四 川 大 学

博 士 学 位 论 文

题 目 关于拟 (半) 拓扑群与对称积的研究

作 者 唐 忠 宝 完成日期 2018 年 3 月 25 日

培 养 单 位 四川大学

指 导 教 师 林 寿 教授

专 业 基 础 数 学

研 究 方 向 拓 扑 学

授予学位日期 年 月 日

摘　要

关于拟 (半) 拓扑群与对称积的研究

基础数学专业

研究生　唐忠宝　　　**指导教师**　林寿

本文主要致力于拓扑代数中拟 (半) 拓扑群理论及对称积的广义度量性质与覆盖性质的研究, 共分四部分.

第一部分 (即第二章): 主要讨论拟拓扑群的广义度量性质, 其中主要证明了 (1) 拟拓扑群 G 是第一可数的当且仅当对 G 的任意闭子群 H, 商空间 G/H 是半度量的 (定理 2.1.6); (2) 下述结论相互等价: (a) G 关于某个连续左不变半度量是一个可半度量化的拟拓扑群; (b) G 关于某个左不变拟度量是一个可拟度量化的拟拓扑群; (c) G 是一个可度量化的拓扑群 (定理 2.1.10); (3) 每一 sn 可度量且乘积运算序列连续的半拓扑群 G 是 so 可度量的 (定理 2.2.4); (4) 存在一个乘积运算序列连续的伪紧拟拓扑群使其不是拓扑群 (例 2.3.1); (5) 乘积运算序列连续的序列拟拓扑群 G 含有 S_ω 的闭拷贝当且仅当其含有 S_2 的闭拷贝 (定理 2.3.5), 这部分回答了 [138, 问题 3.11]; (6) 若 G 是乘积运算序列连续的序列拟拓扑群, 则下列结论相互等价: (a) G 是序列的 α_4 空间; (b) G 是 Fréchet 空间; (c) G 是强 Fréchet 空间 (定理 2.3.6).

第二部分 (即第三章): 讨论拟拓扑群上的基数不变量和三空间性质. 3.1 节讨论拟拓扑群中的基数不变量. 每个拓扑群 G 满足下列式子: (1) $\pi\chi(G) = \chi(G)$; (2) $w(G) = \pi w(G)$; (3) $w(G) = d(G)\cdot\chi(G)$; (4) $w(G) = l(G)\cdot\chi(G)$; (5) $w(G) = c(G)\cdot\chi(G)$; (6) $w(G) = ib(G)\cdot\chi(G)$; (7) $w(G) = nw(G)\cdot\chi(G)$. 与拓扑群不同的是, 我们构造反例说明等式 (1)-(7) 在拟拓扑群中都不成立 (例 3.1.1, 3.1.2 和 3.1.3). 在 3.2 节中, 我们研究拟拓扑群中的三空间性质. 通过构造例子说明可度量性、第一可数性、第二可数性及伪紧性都不是拟拓扑群的三空间性质 (例 3.2.2 和 3.2.4 与命题 3.2.7).

第三部分 (即第四章): 主要讨论了拟 (半) 拓扑群中的连通性, 其中主要证明了 (1) 半拓扑群含单位元的连通分支 (道路连通分支) 是该群的不变子群 (命题 4.2.2 和 4.2.7); (2) 全体遗传不连通拟拓扑群是全体拟拓扑群的反射 (定理 4.2.5); (3) 任意一个拟 (半) 拓扑群 G 可同构嵌入到一个道路连通且局部道路连

通的拟 (半) 拓扑群 $G^{\bullet}$ (定理 4.3.5); (4) 设 κ 是无限基数, G 是半拓扑群且具有如下性质之一: (a) $\chi(G) \leq \kappa$; (b) $nw(G) \leq \kappa$; (c) $d(G) \leq \kappa$; (d) G 是 κ-narrow, 则 $G^{\bullet}$ 也具有相同的性质 (定理 4.3.6).

第四部分 (即第五章): 主要讨论对称积的广义度量性质与覆盖性质. 5.2 节获得了对任意 $n \in \mathbb{N}$, 关于 X^n 的像的一般稳定性定理 (定理 5.2.1). 作为一般稳定性定理的应用, 我们考虑拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 列举或证明了 43 个满足一般稳定性定理的拓扑性质, 并在定理 5.2.9 中给出了 [60, 问题 3.35] 的肯定回答. 5.3 节获得了关于 X^n 的像与 $\mathscr{F}_n(X)$ 的逆像的一般稳定性定理 (定理 5.3.1). 作为这一定理的应用, 我们考察拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得对空间 X 及任意 $n \in \mathbb{N}$, 积空间 X^n 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 列举或证明了 25 个满足这一定理的拓扑性质, 并在例 5.3.16 中给出了 [60, 问题 3.6] 的否定回答.

最后, 本文探讨了拟拓扑群的几个拟研究方向, 并列举了拟拓扑群中的一些问题供进一步研究.

关键词: 拓扑群; 半拓扑群; 拟拓扑群; 广义度量性质; 基数不变量; 三空间性质; 对称积.

Abstract

Researches on quasi(semi)topological groups and symmetric products

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: Tang Zhongbao **Supervisor:** Lin Shou

This thesis is devoted to studying quasitopological groups and semitopological groups in the theory of topological algebra, and consider some generalized properties and covering properties of the symmetric products. The contents are arranged into four parts.

In the first part (Chapter 2), we consider some generalized metrizable properties in quasitopological groups, where we mainly show that (1) let G be a quasitopological group, then G is first-countable if and only if for every closed subgroup H of G the quotient space G/H is semi-metrizable (Theorem 2.1.6); (2) the following are equivalent: (a) G is a semi-metrizable quasitopological group with respect to a continuous left-invariant symmetric; (b) G is a quasi-metrizable quasitopological group with respect to a left-invariant quasi-metric; (c) G is a metrizable topological group (Theorem 2.1.10); (3) every snf-countable semitopological group with the sequentially continuous multiplication is sof-countable (Theorem 2.2.4); (4) there exists a pseudocompact quasitopological group with the sequentially continuous multiplication which is not a topological group (Example 2.3.1); (5) if G is a sequential quasitopological group with the sequentially continuous multiplication, then G contains a closed copy of S_ω if and only if it contains a closed copy of S_2 (Theorem 2.3.5), which give a partial answer to [138, Problem 3.11] for quasitopological groups; (6) let G be a quasitopological group with the sequentially continuous multiplication, then the following are equivalent: (a) G is a sequential α_4-space; (b) G is Fréchet; (c) G is strongly Fréchet (Theorem 2.3.6).

In the second part (Chapter 3), we investigate cardinal invariants and three-space properties in quasitopological groups. In section 3.1, cardinal invariants in quasitopological groups are considered. Every topological group G satisfies the following equalities: (1) $\pi\chi(G) = \chi(G)$; (2) $w(G) = \pi w(G)$; (3) $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$; (4) $w(G) = l(G) \cdot \chi(G)$; (5) $w(G) = c(G) \cdot \chi(G)$; (6) $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$; (7)

$w(G) = nw(G) \cdot \chi(G)$. Unlike the situation in topological groups, we construct some examples to show that the equalities (1)-(7) cannot be extended to quasitopological groups (see Examples 3.1.1, 3.1.2 and 3.1.3). In section 3.2, we study the three-space properties in the class of quasitopological groups. Some examples are constructed to show that metrizability, first-countability, second-countability and pseudocompactness are not three-space properties in the class of quasitopological groups (see Examples 3.2.2 and 3.2.4, and Proposition 3.2.7).

In the third part (Chapter 4), we mainly discuss the connectedness in quasi(semi)-topological groups. We obtained that (1) the connected component c_G (arc component $a(G)$), which contains the neutral element, of a semitopological group G is a normal subgroup of G (Theorems 4.2.2 and 4.2.7); (2) the class of all hereditarily disconnected quasitopological groups is a reflective subcategory of the class of all quasitopological groups (Theorem 4.2.5); (3) for every quasi(semi)topological group G, there exists a natural topological isomorphism $i_G : G \to G^{\bullet}$ of G onto a subgroup of the pathwise connected and locally pathwise connected quasi(semi)topological group $G^{\bullet}$ (Theorem 4.3.5); (4) let κ be an infinite cardinal number, and let G be a semitopological group having one of the following properties: (a) $\chi(G) \leq \kappa$; (b) $nw(G) \leq \kappa$; (c) $d(G) \leq \kappa$; (d) G 是 κ-narrow, then the group $G^{\bullet}$ has the same property (Theorem 4.3.6).

In the fourth part (Chapter 5), we study generalized metrizable properties and covering properties of the symmetric products. In section 5.2, we consider the topological properties $\mathscr{P}$ such that a topological space X has the property $\mathscr{P}$ if and only if $\mathscr{F}_n(X)$ does by a general stability theorem on the images of X^n for each $n \in \mathbb{N}$ (Theorem 5.2.1), list or prove 43 topological properties which satisfy the general stability theorem, and give an affirmative answer to [60, Question 3.35] in Theorem 5.2.9. In Section 5.3, we consider the topological properties $\mathscr{P}$ such that for a topological space X and each $n \in \mathbb{N}$, the product X^n has the property $\mathscr{P}$ if and only if $\mathscr{F}_n(X)$ does by another general stability theorem on the images of X^n and the inverse images of $\mathscr{F}_n(X)$ (Theorem 5.3.1), list or prove 25 topological properties which satisfy the general stability theorem, and [60, Question 3.6] is negatively answered in Example 5.3.16.

At last, we discuss some potential research directions in quasitopological groups. Some questions related to quasitopological groups are listed, which may lead us to research in the future.

Key Words: topological groups; semitopological groups; quasitopological groups;

generalized metrizable properties; cardinal invariants ; three-space properties; symmetric products.

引 言

拓扑代数是拓扑与代数的有机融合, 主要指的是以拓扑群及其推广为代表的一类赋予了拓扑结构和代数结构的数学对象, 如拓扑群、仿拓扑群、半拓扑群、拓扑环、拓扑域和拓扑向量空间等 [90]. 它在抽象调和分析、算子理论、微分几何、代数数论、李群理论及拓扑动力系统等诸多领域有着丰富的应用.

设 G 是一个拓扑空间, 又是一个群, 若群的乘法运算 $\mu : G \times G \to G$ 和逆运算 $\nu : G \to G$ 都是连续的, 则称 G 是拓扑群. 作为拓扑代数主要对象的拓扑群理论有两个起源. 其一是 S. Lee 于 19 世纪末创立的李群理论, 见 [88]. 其二是变换群 [83]. 20 世纪初, 比李群更一般的拓扑群引起 D. Hilbert 与 L. Brouwer 的兴趣. L. Brouwer 证明了康托集能自然地嵌入一个交换拓扑群 [30]. 现今所用的拓扑群概念由 F. Leja [82] 与 O. Schreier [137] 分别引进. 此后, 许多著名数学家在拓扑群理论都有重要工作, 如 H. Weyl, A. Weil, L. Pontryagin 与 J. Dieudonné 等.

拓扑群作为群和拓扑的融合, 使群的结构和拓扑不变量都发生显著变化. 一方面, 有了拓扑结构的群具有更好的代数性质. 如, 紧生成局部紧交换拓扑群必拓扑同构于 $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$, 其中 a, b 为非负整数, K 为紧交换群 [84, 定理 3.2.1]; 作为 Pontryagin-van Kampen 对偶定理的推论, 对每一紧的布尔拓扑群 G, 存在基数 κ, 使得 G 拓扑同构于 $\mathbb{Z}(2)^\kappa$. 另一方面, 有了群结构的拓扑空间具有良好的拓扑性质. 例如, 1934 年, L. Pontryagin 证明了每一 T_0 的拓扑群是完全正则的; 1936 年, G. Birkhoff 与 S. Kakutani 各自独立地证明了第一可数的 T_0 拓扑群是可度量化的; 1942 年, N. Bourbaki 证明了每一局部紧的拓扑群是仿紧的. 2008 年, A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 合著“Topological Groups and Related Structures”. 该书在总结前人工作的基础上, 列举了大量公开问题, 为从事拓扑代数的工作者提供了详实、前沿的研究手册, 同时也体现了拓扑代数的勃勃生机.

