\leq nw(X)sp_\chi(X).$$

综上所述, $spnw(X)=nw(X)sp_\chi(X)$. 证毕.

由定理 4.3.1 可知, 下述推论是显然的.

推论 4.3.2 设 X 是可分的仿拓扑群. 如果 X 有可数 sp 特征, 则 X 有可数 sp 网络.

在拓扑群中, 我们可得下述结果.

定理 4.3.3 设 X 是拓扑群, 则 $spnw(X) = d(X)sp_\chi(X)$.

证明 易证 $d(X)sp_\chi(X) \leq spnw(X)$.

只需证 $spnw(X) \leq nw(X)sp_\chi(X)$. 设 $\mathscr{P}$ 是拓扑群 X 在单位元 e 处的 sp 网络且满足 $|\mathscr{P}| = sp_\chi(X, e)$. 不失一般性, 不妨假设 $\mathscr{P}$ 关于有限并封闭. 选取 X 的稠密子集 D 使得 $|D| = d(X)$.

令

$$\mathscr{N} = \{dPQ : P, Q \in \mathscr{P}, d \in D\}.$$

断言. $\mathscr{N}$ 是 X 的 sp 网络.

给定 $x \in U \cap \overline{A}$, 其中 U 是开集及 A 是 X 的子集. 若存在 $d \in D$ 和 $P, Q \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in dPQ \subset U$ 且 $x \in \overline{dPQ \cap A}$, 则命题得证. 因为 X 是拓扑群, $x \in U$, 所以存在 x 在 X 中的开邻域 U_x 和 e 在 X 中的开邻域 U_e 使得 $U_x U_e^2 \subset U$.

令 $\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P} : e \in P \subset U_e\}$, 则 $\bigcup \mathscr{P}'$ 是 e 在 X 中的邻域. 所以存在 e 的开邻域 W_e 满足 $W_e \subset \bigcup \mathscr{P}'$. 又因为 X 是拓扑群, 所以存在 x 的开邻域 W_x 使得 $W_x \subset U_x$ 且 $W_x^{-1}x \subset W_e$.

另一方面, 选取 $d \in D \cap W_x$, 则

$$d^{-1}x \in W_x^{-1}x \subset W_e \subset \bigcup \mathscr{P}'.$$

于是存在 $P \in \mathscr{P}'$ 使得 $d^{-1}x \in P$. 因此, $x \in dP$. 又因为 $x \in \overline{A}$, 所以 $e \in \overline{x^{-1}A}$. 又因为 $\mathscr{P}$ 是 X 中 e 点的 sp 网络, 所以存在集合 $Q \in \mathscr{P}$ 使得

$$e \in Q \subset U_e \text{ 且 } e \in \overline{Q \cap x^{-1}A}.$$

于是有

$$x \in dPQ \subset W_x U_e^2 \subset U_x U_e^2 \subset U$$

且

$$x \in x\overline{Q \cap x^{-1}A} = \overline{xQ \cap A} \subset \overline{dPQ \cap A}.$$

于是 $\mathscr{N}$ 是 X 的 sp 网络. 因为

$$|\mathscr{N}| \leq |D||\mathscr{P}| = d(X)sp_{\chi}(X, e),$$

所以

$$spnw(X) \leq d(X)sp_{\chi}(X).$$

综上所述, $spnw(X) = d(X)sp_{\chi}(X)$. 证毕.

由定理 4.3.3 可知, 下述推论是显然的.

推论 4.3.4 *如果拓扑群 X 是具有可数 sp 特征的可分空间, 则 X 具有可数 sp 网络.*

注 4.3.5 *(1) 定理 4.3.1 在拟拓扑群中不成立.*

存在第一可数的 cosmic 拟拓扑群 X, 但 X 不是 $\aleph_0$ 空间 [11, 例 4.11], 从而 X 不具有可数 sp 网络.

(2) 定理 4.3.3 在仿拓扑群中不成立.

*取实数集 $\mathbb{R}$, 规定所有半开区间 $[a, b)$, $a < b$ 的集族作为开基, 这样得到的拓扑称为*半开区间拓扑*, 赋以半开区间拓扑的数直线通常称为* **Sorgenfrey 直线***. Sorgenfrey 直线是最经典的非拓扑群的仿拓扑群的例子之一 [10, 例 1.2.1]. 设 X 是 Sorgenfrey 直线, 则容易验证 X 是第一可数的可分空间, 因此 X 有可数 sp 特征. 但是 X 不是 cosmic 空间. 这说明 X 不具有可数 sp 网络.*

在本节第二部分, 我们讨论拓扑群的可度量性, 证明了拓扑群 X 是可度量化的当且仅当 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间, 并举例说明存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间, 此结果否定回答了问题 0.0.11 和 0.0.12

定理 4.3.6 *设 X 是完全正则的伪紧半拓扑群, 则 X 是可度量化的当且仅当 X 具有可数 sp 特征.*

证明 必要性显然, 下证充分性.