度量空间理论在一般拓扑学的研究中占据核心位置, 其一般化产生了广义度量空间理论. 所谓广义度量空间是这样的一些空间类, 在某种程度上“接近”度量空间: 有益于刻画可度量性, 具有度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论和技巧能推广到这些空间类. 它们应当在某些拓扑运算下是“稳定的”, 例如, 有限或可数积, 闭子空间, 及完备映射 [63, p. 425]. 对广义度量空间理论的研究是我国拓扑学研究的传统强项, 我国学者在这方面做出了许多突出的贡

献.

广义度量空间理论在拓扑代数的应用既丰富了拓扑代数理论, 又使广义度量空间理论焕发出新的生机. 沈荣鑫和林寿在《数学年刊》上发表的“拓扑群中广义度量性质的一个注记”开启了国内学者关于拓扑代数的研究; 刘川与林寿在国际拓扑学权威期刊《Topology and Its Applications》上发表“Generalized metric spaces with algebraic structures”, 掀起了拓扑代数中研究广义度量性质的热潮. 其后国内许多高校的学者相继投入到拓扑代数的研究中. 例如, 四川大学, 南京大学, 南京师范大学, 首都师范大学, 北京工业大学, 东北大学, 闽南师范大学, 宁德师范学院, 广西师范学院和五邑大学等.

拟拓扑群作为拓扑群的一种推广, 与拓扑群有着很大的不同. 首先, 拟拓扑群的分离性不如拓扑群的好. 已知 T_0 拓扑群是完全正则的, 而拟拓扑群中除 $T_0 \Rightarrow T_1$ 成立外, 关系式 $T_1 \Longrightarrow T_2$ 与 $T_2 \Longrightarrow T_3$ 在拟拓扑群中都不成立. 其次, 由于拟拓扑群关于乘积运算不必连续, 导致拓扑群中的许多经典结果在拟拓扑群中可能不再成立. 如 Comfort 与 Ross [43] 证明了一族伪紧拓扑群的乘积是伪紧的, 每个伪紧的拓扑群都是 precompact. 然而, C. Hernández 与 M. Tkachenko [71] 构造了两个伪紧的拟拓扑群其乘积不是伪紧的; A. Arhangel'skiĭ 与 M. Hušek [11] 构造了伪紧的拟拓扑群不是 precompact. 据作者不完全统计, 涉及拟拓扑群研究的文献目前仅有十几篇 [7, 10, 11, 12, 18, 20, 21, 29, 41, 71, 85, 135, 138, 145]. 而专门研究拟拓群的文献只有 [10, 18, 20, 71, 85, 138, 145]. N. Bourbaki 首次在 [29] 第三章习题中提出拟拓扑群概念, 并在习题中给出了拟拓扑群的一些基本性质, 见 [29, p. 296-302]. 直到 2000 年 A. Arhangel'skiĭ 才再次发表涉及拟拓扑群的论文 [7]. 由此可见关于该课题的研究进展较为缓慢, 拟解决的问题具有一定的难度, 可供探索的空间十分广泛.

作为拓扑群的推广, 一个自然的问题是**拓扑群的哪些结果可以推广到拟拓扑群** [12]? 目前关于拟拓扑群的研究大致分为以下几个方面.

1、关于拟拓扑群的广义度量性质. 沈荣鑫 [138], 李丕余和牟磊 [85] 研究了第一可数的拟拓扑群. 他们各自独立证明了第一可数拟拓扑群是半度量的. 沈荣鑫利用这一结果给出了 [12, 公开问题 3.3.11] 的否定回答. 沈荣鑫, 李丕余和牟磊证明了正则 Baire, 拟可展的拟拓扑群是拓扑群, 这部分解决了 [91, 问题 4.10].

2、拟拓扑群上的半一致结构. 拓扑群上存在几种相容的一致结构 ([12, 第 1.8 节]), 所以自然地考虑拟拓扑群上的情形. B. Batíková [20] 研究了拟拓扑群

上的半一致结构及完备化问题.

3、拟拓扑群中的反例. C. Hernández 和 M. Tkachenko [71] 通过构造拟拓扑群中的反例, 说明拓扑群中的某些性质不能推广到拟拓扑群中. A. Arhangel'skiĭ 和 M. Choban [10] 构造了一些满足特定条件的拟拓扑群.

4、H 闭的拟拓扑群. S. Bardyla, O. Gutik 和 A. Ravsky [18] 讨论了 H 闭的拟拓扑群, 主要证明了拓扑群 G 在拟拓扑群中是 H 闭的当且仅当 G 是 Raĭkov 完备的.

5、拟拓扑群与仿拓扑群的相互关系. I. Sánchez 与 M. Tkachenko [135] 研究了仿拓扑群的拟拓扑群修正. 即对任意仿拓扑群 G, 考虑拟拓扑群 $Q_2(G)$, $Q_2(G)$ 与 G 有相同的群结构, $Q_2(G)$ 的单位元开邻域形如: $UU^{-1}\cap U^{-1}U$, 其中 U 是 G 中单位元的开邻域. 他们研究了仿拓扑群 G 与拟拓扑群 $Q_2(G)$ 之间拓扑性质的关系, 并提出了一系列问题.

从以上可以看出, 关于拟拓扑群的研究目前还没有形成完整的系统. 本文在此基础上, 围绕"拓扑群中哪些结果可以推广到拟拓扑群上"这一基本问题, 继续从拟拓扑群的广义度量性质、基数不变量、三空间性质及连通性几个方面研究拟拓扑群.

作为广义度量空间理论的另一个应用, 本文在 [60] 的基础上继续讨论对称积的广义度量性质, 同时还考虑对称积的覆盖性质.

目　录

第一章　基本术语与记号

约定: 本文所讨论的拓扑空间除第四章外若未特别说明, 均指满足 T_2 分离公理的拓扑空间. 映射与函数是同一概念.

本章介绍一些基本概念与记号.

§1.1　拓扑空间中的术语与记号

1.1.1 基本记号

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{I}$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的自然数集, 正整数集, 有理数集, 无理数集和单位闭区间. ω 也表示最小的无限序数. $\mathfrak{c}$ 表示 $\mathbb{R}$ 的基数.

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑, $\tau^c(X)$ 表示 X 的闭集的全体, 有时简记 $\tau(X)$ 和 $\tau^c(X)$ 分别为 τ, τ^c; $|X|$ 表示集合 X 的势.

对 X 的集族 $\mathcal{P}$ 及 $A \subseteq X$, 记

$$\mathcal{P}_{|A} = \{P \cap A : P \in \mathcal{P}\}.$$

以下分别以 $\chi(X)$, $\psi(X)$, $c(X)$, $d(X)$, $w(X)$, $nw(X)$, 以及 $l(X)$ 表示一空间 X 的特征 (character), 伪特征 (pseudocharacter), 胞腔度 (cellularity), 稠密度 (density), 权 (weight), 网络权 (network weight), 以及 Lindelöf 度 (Lindelöf degree), 其定义分别如下.

特征: $\chi(X) = \sup\ \{\chi(X, x) : x \in X\}$,

其中 X 在点 x 的特征定义为

$\chi(X, x) = \min\ \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ 是 X 在 x 处的邻域基$\} + \omega$.

伪特征: $\psi(X) = \sup\ \{\psi(X, x) : x \in X\}$,

其中 X 在点 x 的伪特征定义为

$\psi(X, x) = \min\ \{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 中的开集族 且 $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}\} + \omega$.

胞腔度: $c(X) = \sup\ \{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 中不相交的非空开集族$\} + \omega$.

稠密度: $d(X) = \min\ \{|S| : S \subseteq X$ 且 $\overline{S} = X\} + \omega$.

权: $w(X) = \min\ \{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 的基$\} + \omega$.

网络权: $nw(X) = \min\ \{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 的网$\} + \omega$.

Lindelöf 度: $l(X) = \min\{\lambda \in \mathrm{Card} :$ 对 X 每一开覆盖 $\mathcal{V}$ 存在子覆盖 满足 $|\mathcal{U}| \leq \lambda\} + \omega$.

1.1.2 空间上的映射

设 X, Y 是空间, 映射 $f : X \to Y$.

对 $A \subseteq X$, f 在 A 处的限制 $f_{|A} : A \to f(A)$ 定义为对 $x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$.

f 称为开映射, 若 $V \in \tau(X)$, 则 $f(V) \in \tau(Y)$.

f 称为闭映射, 若 $F \in \tau^c(X)$, 则 $f(F) \in \tau^c(Y)$.

满映射 f 称为商映射, 若 $U \subseteq Y$, 则 $U \in \tau(Y)$ 当且仅当 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$.

f 称为序列连续的, 若 X 中的序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x \in X$, 则序列 $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $f(x)$.

1.1.3 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为遗传的 (闭遗传的), 若空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一子空间 (闭子空间) 也具有性质 Φ.

(2) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为被映射类 $\mathcal{L}$ 保持 (逆保持), 若满映射 $f : X \to Y$, 其中 $f \in \mathcal{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

§1.2 广义度量空间类

1.2.1 距离函数的推广

设 (X, d) 是一个度量空间, 对正数 ε, 称集 $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ 为 (X, d) 中以 x 为中心的 ε 球形邻域 (或 ε 开球).

定义 1.2.1 *[4] 设 X 是集合, 函数 $d : X \times X \to [0, \infty)$ 称为 X 上的对称距离, 若对任意的 $x, y \in X$, 下述条件成立:*

(1) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

空间 X 称为对称度量空间, 如果存在 X 的对称距离 d, 满足 $U \in \tau(X)$ 当且仅当对任意 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. 这时 d 称为 X 的对称度量.

定义 1.2.2 *[63] 设 d 是 X 上的对称距离. d 称为 X 上的半度量, 若 (X,d) 是对称度量空间, 且对任意 $x \in X$ 及 $\varepsilon > 0$, $x \in B(x,\varepsilon)^{\circ}$. 这时 (X,d) 称为半度量空间*

定义 1.2.3 *[63] 设 X 是集合, 函数 $d : X \times X \to [0,\infty)$ 称为 X 上的拟度量, 若对任意的 $x, y, z \in X$, 下述条件成立:*

(1) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

空间 X 称为拟度量空间, 如果存在 X 上的拟度量 d, 满足对任意 $x \in X$, $\{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ 是 x 的邻域基.

1.2.2 弱第一可数空间类与网

对空间 X, X 中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的, 若各 x_n 是互不相同的. 序列 $\{x_n\}$ 称为是终于子集 $A \subseteq X$ 的, 如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_n : n > m\} \subseteq A$.

空间 X 称为关于覆盖 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑, 如果对于 $A \subseteq X$, A 闭于 X 当且仅当对任一 $P \in \mathcal{P}$, $A \cap P$ 闭于 P.

定义 1.2.4 *空间 X 称为 k 空间 [48, p. 152], 若 X 关于全体紧子集具有弱拓扑.*

定义 1.2.5 *空间 X 的子集 P 称为点 x 的序列邻域, 若 X 中每一收敛于 x 的序列终于 P. X 的子集 U 称为 X 的序列开集, 若 U 是其中每一点的序列邻域. X 的子集 F 称为 X 的序列闭集, 若 $X \setminus F$ 是序列开集. 空间 X 称为序列空间[51], 若 X 的每一序列开集是开的.*

拓扑空间 (X,τ) 的序列余反射 [52] 记为 (X,σ_τ) 或 σX, 其定义为 $U \in \sigma_\tau$ 当且仅当 U 是 (X,τ) 的序列开集. 众所周知, σX 是序列空间 [52, p. 52]; 且 X 与 σX 具有相同的收敛序列 [19, p. 678]. 若 A 是空间 X 的子集, 记 $[A]$ 是 A 的序列闭包, 即 A 中所有收敛序列的极限点的集合.

定义 1.2.6 *[51]* 空间 X 称为 *Fréchet* 空间, 如果对每一 $A \subseteq X$ 以及 $x \in \overline{A}$, 存在 A 中的序列收敛于 x.

定义 1.2.7 *[139]* 空间 X 称为强 *Fréchet* 空间, 若对 X 中的任意递减集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in A_n$ 使得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x.

定义 1.2.8 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{P}$ 是 X 的子集族. 集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 *[2]*, 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in P \subseteq U$. 集族 $\mathcal{P}$ 称为点 $x \in X$ 的网 *[2]*, 若 $x \in \cap\mathscr{P}$ 且对 x 的任意开邻域 U, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subseteq U$.

定义 1.2.9 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 是空间 X 的覆盖且满足对任一 $x \in X$ 有*: (a)* $\mathscr{P}_x$ 是 x 的网*; (b)* 若 $U,V \in \mathscr{P}_x$, 则存在 $W \in \mathscr{P}_x$ 使得 $W \subseteq U \cap V$.

(1) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 *sn* 网*[97]*, 若对每一 $x \in X$, $\mathscr{P}_x$ 中的每一元都是 x 的序列邻域. X 称为 *snf* 可数的*[97]*, 若 X 有 *sn* 网 $\mathscr{P}$ 使得每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的. 正则空间 X 称为 *sn* 度量空间*[57]*, 若 X 具有 σ 局部有限 *sn* 网.

(2) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 *so* 网*[97]*, 若对每一 $x \in X$, $\mathscr{P}_x$ 中的每一元都是 X 的序列开集. X 称为 *sof* 可数的*[97]*, 若 X 有 *so* 网 $\mathscr{P}$ 使得每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的. 正则空间 X 称为 *so* 度量空间*[56]*, 若 X 具有 σ 局部有限 *so* 网.

(3) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基*[4]*, 若对每一 $A \subseteq X$ 及 $x \in A$, 存在 $P \in \mathscr{P}_x$ 使得 $P \subseteq A$, 则 A 是 X 中的开集. X 称为弱第一可数的*[4]*, 若 X 具有弱基 $\mathscr{P}$ 使得每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的. 正则空间 X 称为 g 度量空间 *[140]*, 若 X 具有 σ 局部有限弱基.

空间 X 是弱第一可数的当且仅当 X 是 snf 可数的序列空间 [97, 140]. 显然有下列关系 [48] (逆关系都不成立):

$$\begin{tikzcd}
& \text{弱第一可数空间} \arrow[r] & \text{序列空间} \arrow[r] & k\ \text{空间} \\
\text{第一可数空间} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& \text{强 Fréchet 空间} \arrow[r] & \text{Fréchet 空间} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

定义 1.2.10 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 是空间 X 的覆盖且对每一 $x \in X$ 满足 $x \in \cap\mathscr{P}_x$. $\mathscr{P}$ 称为 X 的 *cs* 网*[67]* *(*cs^* 网*[55])*, 如果 X 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x \in U \in \tau(X)$, 则存在 $P \in \mathscr{P}_x$ 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(*$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的某个子序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$*)* 终于 P 且 $P \subseteq U$. 空间 X 称为 csf 可数的*[98]* *(*cs^*f 可数的*[17])*, 若 X 具有 *cs* 网 $\mathscr{P}$ *(*cs^* 网*)* 使得每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

根据 [17, 命题 2], 空间 X 是 csf 可数的当且仅当 X 是 cs^*f 可数的.

定义 1.2.11 设 (X,τ) 是拓扑空间. 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为 X 的 g 函数, 如果对任意 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{N}$, $x\in g(n+1,x)\subseteq g(n,x)$.

定义 1.2.12 设 κ 是无限基数.

(1) 空间 X 称为 S_κ, 若 X 是把 κ 个非平凡收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间.

(2) 空间 X 称为 S_2 空间 (*Arens* 空间 *[48,* 例 *1.6.19]*), 若 $X=\{\infty\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_n(m):m,n\in\mathbb{N}\}$ (其中对任意 $m,n\in\mathbb{N}$, $\infty,x_n,x_n(m)$ 互不相同) 且其拓扑定义如下: 每一点 $x_n(m)$ 是孤立点; 每一点 x_n 的基本邻域形如 $\{x_n\}\cup\{x_n(m):m>k\}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$; 点 ∞ 的基本邻域形如: $\{\infty\}\cup\bigcup\{V_n:n>k\}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, V_n 是 x_n 的邻域.

§1.3 拓扑代数中的术语与记号

设 $(G,\cdot)$ 表示群, 有时简记为 G. e 表示群 G 的单位元. 任给 $a,b\in G$, 记 $ab=a\cdot b$, a^{-1} 表示 a 的逆元. 对 G 的任意子集 A,B, 记

$$AB=\{ab:a\in A,b\in B\};\ A^n \text{ 表示 } n \text{ 个 } A \text{ 相乘}$$

以及

$$A^{-1}=\{a^{-1}:a\in A\}.$$

对任意 $g\in G$, 定义 $l_g:G\to G$ 为 $l_g(x)=gx$; $r_g:G\to G$ 为 $r_g(x)=xg$. l_g,r_g 分别称为群 G 上关于 g 的*左变换*和*右变换*

定义 1.3.1 设 $(G,\cdot)$ 是群, τ 是 G 上的拓扑.

(1) 如果 G 上所有的左变换关于 τ 连续, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是左拓扑群;

(2) 如果 G 上所有的右变换关于 τ 连续, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是右拓扑群;

(3) 如果 $(G,\cdot,\tau)$ 既是左拓扑群又是右拓扑群, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是半拓扑群;

(4) 如果乘积运算 $\mu:G\times G\to G$ 关于 τ 分离连续且逆运算 $\nu:G\to G$ 关于 τ 连续, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是拟拓扑群;

(5) 如果乘积运算 $\mu:G\times G\to G$ 关于 τ 连续, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是仿拓扑群;

(6) 如果 $(G,\cdot,\tau)$ 既是仿拓扑群又是拟拓扑群, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 是拓扑群.

为表述方便, 以后将 $(G,\cdot,\tau)$ 简记为 G. 根据定义, 上述拓扑代数对象之间有以下关系:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{仿拓扑群} \arrow[dr] & & \text{左拓扑群} \\
\text{拓扑群} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{半拓扑群} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{拟拓扑群} \arrow[ur] & & \text{右拓扑群}
\end{tikzcd}$$

拓扑空间 X 称为齐性空间, 若对任意 $x,y\in X$, 存在同胚映射 $f:X\to X$ 使得 $f(x)=y$. 容易验证, 左拓扑群和右拓扑群都是齐性空间.

设 G 是半拓扑群, κ 是无限基数. 称 G 是 κ-*narrow* [150, 第 6 节], 若对 G 中单位元的任一邻域 U, 存在 G 的子集 K 满足 $|K|\le\kappa$ 且 $KU=UK=G$. 由此可定义半拓扑群的一个重要的基数函数 *index of narrowness*, 简记为 $ib(G)$, 其定义如下:

$$ib(G)=\min\{\kappa\ge\omega : G \text{ 是 } \kappa\text{-narrow}\}.$$

本文未定义的概念与术语可参考 [12, 48, 63, 102].

第二章　拟拓扑群的广义度量性质

我们知道，一个拓扑群是可度量的当且仅当该拓扑群是第一可数的 [23, 78]; 一个仿拓扑群是拟可度量的当且仅当该仿拓扑群是第一可数的 [133, 105]; 一个拟拓扑群是半可度量的当且仅当该拟拓扑群是第一可数的 [85, 138].

这一章我们讨论拟拓扑群的一些广义度量性质, 进一步深化拟拓扑群中的广义度量性质. 首先在对拟拓扑群的乘积运算不附加条件的情形下, 研究拟拓扑群的广义度量性质, 推广和深化了沈荣鑫 [138], 李丕余和牟磊 [85] 的相关工作. 由于拟拓扑群的乘积运算不必连续, 所以拓扑群上一些经典的结果在拟拓扑群中可能不再成立. 例如, Comfort 与 Ross [43] 证明了一族伪紧拓扑群的乘积是伪紧的. 然而, C. Hernández 与 M. Tkachenko [71] 构造了两个伪紧的拟拓扑群其乘积不是伪紧的. 从而, 自然地希望找到拟拓扑群的某个子类使得这个子类能推广拓扑群中的某些结果. 我们引入并考虑拟拓扑群的如下附加条件. 拟 (半) 拓扑群的乘积运算称为*序列连续的*, 若乘积运算 $\mu : G \times G \to G$ 是序列连续的. 这等价于对 G 中任意序列 $a_n \to e$ 及 $b_n \to e$ 有 $a_n b_n \to e$. 因为仿拓扑群的乘积运算是连续的, 所以仿拓扑群的乘积运算是序列连续的. 因此乘积运算序列连续的拟 (半) 拓扑群包含 (仿) 拓扑群. 在这个子类中可以推广 (仿) 拓扑群的有关结果. 其中部分回答了 [138, 问题 3.11].

本章取材于作者和林寿教授、林福财教授最近发表的论文"Zhongbao Tang, Shou Lin, Fucai Lin, A special class of semi(quasi)topological groups and three-space properties, Topol. Appl. 235 (2018), 92-103", 即参考文献 [145]; 及作者与林寿教授最近完成的论文"Zhongbao Tang, Shou Lin, On generalized metrizable properties and cardinal invariants in quasitopological groups, submitted", 即参考文献 [146].

§2.1　第一可数拟拓扑群的广义度量性质

设 X 是拓扑空间, d 是 X 上的拟度量 (半度量). 称拟度量 (半度量) $d(x,y)$ 是*连续的*, 若 $d(x,y)$ 关于 x,y 是联合连续的; 称 $d(x,y)$ 是*左连续的* (*右连续的*), 若 $d(x,\cdot)$ $(d(\cdot,y))$ 是连续的.

设 G 是一个群. 函数 $d : G \times G \to [0, \infty)$ 称为左不变的 (右不变的), 如果对任意 $a, x, y \in G, d(x, y) = d(ax, ay)$ $(d(x, y) = d(xa, ya))$.

[85, 138] 分别证明了如下结果.

引理 2.1.1 *拟拓扑群 G 是半度量的当且仅当 G 是第一可数的.*

利用 [138, 定理 3.1] 的证明, 可对引理 2.1.1 作如下补充.

引理 2.1.2 *第一可数的拟拓扑群 G 允许一个右不变的半度量 ϱ 及一个左不变的半度量 λ.*

设 G 是一个群. G 的一个子集 A 称为不变的 [12, p. 69], 若对任意 $x \in G$, $xAx^{-1} = A$. 由定义易知, 交换群的任意子集都是不变的. 半拓扑群 G 称为 *balanced*, 若单位元 e 处有一个由不变子集形成的邻域基. 一个 balanced 半拓扑群也称为具有不变基的群.

定理 2.1.3 *半度量的拟拓扑群 G 允许一个不变的半度量当且仅当 G 是 balanced.*

证明 假设 ϱ 是 G 上的一个不变的半度量且其生成 G 上的拓扑. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $U_n = \{x \in G : \varrho(e, x) < \frac{1}{n}\}$, 则 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 e 在 G 中的一个邻域基. 对任意 $x \in U_n$ 及 $y \in G$, 因为 ϱ 是不变的, 则有

$$\varrho(e, yxy^{-1}) = \varrho(y, yx) = \varrho(e, x) < \frac{1}{n},$$

因此 $yxy^{-1} \in U_n$. 由此可得, 对一切 $y \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$, $yU_ny^{-1} = U_n$, 从而集族 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是单位元 e 在 G 中的不变邻域基. 故拟拓扑群 G 是 balanced.

反之, 假设拟拓扑群 G 是 balanced. 因为 G 是第一可数的, 则存在一个由 e 的对称的、不变的开邻域形成 e 在 G 中的邻域基 $\xi = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, 且满足对任意 $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subseteq U_{n+1}$. 定义函数 $d : G \times G \to [0, \infty)$ 如下: 对任意 $x, y \in G$, $d(x, y) = \inf\{\frac{1}{n} : x^{-1}y \in U_n, n \in \mathbb{N}\}$. 易验证 d 是 G 上的对称距离, 且 d 生成 G 上的拓扑, 所以 G 是对称度量空间. 又因为 G 是第一可数的, 所以 G 是半度量空间 [4]. 由假设对一切 $y \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$, $U_n = yU_ny^{-1}$, 则对任意 $x, y \in G$ 有 $d(e, yxy^{-1}) = d(e, x)$. 因此 d 是不变的. 证毕.

利用 [138, 定理 3.1] 的证明, 可得如下结果.

命题 2.1.4 *设 G 是拟拓扑群. 如果单位元 e 是 G 中的 G_δ 点, 则 G 上存在一个较弱的可对称化拓扑.*

证明 由假设条件可设 $\{e\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 其中每一 U_n 是 e 的开邻域. 因为 G 是拟拓扑群, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 可设 $U_n = U_n^{-1}$ 且 $U_n \subseteq U_{n+1}$. 定义函数 $d : G\times G \to [0,\infty)$ 如下: 对任意 $x, y \in G$, $d(x, y) = \inf\{\frac{1}{n} : x^{-1}y \in U_n, n \in \mathbb{N}\}$. 易知 d 是 G 上的对称距离. 且对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$, $xU_{n+1} = B(x, \frac{1}{n})$. 显然, 由 d 生成 G 上的拓扑弱于 G 的原始拓扑. 证毕.