设空间 X 是具有可数 sp 特征的完全正则的伪紧半拓扑群. 因为具有可数 tightness 的完全正则的伪紧半拓扑群是拓扑群 [95, 推论 2.7], 所以 X 是拓扑群. 因为完全正则的伪紧空间是 feebly 紧的, 由引理 3.2.10 可知, X 是第一可数的. 又因为第一可数的拓扑群是可度量化的. 因此, X 可度量化. 证毕.

我们还需要下述引理.

引理 4.3.7 *[18, 定理 1] 具有可数 cs^* 特征的序列拓扑群有点可数 k 网络.*

定理 4.3.8 *拓扑群 X 可度量化当且仅当 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间.*

证明 充分性显然, 下证必要性.

假设拓扑群 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间, 则 X 有强 Pytkeev 性质及可数 cs^* 特征. 由推论 2.1.17 可知, X 是序列空间. 再由例 3.1.6, X 不含有闭子空间同胚于 S_2. 因此, X 不含有闭子空间同胚于 S_ω [86, 引理 2.1]. 由引理 4.3.7 和 引理 3.2.3(2), X 是第一可数的. 从而, X 可度量化. 证毕.

定义 4.3.9 *[10] 设 X 是拓扑群 G 的子空间. 若*

(1) 集 X 代数生成 G, 即: $< X >= G$;

(2) 每一连续映射 $f : X \to H$ 都能扩张到连续同态 $\hat{f} : G \to H$, 其中 H 是任一拓扑群.

那么, G 称为 X 上的 markov **自由拓扑群** *(简称:* **自由拓扑群***), 记为 $F(X)$.*

下述例 4.3.10 说明定理 4.3.8 中的条件"*sp* 网络"不能减弱为 "strict Pytkeev 网络", 此例子否定回答了问题 0.0.11 和 0.0.12.

例 4.3.10 *存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间.*

证明 设 X 是序列扇空间 S_ω, 见例 3.2.5. 因为 X 是 k_ω 空间, 由 [10, 定理 7.4.1] 可知由 X 生成的自由拓扑群 $F(X)$ 仍然是 k_ω 空间, 所以 $F(X)$ 是 k 空间. 又因为 X 是 $\aleph_0$ 空间, 所以 $F(X)$ 是 $\aleph_0$ 空间 [9, 定理 4.1]. 由引理 2.1.5 和引理 2.1.8, $F(X)$ 是具有可数 Pytkeev 网络的序列空间. 因此 $F(X)$ 有可数 strict Pytkeev 网络. 由于 X 是非离散的, 所以 $F(X)$ 不是第一可数空间 [10, 定理 7.1.20]. 由定理 4.3.8 及引理 3.1.3, $F(X)$ 不是 Fréchet-Urysohn 空间. 证毕.

本节第三部分, 我们利用拓扑群构造了一个例子, 此例子说明在 **CH** 下存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 X, 使其具有可数 tightness, 但是不可度量化, 此结果否定回答了问题 0.0.13.

G. Gruenhage、E.A. Michael 和 Y. Tanaka 在文献 [51] 中证明了具有点可数 k 网络的紧空间是可度量的, 并举例说明了存在具有点可数 k 网络的可数紧空间 X, 使其是不可度量化的. 在文献 [27] 中, 蔡长勇和林寿证明了: 具有点可数 k 网络的序列紧空间是紧可度量的. 因为序列紧空间是可数紧的, 所以他们提出了下述问题 (即问题 0.0.13):

问题 4.3.11 *设 X 是具有点可数 k 网络的可数紧空间, 如果 $t(X) \leq \omega$, 那么 X 是否可度量?*

为解决问题 4.3.11 (即问题0.0.13), 我们需要引入下述引理.

引理 4.3.12 *[31] 设 G 是遗传可分的正规可数紧拓扑群. 如果存在 G 中的紧子集是无限集, 则 G 可度量化.*

事实上, 在 **CH** 下, 问题 4.3.11 (即问题 0.0.13) 的回答是否定的.

例 4.3.13 *(**CH**) 存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 G, 使其满足 $t(G) \leq \omega$, 但 G 是不可度量化的.*

证明 (**CH**) 设 G 是文献 [53, 定理 2.2] 中的遗传可分的正规的可数紧拓扑群, 且 G 不是 Lindelöf 空间. 因为 G 是遗传可分空间, 所以很容易验证 $t(G) \leq \omega$. 又因为 G 不是 Lindelöf 空间, 所以 G 不是可度量化的. 因此由引理 4.3.12 可知, G 中的任意紧子集是有限集. 设 $\mathscr{P} = \{\{x\} : x \in G\}$, 则 $\mathscr{P}$ 是 G 的点可数 k 网络. 即 G 是具有点可数 k 网络的可数紧空间且 $t(G) \leq \omega$, 但 G 是不可度量化的. 证毕.

第五章　结束语

§5.1　总结

长期以来度量空间理论都是一般拓扑学研究的中心课题, 对可度量性的推广产生了广义度量空间理论. 研究广义度量空间, 不仅可以丰富一般拓扑学的空间种类, 也能更进一步地增加对度量空间的理解. R.E. Hodel [55] 指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了我们对于度量空间的理解, 此外, 拓扑学家正不断地寻求更广泛的空间类使得一些特别重要的结果成立. 如 Dugundji 扩张定理和 Borsuk 同伦扩张定理, 在这些空间类上成立. 所以, 从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向之一, 期间所取得的广义度量空间理论的成就已总结在一些重要的论著中, 如 A.V.Arhangel'skiĭ 的 "Mappings and spaces" [3]；D.K. Burke 和 D.J. Lutzer 的 "Recent advances in the theory of generalized metric spaces" [26]; 高国士的《拓扑空间论》[46]; G. Gruenhage 的 "Generalized metric spaces" [49]; R.E. Hodel 的 "A history of generalized metrizable spaces"[55]; 儿玉之宏和永见启应的《位相空间论》[59]; 林寿的《点可数覆盖与序列覆盖映射》[67] 和《广义度量空间与映射》[66]；K. Morita 和 J. Nagata 的《Topics in General Topology》[83]; J. Nagata 的 "Remarks on metrizability and generalized metric spaces" [85].

拓扑结构与代数结构的结合形成了拓扑代数结构, 如拓扑群、拓扑环、拓扑域等. 群赋予合理的拓扑能使得拓扑不变量发生很大的变化. 如, Pontryagin [93] 证明了每一 T_0 拓扑群是完全正则的; G. Birkhoff [20] 和 S. Kakutani [58] 分别独立证明了每一第一可数的拓扑群是可度量化的. 这使得拓扑学工作者发现具有代数结构的拓扑空间自身具有着很好的拓扑性质, 从而引起了人们对拓扑代数的浓厚兴趣, 一些有趣且重要的结果也不断涌现. 特别地, A.V.Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 的专著《Topological Groups and Related Structures》[10] 总结了国际上关于拓扑代数的研究成果, 评述了学科的发展趋势, 其中提出的大量问题成为该方向最有价值的研究线索.

近年来, 我国学者在拓扑代数中做了大量重要的工作, 其主要贡献之一就是把广义度量空间理论应用于拓扑代数的研究. 2010 年, 刘川和林寿在文章 "Generalized metric spaces with algebraic structures" [73] 中首次明确地阐述用广义

度量空间理论研究拓扑代数的思想. 随后, 林福财的《拓扑代数与广义度量空间》[62] 和李丕余等的《仿拓扑群和半拓扑群的若干专题》 [60] 对拓扑代数中的广义度量方法做了更进一步的介绍和总结. 这无疑表明广义度量理论与拓扑代数的结合不但会促进学科之间融合与发展, 而且会碰撞出新的美丽火花. 其中比较重要的结果有, P.J. Nyikos [87] 证明了弱第一可数的拓扑群是可度量化的; T. Banakh 和 A. Ravsky 证明了第一可数的 Hausdorff 仿拓扑群是次可度量空间 [16]. 不难发现, 可数性在其中发挥着重要的作用. 因此, 作为其核心组成之一的网络、k 网络、cs^* 网络、wcs^* 网络等网络理论无疑成为了研究的焦点之一. 为了进一步地研究可数性空间的内在构造, T. Banakh 在 2015 年引入了 (strict) Pytkeev 网络的概念, 并证明了可数的 (strict) Pytkeev 网络是 k 网络 (cs^* 网络), 同时说明了其逆在 k 空间 (Fréchet-Urysohn 空间) 中同样成立 [11]. 与此同时, S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol [43] 提出了 cp 网络、ck 网络和 cn 网络等概念, 并证明了若拓扑空间 X 在点 x 处具有可数 cn 网络, 则 X 在点 x 处具有可数 tightness [43, 命题 2.3]. 随后, 由各种特定的 Pytkeev 网络、cp 网络、ck 网络及 cn 网络所定义的新的空间相继被提出, 例如 $\mathfrak{P}_0$ 空间 [11]、$\mathfrak{P}$ 空间 [43]、strict σ 空间 [43]、strict $\aleph$ 空间 [43] 等. 这些空间在广义度量空间, 基数函数, 函数空间, 拓扑群及拓扑向量空间中都扮演着极其重要的角色. 这无疑为一般拓扑学的研究注入了新的活力.

下面, 本人将从四个方面总结本文的主要工作并说明今后拟研究的方向.

本文选择近年来拓扑学工作者关注的 Pytkeev 网络作为主要研究内容. 首先, 作者系统讨论了具有特定 (strict) Pytkeev 网络的空间的基本性质, 包含它与各类网络之间的关系, 覆盖性质, 映射性质等. 主要证明了: 拓扑空间中的点可数 Pytkeev 网络是拟 k 网络; 具有点可数 Pytkeev 网络的空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是 M 空间; 具有点可数 cn 网络的拓扑空间是亚 Lindelöf 的 D 空间; 闭映射和有限到一伪开映射保持 Pytkeev 网络; 伪开映射保持 cn 网络; 闭映射保持具有点可数 Pytkeev 网络的空间. 同时, 给出几个例子说明某些网络在某些空间中不能相互转化以及具有特定 Pytkeev 网络的空间不能被一些映射保持. 但是, 还有一些网络之间的关系并没有搞清楚, 如点可数的 Pytkeev 网络是不是 ck 网络. 所以本人将继续研究具有某种特定 (strict) Pytkeev 网络空间的基本性质, 进一步的确立其与各类网络之间的关系, 研究具有可数 (strict) Pytkeev 网络或 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络的空间的映射性质, 建立 $\mathfrak{P}_0$ 空间或者 $\mathfrak{P}$ 空间与可分度量空间或者度量空间的之间的映射联系. 这是以后继

续要考虑和研究的方向之一.