一般地, 开映射不保持拓扑空间的半度量性 [58]. 但在拟拓扑群中, 由引理 2.1.1, 我们有如下推论.

推论 2.1.5 *设 f 是半度量的拟拓扑群 G 到拟拓扑群 H 上的开同态, 则 H 是半度量的.*

对于半度量的拟拓扑群, 可对引理 2.1.1 及推论 2.1.5 作如下共同推广.

定理 2.1.6 *设 G 是拟拓扑群, 则 G 是第一可数的当且仅当对 G 的任意闭子群 H, 商空间 G/H 是半度量的.*

证明 如果对 G 的任意闭子群 H, 商空间 G/H 是半度量的, 令 $H = \{e\}$, 则 $G/H = G$ 是半度量的. 因此, G 是第一可数的.

反之, 如果 G 是第一可数的. 由引理 2.1.2, 存在 G 上相容的右不变半度量 d. 定义函数 $\varrho : G/H \times G/H \to [0,\infty)$ 如下: 对任意 $x, y \in G$,

$$\varrho(xH, yH) = \inf\{d(xh_1, yh_2) : h_1, h_2 \in H\}.$$

因为 d 是右不变的且 H 是 G 的子群, 则对任意 $x, y \in G$, $\varrho(xH, yH) = d(x, yH) \geq 0$. 函数 ϱ 满足对称性:

$$\begin{aligned}
\varrho(xH, yH) &= d(x, yH) = \inf\{d(x, yh) : h \in H\} = \inf\{d(xh^{-1}, y) : h \in H\} \\
&= \inf\{d(y, xh^{-1}) : h \in H\} = d(y, xH) \\
&= \varrho(yH, xH).
\end{aligned}$$

因为 H 闭于 G 且 d 是 G 上的半度量, 则 $\varrho(xH, yH) = d(x, yH) = 0$ 当且仅当 $x \in yH$, 即 $xH = yH$. 综上知 ϱ 是 G/H 上的对称距离.

下证 ϱ 生成商空间 G/H 的拓扑. 对任意 $x \in G$ 及 $\varepsilon > 0$, 令 $O_\varepsilon(x) = \{y \in G : d(x, y) < \varepsilon\}$ 及 $B_\varepsilon(xH) = \{yH : y \in G, \varrho(xH, yH) < \varepsilon\}$. 记 π 为 G 到 G/H 上的商映射, 则对任意 $x \in G$, $\pi(x) = xH$. 由 ϱ 的定义, 易知对任意 $x \in G$ 及 $\varepsilon > 0$ 有 $\pi(O_\varepsilon(x)) = B_\varepsilon(xH)$. 因为集族 $\{O_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ 形成点 x 在 G 中的一个邻域基且映射 $\pi : G \to G/H$ 是连续开的, 则 $\{B_\varepsilon(xH) : \varepsilon > 0\}$ 是 xH 在商空间 G/H 的邻域基. 证毕.

空间 X 称为 q 空间 [115], 如果存在 X 上的 g 函数满足对 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与点 p, 若对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n \in g(n, p)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 空间 X 称为 β 空间 [63, p. 475], 如果存在 X 上的 g 函数使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 若 $p \in g(n, x_n)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 空间 X 称为 γ 空间 [63, p. 491], 如果存在 X 上的 g 函数使得 (i) $\{g(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 的邻域基; (ii) 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in X$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $y \in g(m, x)$ 蕴含 $g(m, x) \subseteq g(n, x)$.

因为每一个第一可数的拟拓扑群 G 是半度量的, 所以 G 是 β 空间. 第一可数空间是 q 空间. 反之, 结论不成立. 事实上, 存在许多可数紧的拓扑群不是第一可数的 ([12, 例1.6.39 a)]). 因为可数紧空间是 q 空间, 下述结果推广了 [85, 定理 2.5].

定理 2.1.7 *设 G 是拟拓扑群. 若 G 是 q 空间, 则 G 是 β 空间.*

证明 因为 G 是 q 空间, 则存在 g 函数 $g : \mathbb{N} \times G \to \tau$ 使得对 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与点 p, 若对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n \in g(n, p)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 定义映射 $g_1 : \mathbb{N} \times G \to \tau$ 如下: 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in G$, $g_1(n, x) = xg(n, e)$. 易验证 g_1 是 G 上的 g 函数. 若对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $p \in g_1(n, x_n)$, 即 $p \in x_n g(n, e)$, 则 $(x_n)^{-1}p \in g(n, e)$. 由 q 空间的定义, $\{(x_n)^{-1}p\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 又因为 G 是拟拓扑群, 则 G 上的逆运算与变换都是连续的. 因此, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 故 G 是 β 空间. 证毕.

我们知道第一可数的拟拓扑群 G 是 β 空间 [85, 定理 2.5], 且若 X 是 β 空间及 γ 空间, 则 X 是可展的 [63, 定理 10.7]. 因此, 下述推论是直接的.

推论 2.1.8 *设 G 是拟拓扑群. 若 G 是 γ 空间, 则 G 是可展的.*

由引理 2.1.2, 第一可数的拟拓扑群 G 允许一个相容的左不变半度量 λ. 然而, G 不必是可度量化的. 事实上, 令 $G = \mathbb{R}^2$ 为通常加群并赋予蝶形拓扑 $\mathcal{D}$

[63, 例 9.10]. 对任意 $p=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\varepsilon>0$, 令

$$U(p,\varepsilon)=\{p\}\cup\{(x,y):0<|x-x_1|<\varepsilon,|(y-y_1)/(x-x_1)|<\varepsilon\},$$

则 $\{U(p,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 是 p 在 G 中的邻域基. $(G,\mathcal{D})$ 是完全正则的拟拓扑群. 因为 G 不是 σ 空间 [63, 例 9.10], 则 G 不是可度量化的. 因此, 一个自然的问题是第一可数的拟拓扑群附加什么条件使得该拟拓扑群是可度量化的. 我们获得如下结果.

引理 2.1.9 (a) *([63, 引理 9.3]) 若 X 关于对称函数 d 是对称度量空间, 则 X 中的序列 $x_n\to x$ 当且仅当 $d(x_n,x)\to 0$.*

(b) *([63, 引理 10.2 (i)]) 若 X 关于拟度量 d 是拟度量空间, 则 X 中的序列 $x_n\to x$ 当且仅当 $d(x,x_n)\to 0$.*

定理 2.1.10 *下述结论相互等价:*

(a) *G 关于某个连续左不变半度量是一个可半度量化的拟拓扑群;*

(b) *G 关于某个左不变拟度量是一个可拟度量化的拟拓扑群;*

(c) *G 是一个可度量化拓扑群.*

证明 $(c)\Rightarrow(a),(b)$ 是显然的. 对于 (a) 或 $(b)\Rightarrow(c)$, 因为可半度量化或可拟度量化空间都是第一可数的且第一可数拓扑群是可度量化的, 所以只需证 (a) 和 (b) 中的拟拓扑群 G 是拓扑群, 即证 G 中的乘积运算是联合连续的. 因为 G 是第一可数的, 从而 $G\times G$ 是第一可数的, 只需证 $G\times G$ 到 G 的乘积运算是序列连续的. 这等价于证明对 G 中任意收敛于单位元 e 的序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有 $a_nb_n\to e$.

(a) 假设 G 关于连续左不变半度量 ϱ 是一个可半度量化的拟拓扑群, 则

$$\varrho(a_nb_n,e)=\varrho(a_n^{-1}a_nb_n,a_n^{-1})=\varrho(b_n,a_n^{-1}).$$

因为 G 是拟拓扑群, 其逆运算连续, 从而由 $a_n\to e$ 可得 $a_n^{-1}\to e$. 再由 ϱ 的连续性及 $b_n\to e$,

$$\varrho(a_nb_n,e)=\varrho(b_n,a_n^{-1})\to e.$$

因此, 由引理 2.1.9 (a), $a_nb_n\to e$.

(b) 设 G 关于左不变拟度量 d 是一个可拟度量化的拟拓扑群. 取定 $n \in \mathbb{N}$, 因为 d 是 G 上的左不变拟度量, 从而

$$d(e, a_n b_n) \leq d(e, a_n) + d(a_n, a_n b_n) = d(e, a_n) + d(e, b_n).$$

又因为 $a_n \to e$ 及 $b_n \to e$, 根据引理 2.1.9 (b), $d(e, a_n) \to 0$ 且 $d(e, b_n) \to 0$. 所以 $d(e, a_n b_n) \to 0$, 因而 $a_n b_n \to e$. 证毕.

注 2.1.11 *定理 2.1.10 (a) 中的"连续性"及 (b) 中的"左不变性"是必要的: 由引理 2.1.2, 每一个第一可数的拟拓扑群 G 允许一个左不变的半度量. 赋予加群 $G = \mathbb{R}^2$ 蝶形拓扑, 则 G 是第一可数的拟拓扑群但不是可度量的. 赋予 $G_1 = \mathbb{Q}^2 \subseteq G$ 子空间拓扑, 则 G_1 是可度量的拟拓扑群. 但 G_1 不是拓扑群.*

因而, 我们有如下问题.

问题 2.1.12 *若 G 是可拟度量化的拟拓扑群, 那么 G 是可度量化的吗?*

作为这一节的结束, 在 MA+¬CH 下我们将构造一个不可度量化的、可分的、正规 Moore 拟拓扑群.

设 τ, τ_1 是 X 上的两个拓扑. 我们称 τ 是关于 τ_1 正则的, 若对任意 $U \in \tau$ 及 $x \in U$, 存在 $V \in \tau$ 使得 $x \in V \subseteq \overline{V}^{\tau_1} \subseteq U$ [1].

引理 2.1.13 *[1] (MA) 设 (X, τ) 是可表示为不超过 $\mathfrak{c}$ 个紧子集的并的拓扑空间. 若存在一个较弱的可分的度量拓扑 τ_1 使得 τ 是关于 τ_1 正则的, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, X^n 是正规的.*

例 2.1.14 *(MA+¬CH) 存在一个不可度量化的、可分的、正规 Moore 拟拓扑群.*

证明 令 κ 是一个基数且满足 $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$. 取 $\mathbb{R}$ 的子集 X 使得 $|X| = \kappa$ 且 $\mathbb{Q} \subseteq X$. 不失一般性, 可设 X 是 $\mathbb{R}$ 的子群. 令 $(G, \mathcal{D})$ 是蝶形拓扑空间, $G_1 = \mathbb{Q} \times X$, 则 $(G_1, \mathcal{D}|_{G_1})$ 是可分的、Moore 拟拓扑群 [138]. 显然, $(G_1, \mathcal{D}|_{G_1})$ 不是仿紧的. 易验证 $\mathcal{D}|_{G_1}$ 是关于 $\mathcal{E}|_{G_1}$ 正则的, 其中 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑. 由引理 2.1.13, $(G_1, \mathcal{D}|_{G_1})$ 是正规的. 证毕.

在 CH 条件下, 每一个可分的、正规 Moore 空间是可度量化的 [69]. 因此在 CH 条件下, 每一可分的、正规 Moore 拟拓扑群是可度量化的. 从而存在可分的, 正规的, 不可度量化的 Moore 拟拓扑群独立于通常的集论公理 ZFC.

§2.2 乘积运算序列连续的半拓扑群的广义度量性质

这一节, 我们主要讨论乘积运算序列连续的半拓扑群的一些广义度量性质. 获得的结果改进了林福财在 [91] 中的相应结果.

设 X 是 snf 可数空间, 则容易验证 X 具有 sn 网 $\{V_n(x): x \in X, n \in \mathbb{N}\}$, 满足下述条件: 对任意 $x \in X$,

(1) 每一 $V_n(x)$ 是 x 的序列邻域;

(2) $\{V_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 处的网;

(3) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1}(x) \subseteq V_n(x)$.

因此, 本节我们总是假设 snf 可数空间的 sn 网 $\{V_n(x): x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 满足上述条件.

引理 2.2.1 *[104, 引理 2.3] 设 $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 在 X 中递减的网且 W 是 x 的序列邻域, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $U_{n_0} \subseteq W$.*

下列引理的证明是直接的.

引理 2.2.2 *设 G 是 snf 可数的半拓扑群, $\{V_n(x): x \in G, n \in \mathbb{N}\}$ 是 G 中的 sn 网. 对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 令 $W_n(x) = x \cdot V_n(e)$, 则 $\{W_n(x): n \in \mathbb{N}, x \in G\}$ 是 G 中的 sn 网.*

引理 2.2.3 *设 G 是乘积运算序列连续的 snf 可数的半拓扑群, $\{V_n(x): x \in G, n \in \mathbb{N}\}$ 是 G 中的 sn 网. 对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 令 $W_n(x) = x \cdot V_n(e) \cdot V_n(e)$, 则 $\{W_n(x): n \in \mathbb{N}, x \in G\}$ 是 G 中的 sn 网.*

证明 由引理 2.2.2, 对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$ 可假设 $V_n(x) = x \cdot V_n(e)$. 下证 $\{W_n(e): n \in \mathbb{N}\}$ 是单位元 e 在 G 中的 sn 网. 实际上, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $W_m(e) \subseteq V_n(e)$. 否则, 对任意 $m \in \mathbb{N}$, $W_m(e) \setminus V_n(e) \neq \emptyset$. 取 $x_m \in W_m(e) \setminus V_n(e)$, 并设 $x_m = a_m b_m$, 其中 $a_m, b_m \in V_m(e)$. 因为 $\{V_n(e): n \in \mathbb{N}\}$ 是单位元 e 在 G 中递减的 sn 网, 于是 $a_m \to e$ 且 $b_m \to e$. 因此, 由 G 的乘积运算序列连续性, $x_m = a_m b_m \to e$. 然而, $V_n(e)$ 是 e 在 G 中的序列邻域, 与 $x_m \in W_m(e) \setminus V_n(e)$ 矛盾. 从而对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $W_m(e) \subseteq V_n(e)$. 这说明 $\{W_n(e): n \in \mathbb{N}\}$ 是 e 在 G 中的网. 又因为对任意 $n \in \mathbb{N}$, $V_n(e)$ 是 e 的序

列邻域且 $V_n(e) \subseteq W_n(e)$, 所以 $W_n(e)$ 是 e 的序列邻域. 综上知 $\{W_n(e) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 e 在 G 中的 sn 网. 由引理 2.2.2, $\{W_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in G\}$ 是 G 中的 sn 网. 证毕.

下面的定理是这一节的主要结果.

定理 2.2.4 *乘积运算序列连续的 snf 可数的半拓扑群 G 是 sof 可数的.*

证明 设 $\{V_n(x) : x \in G, n \in \mathbb{N}\}$ 是 G 中的 sn 网. 由引理 2.2.2, 对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$ 可假设 $V_n(x) = x \cdot V_n(e)$. 令

$$U_n = \{x \in V_n(e) : \text{ 存在某个 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } x \cdot V_k(e) \subseteq V_n(e)\}.$$

显然, $e \in U_n \subseteq V_n(e)$. 下证 U_n 是 G 中的序列开集. 事实上, 任取 $y \in U_n$, 则存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $y \cdot V_k(e) \subseteq V_n(e)$. 由引理 2.2.1 和 2.2.3, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$y \cdot (V_m(e) \cdot V_m(e)) \subseteq y \cdot V_k(e).$$

因此

$$(y \cdot V_m(e)) \cdot V_m(e) \subseteq V_n(e).$$

这表明 $V_m(y) = y \cdot V_m(e) \subseteq U_n$. 因为 $V_m(y)$ 是 y 的序列邻域, 所以 U_n 是 y 的序列邻域. 从而, U_n 是 G 中的序列开集. 由此可得 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 e 处的 so 网. 故 G 是 sof 可数的. 证毕.

注 2.2.5 *林福财在 [91] 中证明了每一 snf 可数的仿拓扑群 G 是 sof 可数的, 并且提出了下述问题: 设 G 是 snf 可数的半拓扑群或拟拓扑群, 那么 G 是 sof 可数的吗? 刘川在 [104] 中通过构造一个 Hausdorff 弱第一可数的拟拓扑群但不是 sof 可数的, 给出了上述问题的否定回答. 这表明定理 2.2.4 中条件 G 的"乘积运算是序列连续的"不能去掉.*

下述结果是定理 2.2.4 的直接推论.

推论 2.2.6 *每一个 sn 可度量且乘积运算序列连续的半拓扑群 G 是 so 可度量的.*

证明 因为 G 是 sn 可度量的, 容易验证 G 是 snf 可数的. 由定理 2.2.4, G 是 sof 可数的. 根据 [100, 命题 2.17], G 是 so 可度量的. 证毕.

推论 2.2.7 *若 G 是乘积运算序列连续的弱第一可数半拓扑群, 则 G 是第一可数的仿拓扑群.*

证明 因为弱第一可数空间是 snf 可数的序列空间 [97, 140], 由定理 2.2.4, G 是 sof 可数的. 又因为 G 是序列空间, 所以 G 是第一可数的.

下证 G 是仿拓扑群. 事实上, 令 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是单位元 e 的递减的邻域基. 由引理 2.2.3 的证明过程知, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $V_m^2 \subseteq V_n$. 因此, G 的乘积运算是联合连续的. 故 G 是仿拓扑群. 证毕.

推论 2.2.8 *[125] 若 G 是弱第一可数拓扑群, 则 G 是可度量的.*

§2.3 乘积运算序列连续的拟拓扑群的广义度量性质

这一节我们首先构造一个乘积运算序列连续的拟拓扑群使其不是拓扑群的例子.

设 X 是拓扑空间, G 是一个交换群. 令 X^G 为所有 G 到 X 的映射并赋予点态收敛拓扑形成的拓扑空间 (事实上, 该空间与 X^G 上的 Tychonoff 乘积拓扑是一致的). 对任意 $a \in G, f \in X^G$ 及 $x \in G$, 令 $s(a, f)(x) = s_a(f)(x) = f(x - a)$, 则 $s_a(f) \in X^G$, 且称 $G \times X^G$ 到 X^G 的映射 s 为 X^G 上的 G 变换. 映射 $s_a : X^G \to X^G$ 称为 X^G 上的 a 变换, 或 X^G 上由 a 决定的变换. 对每一 $f \in X^G$, X^G 的子空间 $s(G \times \{f\})$ 称为变换 s 的 f 轨道, 或简称为 f 轨道. 映射 $f : G \to X$ 称为 *Korovin* 映射 [12, p. 124] 且 f 的轨道称为 *Korovin* 轨道 [12, p. 124], 若对 G 的任意可数子集 M 及任意映射 $h : M \to X$, 存在 $a \in G$ 使得 $s_a(f)_{|M} = h$. 对任意 $f \in X^G$ 与 $g \in G$, 令 $gf = s_g(f)$. 定义 f 轨道 $Gf = \{gf : g \in G\}$ 上的乘积 $*$ 如下: 对任意 $g_1, g_2 \in G$,

$$(g_1 f) * (g_2 f) = (g_1 g_2) f.$$

则 $(Gf, *)$ 是一个群, 且映射 $k : G \to Gf$ 是一个同态, 其中 $k(g) = gf$. 若 f 是 Korovin 映射, 则同态 k 是单射. Korovin 映射 f 的一个重要性质: 对任意可数子集 $B \subseteq G$, Gf 在 X^G 到 X^B 上自然投射的像为整个 X^B [12, 命题 2.4.14].

通过改进 [71, 例 9], 我们构造了下述例子.

例 2.3.1 *存在一个乘积运算序列连续的伪紧拟拓扑群使其不是拓扑群* [1].

[1]此例的构造得到墨西哥 M. Tkachenko 教授的指导, 在此表示感谢.

证明 设 G 是布尔群且 $|G| = \mathfrak{c}$, X 是任意无限的紧度量空间. 由 [48, 定理 3.1.29], $|X| \leq \mathfrak{c}$.

由 [12, 定理 2.4.13], 存在 Korovin 映射 $f : G \to X$. 令 $K = Gf$ 是 X^G 中的 Korovin 轨道. 根据 [12, 命题 2.4.14], K 是一个拟拓扑群但不是拓扑群. 由 [12, 定理 2.4.15], K 是伪紧的.

下证 K 的乘积运算是序列连续的. 只需证 K 的任意可数无限子空间是离散的.

断言. K 的任意可数无限子空间是离散的.

实际上, 任取 K 的可数无限子集 K_1, 则存在 G 的可数无限子集 H 使得 $K_1 = Hf$. 不失一般性, 不妨设 H 是 G 的子群. 因为 X 是非离散的度量空间, 则存在由 X 中不同点构成的序列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $a \in X$. 令 $Y = \{a\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, h 为 H 到 $Y \setminus \{a\}$ 上的双射. 因为 f 是 Korovin 映射, 则存在 $c \in G$ 使得 $s_c(f)_{|H} = h$. 因此, $s_c(f)(e) = h(e)$, 即对某个 $n \in \mathbb{N}$, $f(e - c) = f(c) = h(e) = b_n$. 又因为 b_n 是 Y 中的孤立点, 所以存在 b_n 的开邻域 W 满足 $Y \cap W = \{b_n\}$. 因而 $U = \{x \in X^G : x(c) \in W\}$ 是 X^G 中的开集且 $f \in U$. 任取 $b \in H \setminus \{e\}$, 因为 h 单射, 则

$$s_b(f)(c) = f(c - b) = f(b - c) = s_c(f)(b) = h(b) \neq h(e) = b_n.$$

因此, $s_b(f) \notin U$. 显然, 对 Hf 中任一元存在 $b \in H$ 使得该元形如 $s_b(f)$. 于是, $U \cap Hf = \{f\}$. 又因为 f 是群 K 的单位元, 故 K 的子群 Hf 是离散的.

由断言, K 中不含非平凡的收敛序列. 所以 K 的乘积运算是序列连续的. 证毕.

下述例子说明并非每一个拟拓扑群的乘积运算都是序列连续的.

例 2.3.2 *存在一个完全正则的拟拓扑群 G 使得 G 的乘积运算不是序列连续的.*

证明 取实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$, 并赋予 G 蝶形拓扑 $\mathcal{D}$, 则 $(G, \mathcal{D})$ 是完全正则的第一可数拟拓扑群. 显然, 序列 $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和序列 $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛于单位元 $e = (0, 0)$. 然而, 序列 $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) + (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是发散的. 故 G 的乘积运算不是序列连续的. 证毕.

例 2.3.1 与 2.3.2 说明乘积运算序列连续的拟拓扑群构成拟拓扑群的一个真子类, 且其真包含所有的拓扑群.

若 G 是拟拓扑群, 容易验证 σG 是拟拓扑群. 下列定理推广了定理 [91, 定理 4.4].

定理 2.3.3 设 G 是 snf 可数的拟拓扑群且其乘积运算序列连续, 则 σG 是拓扑群.

证明 由定理 2.2.4, G 是 sof 可数的. 设 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是单位元 e 在 G 中递减的 so 网, 则 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 e 在 σG 中邻域基. 事实上, 设 U 是 e 在 σG 中的任一开邻域, 则 U 是 e 在 G 中的序列开邻域. 根据引理 2.2.1, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $V_n \subseteq U$. 因为 G 和 σG 有相同的收敛序列 [19, p. 678], 所以 σG 是拟拓扑群且其乘积运算是序列连续的. 由推论 2.2.7, σG 是拓扑群. 证毕.

拓扑群含 S_ω 的 (闭) 拷贝当且仅当其含有 S_2 的 (闭) 拷贝 [124]. 对于拟拓扑群, 沈荣鑫指出存在一个拟拓扑群含有 S_2 的闭拷贝但不含 S_ω 的闭拷贝 [138, 例 3.9], 因此提出以下问题.

问题 2.3.4 *[138, 问题 3.11] 设 G 是仿 (拟) 拓扑群且含有 S_ω 的闭拷贝, 那么 G 含有 S_2 的闭拷贝吗?*

下述结果部分回答了问题 2.3.4.

定理 2.3.5 设 G 是乘积运算序列连续的序列拟拓扑群, 则 G 含有 S_ω 的闭拷贝当且仅当其含有 S_2 的闭拷贝.