然后, 作者结合 sensor 族和 Pytkeev 网络的概念, 引入了具有 sensor 的 strict Pytkeev 网络 (简称: sp 网络) 的概念, 系统讨论了具有特定 sp 网络的空间的性质以及它们与各种广义度量空间类之间的联系. 主要证明了: 拓扑空间 X 是具有点可数 sp 网络的 k 空间当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映像; 具有点可数 sp 网络的正则 feebly 紧空间有点可数基; 拓扑空间 X 是层空间当且仅当 X 是具有 σ 闭包保持 sp 网络的正则空间; 具有 σ 局部有限 sp 网络的正则空间具有 σ 离散 sp 网络. 但是, 仍然还存在很多问题没有研究清楚, 如: 具有点可数 sp 网络的可分空间是否具有可数 sp 网络. 所以本人将继续研究具有某种特定 sp 网络空间, 进一步细化其与各类网络之间的关系, 这是以后继续要考虑和研究的方向之一.

随后, 作者在文中构造了几个具有下述性质的例子: 存在度量空间的商 s 映像 X, 使 X 不具有可数伪特征; 存在闭映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是具有紧可数基的空间, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 但 f 不是边缘 s 映射; 存在由具有可数 sn 网络空间 X 到拓扑空间 Y 的序列覆盖映射 f, 但 f 不是 1 序列覆盖映射. 证明了对于可数个具有点可数 k 网络的 k 空间的乘积空间 X, 其子空间 Y 具有点可数基当且仅当 Y 具有可数 fan-tightness, 引入了 p-Pytkeev 网络的概念, 简化了蔡长勇和林寿 [27] 的定理: "具有点可数 p-k 网络的 totally 可数紧空间是可度量化的"的证明过程. 这些结果很多只是部分回答了相关问题, 所以对问题的进一步研究, 这是以后继续要考虑和研究的方向之一.

最后, 作者讨论了 sp 特征在拓扑代数中的一些应用, 证明了对于拓扑群 X 有 $spnw(X) = d(X)sp_\chi(X)$, 并说明拓扑群 X 是可度量的化当且仅当 X 是具有可数 sp 特征的 k 空间, 举例说明存在具有可数 strict Pytkeev 网络的拓扑群 X, 使其是序列空间, 但 X 不是 Fréchet-Urysohn 空间. 最后, 利用拓扑群构造了一个例子, 此例子说明在 **CH** 下存在具有点可数 k 网络的可数紧拓扑群 X, 使其具有可数 tightness, 但不可度量化. 有关 sp 网络在拓扑代数中的应用的研究才刚刚起步, 这方面的理论还不成熟, 因此这也是以后要考虑和研究的方向之一.

关于 Pytkeev 网络的研究刚刚兴起, 其成果远不如 k 网络、cs 网络及 wcs^* 网络等网络的研究成果那样丰富多彩. 本文仅研究了其在广义度量空间及拓扑代数中的应用, 主要对问题 0.0.1-0.0.13 进行了回答或者部分回答, 其他的拓扑空间并未讨论, 如函数空间、拓扑向量空间等, 显然这些都是今后续要考虑和研

究的方向之一.

§5.2　一些尚未解决的问题

本节将列举一些有关 Pytkeev 网络的问题且给出些简单的评论.

本文着重讨论了 Pytkeev 网络与各网络之间的关系, 并得到了部分结果, 但有一些网络并没有讨论, 如文献 [43] 中的 ck 网络并没有讨论, 所以下述问题仍然需要进一步地研究.

问题 5.2.1 *[43] 一些不同类型的网络在哪些拓扑空间中是一致的?*

E.A. Michael [79] 证明了正则空间 X 是 $\aleph_0$ 空间当且仅当 X 是可分度量空间的紧覆盖映像; 李招文证明了 [61, 定理 4] 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖 $mssc$ 映像. 所以很自然地有以下问题.

问题 5.2.2 *[43, 问题 6.8] 怎么把 $\mathfrak{P}_0$ 空间或者 $\mathfrak{P}$ 空间刻画为可分度量空间或者度量空间的某种映像?*

根据定义容易验证具有强 Pytkeev 性质的空间具有可数 cs^* 特征 [106, p. 8], 且在一般拓扑空间中, 逆命题不成立. 因此, 在拓扑群中我们有下述问题.

问题 5.2.3 *[44, 问题 8] 设 X 是具有可数 cs^* 特征的拓扑群, 若 X 具有 Pytkeev 性质, 则 X 是否有强 Pytkeev 性质?*

在自由拓扑群中, 有下述经典结果: 若 X 是 $\aleph_0$ 空间, 则自由拓扑群 $F(X)$ 是 $\aleph_0$ 空间 [9, 定理 4.1], 所以很自然地有以下问题.

问题 5.2.4 *[11, 问题 3.14] 设 X 是 (序列) $\mathfrak{P}_0$ 空间, 则 $F(X)$ 是 $\mathfrak{P}_0$ 空间吗?*

更进一步地, 林福财、A. Ravsky 和张静提出了下述问题.

问题 5.2.5 *[63, 问题 3.15] 设 X 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 且具有通常拓扑, 则 $F(X)$ 是 $\mathfrak{P}_0$ 空间吗?*

在函数空间中, E.A. Michael [79] 证明了下述经典结果: 若空间 X,Y 是 $\aleph_0$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间, 其中函数空间 $C_k(X,Y)$ 赋予紧开拓扑. L. Foged [36] (P. O'Meara [75]) 证明了若 X 是 (仿紧) $\aleph_0$ 空间, Y 是 $\aleph$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 是 (仿紧) $\aleph$ 空间. T. Banakh 证明了若 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 $\mathfrak{P}_0$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 是 $\mathfrak{P}_0$ 空间. S.S. Gabriyelyan 和 J. Kąkol [43] 证明了若 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 $\mathfrak{P}$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 有强 Pytkeev 性质, 并提出了下列问题.

问题 5.2.6 *[43, 问题 6.3] 设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 (仿紧) strict $\aleph$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 是 (仿紧) strict $\aleph$ 空间吗?*

问题 5.2.7 *[43] 设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 (仿紧) $\mathfrak{P}$ 空间, 则 $C_k(X,Y)$ 是 (仿紧) $\mathfrak{P}$ 空间吗?*

问题 5.2.8 *[44, 问题 3] 设 X 是非可分的度量空间且 $C_k(X)$ 具有 Pytkeev 性质, 则 $C_k(X)$ 是否有强 Pytkeev 性质?*

下面将本文提出的一些尚未解决的问题集中, 供进一步研究.

问题 5.2.9 *(问题 0.0.2) 设 X 是具有 σ 局部有限 (strict) Pytkeev 网络的正则空间, 则 X 是否有 σ 离散 (strict) Pytkeev 网络?*

问题 5.2.10 *(问题 2.1.18) 设 X 是正则的 q 空间, 若 X 具有可数 cn 特征, 则 X 是第一可数空间吗?*

问题 5.2.11 *(问题 2.2.14) 正规的 $\mathfrak{P}$ 空间是仿紧空间吗?*

问题 5.2.12 *(问题 2.3.14) 完备映射是否保持具有点可数 strict Pytkeev 网络的空间?*

问题 5.2.13 *(问题 3.2.15) 具有点可数 sp 网络的 $\aleph_0$ 空间是 $\mathfrak{P}_0$ 空间吗?*

问题 5.2.14 *(问题 3.2.16) 怎么把具有点可数 sp 网络的空间刻画为度量空间的某种映像?*

参考文献

[1] A.V. Arhangel'skiĭ, An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts (in Russian) [J], Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1959, 126: 239-241.

[2] A.V. Arhangel'skiĭ, Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces (in Russian) [J], Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1963, 153: 743-746.

[3] A.V.Arhangel'skiĭ, Mappings and spaces [J], Russian Math. Surveys, 1966, 21: 115-162.

[4] A.V. Arhangel'skiĭ, A construction of a Fréchet-Urysohn space, and some convergence concepts [J], Comment. Math. Univ. Carolin., 2010, 51 (1): 99-112.

[5] A.V. Arhangel'skiĭ, Components of first-countability and various kinds of pseudoopen mappings [J], Topol. Appl., 2011, 158: 215-222.

[6] A.V.Arhangel'skiĭ, A. Bella, Countable fan-tightness versus countable tightness [J], Comment. Math. Univ. Carolin., 1996, 37 (3): 567-578.

[7] A.V.Arhangel'skiĭ, R.Z. Buzyakova, Addition theorem and D-spaces [J], Comment. Math. Univ. Carolin., 2002, 43 (4): 653-663.

[8] A.V. Arhangel'skiĭ, S.P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces [J], Michigan Math. J., 1968, 15: 313-320.

[9] A.V. Arhangel'skiĭ, O.G. Okunev, V.G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces [J], Topol. Appl., 1989, 33: 63-76.

[10] A.V. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures [M], Atlantis Press and World Sci., Atlantis, Paris, 2008.

[11] T. Banakh, $\mathfrak{P}_0$-spaces [J], Topol. Appl., 2015, 195: 151-173.

[12] T. Banakh, The strong Pytkeev* property of topological spaces [J], http://arXiv: 1607.03599v3.

[13] T. Banakh, V. Bogachev, A. Kolesnikov, k^*-metrizable spaces and their applications [J], J. Math. Sci., 2008, 155 (4): 475–522.

[14] T. Banakh, S.S. Gabriyelyan, On the C_k-stable closure of the class of (separable) metrizable spaces [J], Monatsh. Math., 2016, 180: 39-643.

[15] T. Banakh, A. Leiderman, The strong Pytkeev property in topological spaces [J], Topol. Appl., 2017, 227: 10-29.