证明 充分性. 设 G 是拟拓扑群, 不失一般性, 设

$$A = \{e\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_n(m) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

是 G 中 S_2 的闭拷贝. 对任意 $n, m \in \mathbb{N}$, 让 $y_n(m) = x_n^{-1}x_n(m)$, 且令 $S_n = \{y_n(m) : m \in \mathbb{N}\}$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 当 $m \to \infty$ 时有 $y_n(m) \to e$. 对每一 m, $F = \{n : S_m \cap S_n$ 是无限的$\}$ 是有限的 (否则, 对任意 $n_i \in F$, 取不同的 $x_{n_i}^{-1}x_{n_i}(m_i) \in S_m \cap S_{n_i}$ 且 $n_i < n_{i+1}$, 则 $x_{n_i}^{-1}x_{n_i}(m_i) \to e$ 及 $x_{n_i} \to e$. 由 G 的乘积运算序列连续性, $x_{n_i}(m_i) \to e$, 矛盾!). 不失一般性, 可假设若 $i \neq j$, 则 $S_i \cap S_j = \emptyset$. 令 $B = \{e\} \cup \{y_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

断言 1. B 是 G 中 S_ω 的闭拷贝.

若 B 不闭于 G. 因为 G 是序列空间, 所以 B 不是 G 中的序列闭集, 从而存在 $x \in \overline{B} \setminus B$ 和 B 中的无限子集 $\{y_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\}$ 使得当 $i \to \infty$ 时 $y_{n_i}(m_i) \to x$ 且 $n_i < n_{i+1}$. 因为 A 闭于 G, 所以存在 e 的开邻域 V 使得 Vx 与 $\{x_n(m) : m \in \mathbb{N}\}$ 至多交于一点 n. 由 G 的乘积运算序列连续性及 $x_n \to e$, $x_{n_i}y_{n_i}(m_i) \to x$. 因为 Vx 是 x 的开邻域, 则存在无限多个 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $x_{n_i}(m_i) \in Vx$, 矛盾.

若 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 则 $C = \{y_n(m) : m \leq f(n), n \in \mathbb{N}\}$ 没有聚点. 若不然, 设 a 是 C 的一个聚点, 则存在 $x \in \overline{C \setminus \{a\}} \setminus (C \setminus \{a\})$ 及 $C \setminus \{a\}$ 的无限子集 $\{y_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\}$ 使得当 $i \to \infty$ 时 $y_{n_i}(m_i) \to x$ 且 $n_i < n_{i+1}$. 设 V 是 e 的开邻域使得

$$|Vx \cap \{x_n(m) : m \leq f(n), n \in \mathbb{N}\}| \leq 1.$$

由 G 的乘积运算序列连续性及 $x_n \to e$, $x_{n_i}y_{n_i}(m_i) \to x$. 又因为 Vx 是 x 的开邻域, 从而存在无限多个 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $x_{n_i}(m_i) \in Vx$, 矛盾. 因此 B 是 S_ω 的闭拷贝.

必要性. 设

$$A = \{e\} \cup \{y_n(m) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

是 G 中 S_ω 的闭拷贝, 其中对任意 n, 当 $m \to \infty$ 时有 $y_n(m) \to e$. 对每一 n, 存在 $y_1(n)$ 的开邻域 U_n 满足若 $i \neq j$, 则 $U_i \cap U_j = \emptyset$. 对任意 $n, m \in \mathbb{N}$, 令 $x_n(m) = y_1(n)y_{n+1}(m)$. 于是, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 当 $m \to \infty$ 时 $x_n(m) \to y_1(n)$. 不失一般性, 可设 $\{x_n(m) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq U_n$. 令

$$B = \{e\} \cup \{y_1(n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_n(m) : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

断言 2. B 是 G 中 S_2 的闭拷贝.

若 B 不是闭的, 则存在 $x \in \overline{B} \setminus B$ 及 B 的无限子集 $\{x_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\}$ 使得当 $i \to \infty$ 有时 $x_{n_i}(m_i) \to x$ 且 $n_i < n_{i+1}$. 因为 A 是闭的, 所以存在 e 的邻域 V 满足 $Vx \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. 又因为 G 是拟拓扑群且 $y_1(n) \to e$, 则 $(y_1(n))^{-1} \to e$. 根据 G 的乘积运算序列连续性, 当 $i \to \infty$ 时 $y_{n_i+1}(m_i) = (y_1(n_i))^{-1}x_{n_i}(m_i) \to x$. 由于 Vx 是 x 的邻域, 从而 Vx 含有 A 中无限多个元, 矛盾.

若 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 与断言 1 的证明过程相类似, 对每一 $k \in \mathbb{N}$, $\{x_n(m) : n \geq k, m \leq f(n)\}$ 是闭的. 故 B 是 S_2 的闭拷贝. 证毕.

空间 X 中由收敛序列形成的可数集族 $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ 称为扇 (以 x 为顶点), 若每个序列 S_n 收敛于同一点 $x \in X$. 空间 X 称为 α_4 空间 [123], 若对任意

$x \in X$ 及以 x 为顶点的扇 $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, 存在收敛于 x 的序列且其与无限多序列 S_n 相交.

若拓扑群 G 是 Fréchet 空间, 则 G 是强 Fréchet 空间 [12, 定理 4.7.9]. 下述定理推广了这一结果.

定理 2.3.6 *设 G 是乘积运算序列连续的拟拓扑群, 则下列结论相互等价:*

(a) G 是序列的 α_4 空间;

(b) G 是 Fréchet 空间;

(c) G 是强 Fréchet 空间.

证明 $(a) \Rightarrow (b)$. 假设 G 不是 Fréchet 空间, 则存在 G 的子集 A 使得 $[A] \neq \overline{A}$. 若 $[A]$ 闭于 G, 则 $\overline{A} \subseteq \overline{[A]} = [A] \subseteq \overline{A}$, 矛盾. 因此, $[A]$ 不是 G 中的闭集. 因为 G 是序列空间, 所以 $[A]$ 不是序列闭的, 即 $[[A]] \neq [A]$. 因此存在 $x \in [[A]] \setminus [A]$. 因为 G 是拟拓扑群, 不失一般性, 不妨设 $x = e$.

令 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $[A]$ 中收敛于 e 序列. 对任意 x_n, 令 $\{x_n(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 A 中收敛于 x_n 的序列. 因为 G 的乘积运算是分离连续的, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n^{-1}x_n(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e. 又因为 G 是 α_4 空间, 从而对任意 $k \in \mathbb{N}$, 可选取 n_k, j_k 使得 $\{x_{n_k}^{-1}x_{n_k}(j_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e 且 $n_k < n_{k+1}$. 由 G 的乘积运算序列连续性, 当 $k \to \infty$ 时, $x_{n_k}(j_k) = x_{n_k}x_{n_k}^{-1}x_{n_k}(j_k) \to e$, 这与 $e \notin [A]$ 矛盾. 因此, G 是 Fréchet 空间.

$(b) \Rightarrow (a)$. 只需证对任意以 e 为顶点的扇 $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, 存在收敛于 e 的序列且该序列与无限多的 S_n 相交. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $S_n = \{x_n(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, 则序列 $\{x_1(n)x_{n+1}(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x_1(n)$. 令 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_1(n)x_{n+1}(j) : j \in \mathbb{N}\}$, 则 $e \in \overline{A}$. 由假设 G 是 Fréchet 空间, 于是存在 A 中的序列 S 收敛于 e. 因为 G 是 Hausdorff 的, 所以 S 与无限多个序列 $\{x_1(n)x_{n+1}(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 相交. 令 $S = \{x_1(n_i)x_{n_i+1}(j_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中对任意 $i \in \mathbb{N}$ 有 $n_i < n_{i+1}$. 又因为 G 是拟拓扑群且 $\{x_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e, 所以当 $i \to \infty$ 时 $(x_1(n_i))^{-1} \to e$. 由 G 的乘积运算序列连续性, 当 $i \to \infty$ 时 $x_{n_i+1}(j_i) = (x_1(n_i))^{-1}x_1(n_i)x_{n_i+1}(j_i) \to e$.

因为一个空间是强 Fréchet 的当且仅当该空间是 Fréchet 的 α_4 空间 [5, 6], 由 $(a) \Leftrightarrow (b)$ 知, $(c) \Leftrightarrow (b)$ 是显然的. 证毕.

[125, 例 4] 表明定理 2.3.6 中的 $(a) \Rightarrow (b)$ 和 $(b) \Rightarrow (a)$ 都不能推广到拟拓扑群中. 所以定理 2.3.7 中的条件“乘积运算是序列连续的” 是必要的.

下述结论推广了 [12, 定理 4.7.10].

定理 2.3.7 设 G 是乘积运算序列连续的 *Fréchet* 拟拓扑群. 若 M 第一可数空间, 则 $G\times M$ 是 *Fréchet* 空间.

证明 对 $G\times M$ 的任意子集 A 及点 $(x,y)\in\overline{A}$. 设 p 是 $G\times M$ 到 G 上的自然投射. 取 y 在 M 中的递减的可数邻域基 $\{U_n:n\in\mathbb{N}\}$, 且对任意 $n\in\mathbb{N}$, 令 $B_n=p((G\times U_n)\cap A)$. 显然, $x\in\overline{B_n}$. 因为 $U_{n+1}\subseteq U_n$, 则 $B_{n+1}\subseteq B_n$. 由定理 2.3.6, G 中存在收敛于 x 的序列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, $b_n\in B_n$. 因此, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $c_n\in U_n$ 使得 $(b_n,c_n)\in A$. 因而序列 $\{(b_n,c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 (x,y). 故 $G\times M$ 是 Fréchet 空间. 证毕.

第三章　拟拓扑群中的基数不变量与三空间性质

在一般拓扑中, 基数不变量起着重要的作用, 它们从不同的角度反映空间的“大小”, 并获得了丰富的成果 [73, 76]. 而在拓扑群中, 基数不变量之间的关系发生了很大的变化, 拓扑群中基数函数具有比完全正则空间更好的性质, 见 [12, 5.2 节]. 所以讨论拟拓扑群的基数不变量之间的关系就显得顺理成章.

设 G 是一个拓扑群, $\mathscr{P}$ 是一个 (拓扑, 代数, 或拓扑与代数混合) 性质. 称 $\mathscr{P}$ 是拓扑群 G 的三空间性质, 若 G 的任意闭的不变子群 N 及商群 G/N 具有性质 $\mathscr{P}$, 则 G 也具有性质 $\mathscr{P}$. 类似地可以定义仿拓扑群、拟拓扑群及半拓扑群的三空间性质. 拓扑群中的三空间问题已被广泛研究. 拓扑群中的三空间性质有: 紧性, 局部紧性, 伪紧性, precompactness, 可度量性 (第一可数性), 第二可数性, 连通性, 完全性等, 见 [12, 31, 42, 46, 101, 152] 等. 而讨论仿拓扑群或半拓扑群的三空间性质的文献却不多, 见 [49, 132, 129, 162]. 关于拟拓扑群的三空间性质的研究只有零星的结果. 连通性 [162] 和可分性 [49] 是半拓扑群的三空间性质, 从而也是拟拓扑群的三空间性质. [162] 中也指出了紧性与局部紧性不是拟拓扑群的三空间性质. M. Fernández 和 I. Sánchez 证明了存在拟拓扑群 G 及 G 的闭不变子群 H 使得 H 与商群 G/H 都是拓扑群, 但 G 不是拓扑群 [49, 例 2.9], 即成为拓扑群不是拟拓扑群的三空间性质.

3.1 节通过构造反例, 说明拓扑群中一些常见的基数函数的关系在拟拓扑群中可能不再成立. 3.2 节通过构造反例说明可度量性、第一可数性、第二可数性和伪紧性都不是拟拓扑群中的三空间性质. 通过这些反例, 进一步体现了拟拓扑群和拓扑群之间的差异.

本章取材于作者和林寿教授、林福财教授最近发表的论文“Zhongbao Tang, Shou Lin, Fucai Lin, A special class of semi(quasi)topological groups and three-space properties, Topol. Appl. 235 (2018), 92-103”, 即参考文献 [145]; 及作者与林寿教授最近完成的论文“Zhongbao Tang, Shou Lin, On generalized metrizable properties and cardinal invariants in quasitopological groups, submitted”, 即参考文献 [146].

§3.1 拟拓扑群中的基数不变量

在本节中, 我们讨论拟拓扑群中的一些常见基数函数之间的关系.