[16] T. Banakh, A. Ravsky, On the submetrizability number and i-weight of quasi-uniform spaces and paratopological groups [J], Topol. Proc., 2016, 47: 221-259.

[17] T. Banakh, A. Ravsky, Each regular paratopological group is completely regular [J], Proc. Am. Math. Soc., 2017, 145: 1373-1382.

[18] T. Banakh, L. Zdomskyĭ, The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs^*-character [J], Appl. Gen. Topol., 2004, 5: 25-48.

[19] R.H. Bing, Metrization of topological spaces [J], Canad. J. Math., 1951, 3: 175-186.

[20] D.K. Birkhoff, A note on topological groups [J], Comput. Math., 1936, 3: 427-430.

[21] J.R. Boone, F. Siwiec, Sequentially quotient mappings [J], Czech. Math. J., 1976, (26): 174-182.

[22] C.R. Borges, On stratifiable spaces [J], Pac. J. Math., 1966, 17: 1-16.

[23] C.R. Borges, A.C. Wehrly, A study of D-spaces [J], Topol. Proc., 1991, 16: 7-15.

[24] D.K. Burke, Covering properties [J], in: K. Kunen, J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 347-422

[25] D.K. Burke, Weak-bases and D-spaces [J], Comment. Math. Univ. Carolin., 2007, 48 (2): 281-289.

[26] D.K. Burke, D.J. Lutzer, Recent advances in the theory of generalized metric spaces [J], in: Topol. Proc. 9th Ann. Spring Topological Conf. (Memphis State Univ., 1975), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, V. 24, Marcel Dekker Inc., New York, 1976, 1-70.

[27] Z.Y. Cai, S. Lin, Sequentially compact spaces with a point-countable k-network [J], Topol. Appl., 2015, 193: 162-166.

[28] J.G. Ceder, Some generalizations of metric spaces [J], Pac. J. Math., 1961, 11: 105-125.

[29] E.K. van Douwen, Simultaneous extension of continuous functions [D], Thesis, Vrije University, Amsterdam, 1975.

[30] E.K. van Douwen, W. Pfeffer, Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces [J], Pac. J. Math., 1979, 81: 371-377.

[31] T. Eisworth, On countably compact spaces satisfying wD hereditarily [J], Proceeding of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT), 1999, 24: 143-151.

[32] R. Engelking, General Topology [M], Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[33] X.F. Feng, K. Tamano. Coutably fan-tight subspaces of a countable product of Lašnev spaces are metrizable [J], Topol. Proc., 1997, 22: 191-196.

[34] V.V. Filippov, The perfect image of a paracompact feathered space [J], Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1967, 176 (3): 533-535 (in Russian); Soviet Math. Dokl. 1967, 8: 1151-1153 (English translation).

[35] L. Foged, Weak bases for topological spaces [J], Saint Louis: Washington University, 1979.

[36] L. Foged, Characterizations of $\aleph$-spaces [J], Pac. J. Math., 1984, 110: 59-63.

[37] L. Foged, Normality in k-and $\aleph$-spaces [J], Topol. Appl., 1986, 22: 223-240.

[38] L. Foged, A characterization of closed images of metric spaces [J], Proc. Am. Math. Soc., 1989, 95: 487-490.

[39] S.P. Franklin, Spaces in which sequences suffice [J], Fund. Math., 1965, 57: 107-115.

[40] S.P. Franklin, B.V.S. Thomas, A survey of k_ω-spaces [J], Topol. Proc., 1977, 2: 111-124.

[41] S.S. Gabriyelyan, A characterization of free locally convex spaces over metrizable spaces which have countable tightness [J], http://arxiv: 1407.1532v1.

[42] S.S. Gabriyelyan, J. Kąkol, On topological spaces and topological groups with certain local countable networks [J], Topol. Appl., 2015, 190: 59-73.

[43] S.S. Gabriyelyan, J. Kąkol, On $\mathfrak{P}$-spaces and related concepts [J], Topol. Appl., 2015, 191: 178-198.

[44] S.S. Gabriyelyan, J. Kąkol, A. Leiderman, The strong Pytkeev property for topological groups and topological vector spaces [J], Monatsh. Math., 2014, 175: 519-542.

[45] S.S. Gabriyelyan, J. Kąkol, A. Leiderman, On topological groups with a small base and metrizability [J], Fund. Math., 2015, 229: 129-158.

[46] 高国士, 拓扑空间论 (第 2 版) [M], 北京: 科学出版社, 2008.

[47] Z.M. Gao, $\aleph$-space is invariant under perfect mappings [J], Questions Answers Gen. Topology, 1987, 5: 271-279.

[48] G. Gruenhage, Stratifiable spaces are M_2 [J], Topol. Proc., 1976, 1: 221-225.

[49] G. Gruenhage, Generalized metric spaces [J], in: K. Kunen, J.E. Vaughan, Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984: 423-501.

[50] G. Gruenhage, Are stratifiable spaces M_1 [J]? in: E. Pearl ed., Open Problems in Topology II, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, 2007: 143-150.

[51] G. Gruenhage, E.A. Michael, Y. Tanaka, Spaces determined by point-countable covers [J], Pac. J. Math., 1984, 113 (2): 303-332.

[52] J.A. Guthrie, A characterization of $\aleph_0$-spaces [J], Gen. Top. Appl., 1971, 1: 105-110.

[53] A. Hajnal, I. Juhasz, A separable normal topological group need not be Lindelöf [J], Gen. Top. Appl., 1976, 6: 195-205.

[54] R.W. Heath, D.J. Lutzer, P.L. Zenor, Monotonically normal spaces [J], Trans. Am. Math. Soc., 1973, 178: 481-493.

[55] R.E. Hodel, A history of generalized metrizable spaces [J], in: C.E. Aull, R. Lowen, Handbook of the History of General Topology, V. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998: 541-576.

[56] T. Hoshina, On the quotient s-images of metric spaces [J], Sci. Dep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A, 1970, 10: 265-268.

[57] H.J.K. Junnila, Neighbornets [J], Pac. J. Math., 1978, 76: 83-108.

[58] S. Kakutani, Über der Metrization der Topologischen Gruppen [J], Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, 12: 82-84.

[59] 儿玉之宏, 永见启应著, 方嘉琳译, 位相空间论[M], 北京: 科学出版社, 1984.

[60] P.Y. Li, L.H. Xie, L. Mou, C.T. Lei, Some Topics in Paratopological and Semitopological Groups [M], Shenyang: Northeastern University Press, 2014.

[61] Z.W. Li, A note on $\aleph$-spaces and g-metrizable spaces [J], Czechoslov. Math. J., 2005, 55: 803-808.

[62] 林福财, 拓扑代数与广义度量空间[M], 厦门: 厦门大学出版社, 2012.

[63] F.C. Lin, A. Ravsky, J. Zhang, Countable tightness and $\mathfrak{G}$-bases on free topological groups [J], http://arxiv: 1512.07515v6.

[64] 林寿, 关于序列覆盖 s 映射[J], 数学进展, 1996, 25: 548-551.

[65] S. Lin, A note on the Arens' space and sequential fan [J], Topol. Appl., 1997, 81 (3): 185-196.

[66] 林寿, 广义度量空间与映射 (第 2 版) [M], 北京: 科学出版社, 2007.

[67] 林寿, 点可数覆盖与序列覆盖映射 (第 2 版) [M], 北京: 科学出版社, 2015.

[68] S. Lin, Z.Y. Cai, Closed mappings, boundary-compact mappings and sequence-covering mappings [J], Houston J. Math., 2016, 42 (3): 1059-1078.

[69] S. Lin, Y. Tanaka, Point-countable k-networks, closed maps, and related results [J], Topol. Appl., 1994, 59 (1): 79-86.

[70] S. Lin, P.F. Yan, Sequence-covering mappings of metric spaces [J], Topol. Appl., 2001, 109 (3): 301-314.

[71] S. Lin, Z.Q. Yun, Generalized Metric Spaces and Mappings [M], Atlantis Studies in Mathematics 6, Atlantis Press, Paris, 2016.

[72] 林寿, 张静, 弱基与度量空间的紧覆盖映像[J], 数学物理学报, 2013, 33A (3): 483-493.

[73] C. Liu, S. Lin, Generalized metric spaces with algebraic structures [J], Topol. Appl., 2010, 157: 1966-1974.

[74] V.I. Malykhin, G. Tironi, Weakly Fréchet-Urysohn and Pytkeev spaces [J], Topol. Appl., 2000, 104: 181-190.

[75] P. O'Meara, A metrization theorem [J], Math. Nachr., 1970, 45: 69-72.

[76] P. O'Meara, On paracompactness in function spaces with the compact open topology [J], Proc. Am. Math. Soc., 1971, 29: 183-189.

[77] E.A. Michael, The product of a normal space and a metric space need not be normal [J], Bull. Am. Math. Soc., 1963, 69: 375-376.

[78] E.A. Michael, A note on closed maps and compact sets [J], Israel J. Math., 1964, 2: 173-176.

[79] E.A. Michael, $\aleph_0$-spaces [J], J. Math. Mech., 1966, 15 (6): 983-1002.

[80] E.A. Michael, A quintuple quotient quest [J], Gen. Top. Appl., 1972, 2: 91-138.

[81] J.V. Mill, G.M. Reed, Open Problems in Topology [M], Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990.

[82] K. Morita, On the product of a normal space with a metric spaces [J], Proc. Japan Acad., 1963, 89: 148-150.

[83] K. Morita, J. Nagata, Topics in General Topology [M], Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1989.

[84] J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability [J], J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., 1950, 1: 93-100.

[85] J. Nagata, Remarks on metrizability and generalized metric spaces [J], Topol. Appl., 1999, 91: 71-77.

[86] T. Nogura, D. Shakhmatov, Y. Tanaka, α_4-Property versus A-property in topological spaces and groups [J], Studia Sci. Math. Hung., 1977, 33: 351-362.

[87] P.J. Nyikos, Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups [J], Proc. Am. Math. Soc., 1981, 83: 793-801.

[88] E. Pearl, Problems from Topology Proceedings [M], Topology Atlas, Toronta, 2003.