设 G 是拓扑群. 由 [12, 命题 5.2.3 与 5.2.6, 定理 5.2.5], 每个拓扑群 G 满足下列等式:

(1) $\pi\chi(G) = \chi(G)$;

(2) $w(G) = \pi w(G)$;

(3) $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$;

(4) $w(G) = l(G) \cdot \chi(G)$;

(5) $w(G) = c(G) \cdot \chi(G)$;

(6) $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$;

(7) $w(G) = nw(G) \cdot \chi(G)$.

然而, 这些等式不能推广到拟拓扑群中. 接下来, 我们主要通过构造一些反例来说明上述等式 (1)-(7) 在拟拓扑群中不成立.

例 3.1.1 *存在一个完全正则的拟拓扑群 G 使得 $\chi(G) > \pi\chi(G) = \omega$.*

证明 赋予实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$ 拓扑 $\mathcal{T}^*$ [10, p. 112]. 由 [10, 性质 3.2], G 是全正则的拓扑群且 $\chi(X) > \omega$. 根据 [10, 性质 3.4], $\pi w(G) = \omega$, 因而 $\pi\chi(G) = \omega$. 证毕.

例 3.1.2 *存在一个完全正则的拟拓扑群 G 使得 $w(G) > \pi w(G) = \omega$.*

证明 赋予实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$ 蝶形拓扑, 则 G 是完全正则的拟拓扑群 [10, 性质 3.4] 且 $\pi w(G) = \omega$. 因为 G 中含有一个不可数的闭离散子空间 $\{0\} \times \mathbb{R}$, 所以 $w(G) > \omega$. 证毕.

例 3.1.3 *存在一个完全正则的拟拓扑群 G 使得 $w(G) > nw(G) = \chi(G) = \omega$.*

证明 赋予实平面加群 $G_1 = \mathbb{R}^2$ 蝶形拓扑 $\mathcal{D}$, 则 $(G_1, \mathcal{D})$ 是完全正则的第一可数拟拓扑群. 令 $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, 赋予 G 关于 G_1 的子空间拓扑. 显然, G 是完全正则的第一可数拟拓扑群. 因为 G 的子空间 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 同胚于 $\mathbb{R}$, 其中 $\mathbb{R}$ 赋予通

常拓扑, 所以 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 具有可数网. 因而 $G=\bigcup_{y\in\mathbb{Q}}\mathbb{R}\times\{y\}$ 也具有可数网. 即 $nw(G)=\omega$. 下证 $w(G)>\omega$. 取实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{I}=[0,1]$, 则 $A=\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 G 中的紧子集.

断言. 紧子集 A 在 G 中不具有可数邻域基.

对任意 $a\in G$ 及 $\varepsilon>0$, 令 $V(a,\varepsilon)=U(a,\varepsilon)\cap G$, 则 $V(a,\varepsilon)$ 是 a 在 G 中的邻域. 假设 A 在 G 中有可数邻域基 $\{W_n:n\in\mathbb{N}\}$. 对任意 $x\in\mathbb{I}$, 因为 $V((x,0),2)$ 是 A 在 G 中的邻域, 则存在 $n(x)\in\mathbb{N}$ 使得 $W_{n(x)}\subseteq V((x,0),2)$. 显然, $\mathbb{I}$ 是不可数集. 因而存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $B=\{x\in\mathbb{I}:n(x)=m\}$ 是不可数集. 令 x_0 是 B 在 $\mathbb{I}$ 中的聚点, 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $V((x_0,0),\frac{1}{k})\subseteq W_m$. 取 $y\in B$ 使得 $y\neq x_0$ 且 $|y-x_0|<\frac{1}{k}$, 则

$$V((x_0,0),\frac{1}{k})\subseteq W_m\subseteq V((y,0),2).$$

另一方面, 可选取有理数 z 使得 $0<z<\frac{1}{k}|y-x_0|$. 从而 $(y,z)\in V((x_0,0),\frac{1}{k})$ 且 $(y,z)\notin V((y,0),2)$, 这与 $V((x_0,0),\frac{1}{k})\subseteq V((y,0),2)$ 矛盾, 见图 1. 因此, 紧子集 A 在 G 中没有可数邻域基.

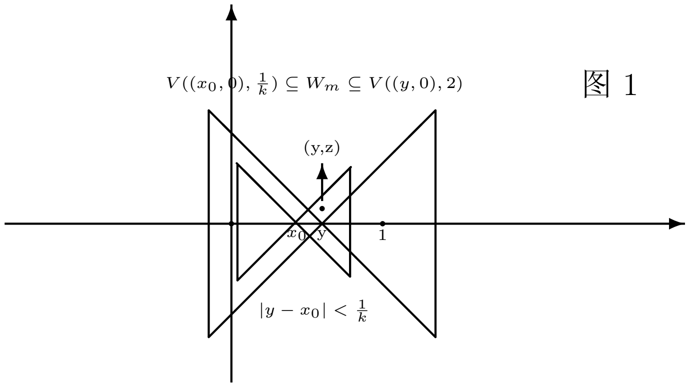

图 1

如果 $w(G)=\omega$, 即 G 是第二可数的, 因为 G 是完全正则的, 由 [63, 定理 1.1], G 是可度量的. 因此紧子集 A 在 G 中具有可数邻域基, 这与断言矛盾. 故有 $w(G)>\omega$. 证毕.

注 3.1.4 *例 3.1.1 与 3.1.2 分别说明等式 (1) 和 (2) 在拟拓扑群中都不成立. 众所周知, 每个拓扑空间 X 满足式子 $c(X)\le d(X)\le nw(X)$ 与 $l(X)\le nw(X)$. 由 [134, 命题 2.6], 每一个半拓扑群 G 满足 $ib(G)\le d(G)$. 因此例 3.1.3 说明等式 (3)-(7) 不能推广到拟拓扑群中.*

我们知道 κ-narrow 拓扑群的每个子群是 κ-narrow. 然而, κ-narrow 拟拓扑群的闭子群未必是 κ-narrow. 事实上, 蝶形空间 $G=\mathbb{R}^2$ 的子群 $H=\{0\}\times\mathbb{R}$ 是闭离散的. 易知, $ib(H)=2^\omega$. 因为 $d(G)=\omega$, 从而 $ib(G)=\omega$.

设 κ 是无限基数. 半拓扑群 G 的子集 B 称为 κ-narrow, 若对 G 中单位元 e 的任意邻域 U, 存在 G 的子集 K 满足 $|K|\le\kappa$ 且 $B\subseteq KU\cap UK$. 显然, G 是 κ-narrow 当且仅当 G 作为子集是 κ-narrow; κ-narrow 半拓扑群的任意子集在该群中是 κ-narrow. 更进一步, 我们有如下结论.

定理 3.1.5 *设 G 是半拓扑群. 若 G 的子集 B 满足 $l(B)\le\kappa$, 则 B 是 κ-narrow.*

证明 设 U 是 G 中单位元的任意开邻域, 则集族 $\{xU:x\in G\}$ 与 $\{Ux:x\in G\}$ 都是 G 的开覆盖. 因为 $l(B)\le\kappa$, 则存在 G 的子集 C_1,C_2 使得 $|C_i|\le\kappa$ $(i=1,2)$ 且集族 $\{xU:x\in C_1\}$ 与 $\{Ux:x\in C_2\}$ 覆盖 B, 即 $B\subseteq C_1U\cap UC_2$. 因而, B 是 κ-narrow. 证毕.

设 G 是拓扑群. 若 $c(G)=\omega$, 则 G 是 ω-narrow [12, 定理 3.4.7]. 因此, 下述问题是自然的.

问题 3.1.6 *若 G 是拟拓扑群且满足 $c(G)=\omega$, 那么 G 是 ω-narrow 吗?*

§3.2 拟拓扑群中的三空间性质

这一节, 我们先证明遗传不连通性是拟拓扑群的三空间性质. 然后, 通过构造一些例子说明某些拓扑群的三空间性质不是拟拓扑群的三空间性质.

对拓扑空间 X 及 $x\in X$, 记 $c_X(x)$ 为 X 中包含 x 的连通分支. 空间 X 称为遗传不连通的 [48, p. 360], 若对任意 $x\in X$, $c_X(x)=\{x\}$. 对半拓扑群 G, 记 c_G 为 G 中单位元 e 的连通分支.

命题 3.2.1 *设 G 是拟拓扑群且 N 是 G 的任一闭的不变子群. 若 N 与 G/N 都是遗传不连通的, 则 G 也是遗传不连通的.*

证明 设 $q:G\to G/N$ 是自然同态. 若 C 是 G 中的连通子集, 则 $q(C)$ 是 G/N 中的连通子集. 由已知 G/N 是遗传不连通的, 因而 $q(C)$ 是单点集. 这意味着 C 包含于某个 xN. 又因为 xN 也是遗传不连通的, 所以 C 是单点集. 故 G 是遗传不连通的. 证毕.

例 3.2.2 *存在一个完全正则的第一可数拟拓扑群 G 及该群的一个闭的不变子群 H 使得 G/H 与 H 是第二可数的可度量化空间, 但 G 是不可度量化的.*

证明 取实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$ 并赋予蝶形拓扑, 则 G 是完全正则的第一可数拟拓扑群. 定义函数 $f : G \to \mathbb{R}$ 如下: 对任意 $(x, y) \in G$, $f(x, y) = y$. 显然, f 是 G 到 $\mathbb{R}$ 上的连续开同态, 其中 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑, 且 $H = \mathrm{ker} f = \mathbb{R} \times \{0\}$ 具有通常拓扑. 根据 [12, 定理 1.5.3], G/H 拓扑同构于 $\mathbb{R}$. 因此 H 和 G/H 都是第二可数的可度量化空间. 因为 G 是可分的且含有一个不可数的闭离散子空间 $\{0\} \times \mathbb{R}$, 所以 G 是不可度量化的. 证毕.

注 3.2.3 *显然, 例 3.2.2 说明可度量性不是拟拓扑群的三空间性质. 该例也说明局部紧性不是拟拓扑群的三空间性质. 事实上, 易知 H 与 G/H 都是局部紧空间. 然而, G 不是局部紧的, 因为每一个 Hausdorff 局部紧半拓扑群是拓扑群 [47], 但 G 不是拓扑群. M. Choban 证明了若 H 是拓扑群 G 的闭的不变子群满足 H 是第二可数的且 G/H 具有可数网, 则 G 也具有可数网 [152]. 这一结果可以推广到仿拓扑群 [49, 定理 2.6]. 例 3.2.2 说明这一结果不能推广到拟拓扑群, 即使 H 是第二可数拓扑群, 因为拟拓扑群 G 不具有可数网.*

例 3.2.4 *存在一个完全正则的第一可数拟拓扑群 G 及该群的一个闭的不变子群 H 使得 G/H 与 H 都是第二可数的, 但 G 不是第一可数的.*

证明 取实平面加群 $G_1 = \mathbb{R}^2$ 并赋予拓扑 $\mathcal{T}^*$ [10, p. 112], 则 G_1 是完全正则的拟拓扑群. 赋予 G_1 的子群 $G = \mathbb{Q}^2$ 子空间拓扑. 显然, G 是完全正则的. 且由 [10, 性质 3.2], G 不是第一可数的. 定义函数 $f : G \to \mathbb{Q}$ 如下: 对任意 $(x, y) \in G$, $f(x, y) = x$. 容易验证 f 是 G 到 $\mathbb{Q}$ 上的连续开映射, 其中 $\mathbb{Q}$ 赋予通常拓扑, 且 $H = \mathrm{ker} f = \{0\} \times \mathbb{Q}$ 是 G 的离散子空间. 因此, 由 [12, 定理 1.5.3], G/H 拓扑同构于 $\mathbb{Q}$. 于是, H 和 G/H 都是第二可数空间, 但 G 不是第一可数的. 证毕.

注 3.2.5 *例 3.2.4 说明第一可数性与第二可数性都不是拟拓扑群的三空间性质.*

A. Arhangel'skiĭ 与 V. Uspenskij 证明了若拓扑群 G 包含一个闭的局部紧子群 N 且商空间 G/N 是仿紧的, 则 G 也是仿紧的 [13, 定理 2.2]. 换句话说, 仿紧性是拓扑群中具有局部紧核的连续开同态的逆不变量. 进而, 同态

$\pi : G \to G/N$ 是局部完备的, 即 G 中存在一个单位元的闭邻域 P 使得 $\pi_{|P}$ 是完备映射 [12, 定理 3.2.2]. 这些事实不能推广到仿拓扑群中. 实际上, [86] 中证明了存在一个完全正则的仿拓扑群 G 及 G 到仿紧的仿拓扑群 H 上的连续开同态 f 使得 f 具有局部紧的纤维, 但 G 不是局部仿紧的且 f 不是局部完备的. 下述例子表明拓扑群中的这些结果 ([13, 定理 2.2] 与 [12, 定理 3.2.2]) 也不能推广到拟拓扑群中.