[89] E. Pearl, Open Problems in Topology II [M], Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 2007.

[90] L.X. Peng, On weakly monotonically monolithic spaces [J], Comment. Math. Univ. Carolin., 2010, 51 (1): 133-142.

[91] L.X. Peng, A note on transitively D-spaces [J], Czechoslov. Math. J., 2011, 61: 1049-1061.

[92] V.I. Ponomarev, Axioms of countability and continuous mappings (in Russian) [J]. Bull. Acal. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 1960, 8: 135-140.

[93] L.S. Pontryagin, The theory of topological commutative groups [J], Ann. Math., 1934, 35: 361-388.

[94] E.G. Pytkeev, Maximally decomposable spaces [J], Trudy Mat. Inst. Steklov., 1983, 154: 209-213 (in Russian); Proc. Steklov Inst. Math., 1984, 4: 225-230 (English translation).

[95] E.A. Reznichenko, Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups [J], Topol. Appl., 1994, 59: 233-244.

[96] M. Sakai, Countable size nonmetrizable spaces which are stratifiable and κ-metrizable [J], Proc. Am. Math. Soc., 1994, 122 (1): 265-273.

[97] M. Sakai, Remarks on spaces with special type of k-networks [J], Tsukuba J. Math., 1997, 21: 443-448.

[98] M. Sakai, On k-networks and weak bases for spaces [J], Topol. Appl., 2010, 157: 2383-2388.

[99] F. Siwiec, Sequence-covering and countably bi-quotient mappings [J], Appl. Gen. Topol., 1971, 1: 143-154.

[100] Yu. Smirnov, On metrization of topological spaces (in Russian) [J], Uspechi. Mat. Nauk., 1951, 6 (6): 100-111.

[101] L.A. Steen, J.A. Jr Seebach, Counterexamples in Topology [M], 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1978 (Dover Publications Inc, New York, 1995).

[102] R. M. Stephenson, Jr, Symmetrizable, $\mathscr{F}$, and weakly first countable spaces [J], Can. J. Math., 1977, 3: 480-488.

[103] K. Tamano, Closed images of metric spaces and metrization [J], Topol. Proc., 1985, 10: 177-186.

[104] Y. Tanaka, Metrizability of certain quotient spaces [J], Fund. Math., 1983, 119: 157-168.

[105] Y. Tanaka, Point-countable covers and k-networks [J], Topol. Proc., 1987, 12: 327-349.

[106] B. Tsaban, L. Zdomskyĭ, On the Pytkeev property in spaces of continuous functions II [J], Houston J. Math., 2009, 35 (2): 563-571.

[107] 王汉锋, 贺伟, Pytkeev 空间与弱 FU 空间的几个注记[J], 东北师大学报(自然科学版), 2016, 48 (2): 44-47.

[108] 燕鹏飞, 林寿, 江守礼, 序列覆盖的闭映射保持可度量性[J], 数学学报, 2004, 47 (1): 87-90.

作者攻读博士学位期间的工作目录

1 . Xin Liu (刘鑫), Chuan Liu, *Notes on spaces with certain point-countable families*, Houston J. Math, 录用待发表. (SCI)

2 . Xin Liu (刘鑫), Shou Lin, *On spaces defined by Pytkeev networks*, submitted.

3 . Xin Liu (刘鑫), Chuan Liu, Shou Lin, *Strict Pytkeev networks with sensors and their applications in topological groups*, submitted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师 ______________

作者 ______________

二零一八年三月二十五日

致　谢

本文是在导师林寿教授的悉心指导下完成的. 三年来林老师在学习和生活等方面都给予了我很大的鼓励和支持. 林老师严谨的科研态度和精益求精的工作作风, 尤其是在指导学生时不厌其烦, 耐心指导的育人精神深深地感染着我, 为我今后的学习和工作树立了榜样. 作者在此对我的导师林寿教授致以诚挚的谢意和崇高的敬意.

再就是要感谢三年来数学学院帮助和教育过我的各位领导、老师. 尤其是要感谢寇辉教授、张德学教授、张树果教授等. 从他们身上我收获良多，谨此一并表达我的谢意.

特别感谢美国俄亥俄州立大学曾维尔分校的刘川教授. 刘川教授对作者的研究提供了很多建设性的意见, 使得作者的研究工作能顺利的展开及持续的进行下去.

感谢闽南师范大学李进金教授、李克典教授、林福财教授等. 作者在闽南师范大学调研期间, 他们给予了很多帮助和指导. 特别是闽南师范大学举行的各种学术活动, 让作者收获良多. 感谢闽南师范大学的李长青博士、张静博士、李气芳等在学习、住宿等方面提供的帮助. 感谢闽南师范大学的杨洁、李嘉达、凌学炜等同学为作者查阅文献提供了很多帮助.

感谢泰州学院沈荣鑫教授、五邑大学谢利红副教授和广西师范学院蔡长勇副教授等与作者无私的分享研究经验.

还要感谢唐忠宝同学在生活中为作者提供了很多便利, 学习中与作者进行了很多有益的学术交流.

特别感谢我的师母长期以来的关心和爱护. 感谢我的家人特别是我的爱人邵辉对我的支持.