例 3.2.6 *存在一个完全正则的拟拓扑群 G 及 G 到仿紧拟拓扑群 H 上的连续开同态 f 使得 f 具有局部紧纤维, 但 G 不是局部仿紧的且 f 不是局部完备的.*

证明 取实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$ 并赋予蝶形拓扑, 则 G 是完全正则的拟拓扑群. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$U_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : n|y| < |x| < \frac{1}{n}\},$$

容易验证集族 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $(G, \mathcal{D})$ 中单位元的邻域基.

下证 G 不是局部仿紧的. 因为仿紧性具有闭遗传性, 因而只需证明对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\overline{U_n}$ 不是 G 的仿紧子空间. 又因为 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \overline{U_n}$ 是 $\overline{U_n}$ 的可数稠密子集且 $(\{\frac{1}{2n}\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{U_n}$ 是 $\overline{U_n}$ 中的基数为 $\mathfrak{c}$ 的闭离散子集, 由 [48, 推论 2.1.10], $\overline{U_n}$ 不是正规的. 因此, $\overline{U_n}$ 不是 G 的仿紧子空间. 故 G 不是局部仿紧的.

定义函数 $f : G \to \mathbb{R}$ 如下: 对任意 $(x,y) \in G$, $f(x,y) = x$. 显然, f 是 G 到 $\mathbb{R}$ 上的连续开同态, 其中 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑, 且 $N = \ker f = \{0\} \times \mathbb{R}$ 是 G 的离散子空间. 令 $H = \mathbb{R}$ 为通常拓扑空间, 则 H 是仿紧的且 N 是局部紧的. 因为 G 是拟拓扑群, 所以 f 的所有纤维都是局部紧的.

最后证明 f 不是局部完备的. 事实上, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 因为 $\frac{1}{2n} \in f(\overline{U_n})$ 且 $f^{-1}(\frac{1}{2n}) \cap \overline{U_n}$ 不是紧的, 所以映射 $f_{|\overline{U_n}}$ 不是完备映射. 证毕.

命题 3.2.7 *伪紧性不是拟拓扑群的三空间性质* [1].

证明 事实上, 设 $\mathscr{P}$ 是拟拓扑群的三空间性质. 若拟拓扑群 G, H 具有性质 $\mathscr{P}$, 则 $G \times H$ 也具有性质 $\mathscr{P}$. 因为 [71, 例 8] 证明了存在伪紧拟拓扑群 G, H 使得 $G \times H$ 不是伪紧的, 所以伪紧性不是拟拓扑群的三空间性质. 证毕.

因为 precompactness 是拓扑群的三空间性质, 所以有如下问题.

问题 3.2.8 *Precompactness 是拟拓扑群的三空间性质吗?*

---

[1] [145] 的审稿者提出该结果, 在此表示感谢.

第四章　拟 (半) 拓扑群的连通性

本章主要讨论拟 (半) 拓扑群的连通性. 对任意拓扑群 G, S. Hartman 与 J. Mycielski [68] 利用 Lebesgue 测度构造了一个道路连通且局部道路连通的拓扑群 $G^\bullet$, 并证明每一个 T_2 拓扑群拓扑同构于一个道路连通且局部道路连通的拓扑群 $G^\bullet$ 的闭子群. [12, 3.8 节] 进一步讨论了拓扑群 G 与 $G^\bullet$ 之间的拓扑性质. 这一章主要将拓扑群上的相关结果推广到拟 (半) 拓扑群上.

4.2 节主要讨论拟 (半) 拓扑群的连通分支, 道路连通分支的性质. 证明了半拓扑群含单位元的连通分支 (道路连通分支) 是该群的不变子群; 所有的遗传不连通拟拓群构成拟拓扑群范畴的反射子范畴.

4.3 节主要考虑将任意一个拟 (半) 拓扑群 G 嵌入到一个道路连通且局部道路连通的 (半) 拓扑群 $G^\bullet$, 并讨论他们之间的拓扑性质. 主要证明了(1) 设 κ 是无限基数, G 是半拓扑群且具有如下性质之一: (a) $\chi(G) \leq \kappa$; (b) $nw(G) \leq \kappa$; (c) $d(G) \leq \kappa$; (d) G 是 κ-narrow, 则 $G^\bullet$ 也具有相同的性质; (2) 若半拓扑群 G 是 σ 紧的, 则 $G^\bullet$ 也是 σ 紧的.

§4.1　预备知识

众所周知, 在拓扑群中 T_0 等价于完全正则. 然而, 拟拓扑群中的分离性却有很大差异.

命题 4.1.1 *[41] 设 G 是拟拓扑群. 若 G 是 T_0 空间, 则 G 是 T_1 空间.*

下面的例子说明下列蕴含关系在拟拓扑群中都不成立:

$$T_1 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_3.$$

$T_1 \not\Rightarrow T_2$. 设 G 是无限群并赋予有限补拓扑 $\tau_{pf}(G) = \{\emptyset, G\} \cup \{G \setminus F : F$ 是 G 的非空有限子集 $\}$, 则 $(G, \tau_{pf}(G))$ 是 T_1 紧的拟拓扑群. 但 $(G, \tau_{pf}(G))$ 不是 T_2 的.

$T_2 \not\Rightarrow T_3$. 取实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $U_\varepsilon = \{(0,0)\} \cup (0,\varepsilon)^2 \cup (-\varepsilon, 0)^2$, 则集族 $\mathscr{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 形成某 T_2 拟拓扑群 (G, τ) 在单位元 $(0,0)$ 处的邻域基. 因为 $\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \overline{U_\varepsilon}$, 所以 (G, τ) 不是 T_3 的.

命题 4.1.2 *[12] 设 G 是群, τ 是 G 上的拓扑, 则 (1) 与 (2) 等价:*

(1) G 是半拓扑群;

(2) 存在 G 在点 e 的局部基 $\mathscr{N}$ 满足如下条件:

(a) $(\forall U, V \in \mathscr{N})(\exists W \in \mathscr{N}) : W \subseteq U \cap V$;

(b) $(\forall U \in \mathscr{N})(\forall x \in U)(\exists V \in \mathscr{N}) : xV \subseteq U$;

(c) $(\forall U \in \mathscr{N})(\forall x \in G)(\exists V \in \mathscr{N}) : xVx^{-1} \subseteq U$.

半拓扑群 G 是拟拓扑群当且仅当

(d) $(\forall U \in \mathscr{N})(\exists V \in \mathscr{N}) : V^{-1} \subseteq U$.

半拓扑群 G 是 T_1 的当且仅当 $\bigcap\{U : U \in \mathscr{N}\} = \{e\}$; G 是 T_2 的当且仅当 $\bigcap\{UU^{-1} : U \in \mathscr{N}\} = \{e\}$.

§4.2 拟 (半) 拓扑群的连通性的基本性质

本节先证明存在一个连通的拟拓扑群使其不是拓扑群, 说明连通性在拟拓扑群中的必要性.

例 4.2.1 *存在一个完全正则的、第一可数的连通拟拓扑群使其不是拓扑群.*

证明 取实平面加群 $G = \mathbb{R}^2$, 并赋予 G 蝶形拓扑 [63, 例 9.10], 则 G 是完全正则的、第一可数的拟拓扑群, 但 G 不是拓扑群. 定义映射 $f : G \to \mathbb{R}$ 如下: 对任意 $(x, y) \in G$, $f(x, y) = y$. 显然, f 是 G 到 $\mathbb{R}$ 上的连续开映射, 其中 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑, 且 G 的子空间 $H = \mathrm{ker} f = \mathbb{R} \times \{0\}$ 具有通常拓扑. 根据 [12, 定理 1.5.3], G/H 拓扑同构于 $\mathbb{R}$. 因为 H 与 G/H 都是连通的, 由 [162, 注 2.4 (2)], G 是连通的. 证毕.

命题 4.2.2 *半拓扑群 G 的连通分支 c_G 是 G 的闭的不变子群, 且对任意 $x \in G$, $c_G(x) = xc_G = c_G x$.*

证明 显然, c_G 是闭的. 下证 c_G 是 G 的不变子群. 对任意 $x \in c_G$, $e \in x^{-1}c_G$. 因为 G 的左变换是连续的, 所以 $x^{-1}c_G$ 是连通的. 因此, $x^{-1}c_G \subseteq c_G$. 由此可得 $(c_G)^{-1}c(G) = \bigcup_{x \in c_G} x^{-1}c_G \subseteq c_G$. 这表明 c_G 是 G 的子群. 对任意 $g \in G$, 因为

G 的共轭变换: $x \mapsto gxg^{-1}$ 是连续的, 所以 c_G 在该映射下的像 gc_Gg^{-1} 是连通的且包含 e. 从而 $gc_Gg^{-1} \subseteq c_G$. 综上可知: c_G 是 G 的闭的不变子群.

因为对任意 $x \in G$, 变换 $y \mapsto xy$ 和 $y \mapsto yx$ 都是 G 上的同胚映射, 因此对任意 $x \in G$, $c_G(x) = xc_G = c_Gx$. 证毕.

例 4.2.3 *存在一个完全正则的、遗传不连通的拟拓扑群使其不是拓扑群.*

证明 取 [138, 例 3.9] 中的拟拓扑群 G. 因为 G 是 T_0 的、零维的、弱第一可数拟拓扑群且不是第一可数的, 因此 G 是完全正则的、遗传不连通的拟拓扑群使其不是拓扑群. 证毕.

引理 4.2.4 *若 G 是半拓扑群, 则 G/c_G 是遗传不连通的.*

证明 设 $\pi : G \to G/c_G$ 是标准同态, H 为 c_{G/c_G} 在 π 下的逆像.

下证 H 是连通的. 令 $H = A \cup B, A \cap B = \emptyset$, 其中 A, B 是 G 中的隔离集. 显然, A 与 B 都是 G 的闭子集.

下证 $A = Ac_G$. 对任意 $a \in A$, ac_G 是连通的, 于是

$$ac_G \cap A \neq \emptyset \Rightarrow ac_G = (ac_G \cap A) \cup (ac_G \cap B) \Rightarrow ac_G \cap B = \emptyset.$$

因而 $ac_G \cap A = ac_G$ 或 $ac_G \subseteq A$. 由此可得 $Ac_G \subseteq A \subseteq Ac_G$, 从而 $A = Ac_G$. 同理可得 $B = Bc_G$. 所以

$$H = A \cup B = Ac_G \cup Bc_G = \pi^{-1}\pi(A) \cup \pi^{-1}\pi(B).$$

于是 $c_{G/c(G)} = \pi(A) \cup \pi(B)$. 因为 $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ 是闭的, 所以 $\pi(A)$ 也是闭的. 同理 $\pi(B)$ 是闭的. 又因为

$$\pi^{-1}(\pi(A) \cap \pi(B)) = \pi^{-1}\pi(A) \cap \pi^{-1}\pi(B) = A \cap B = \emptyset,$$

所以 $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. 因为 c_{G/c_G} 是连通的, 从而 $\pi(A) = \emptyset$ 或 $\pi(B) = \emptyset$, 即 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$. 所以 H 是连通的. 故 $\pi^{-1}(c_{G/c_G}) \subseteq c_G$ 或 $c_{G/c_G} = \{c_G\}$. 证毕.

记 QTopGr 为所有拟拓扑群形成的范畴. 该范畴的对象是拟拓扑群, 态射是拟拓扑群之间的连续同态.

定理 4.2.5 *所有 T_1 拟拓扑群形成的范畴是 $QTopGr$ 的反射子范畴.*

证明 令 $N = \overline{\{e\}} = \bigcap\{V : V$ 是 e 的邻域$\}$, 则 N 是 G 的闭不变子群. 因而 G/N 是 T_1 的拟拓扑群. 记 $r_c : G \to G/N$ 是 G 到 G/N 上的标准同态.

设 H 为任意 T_1 的拟拓扑群且 $f : G \to H$ 是连续同态. 下证 $f(N) = \{e_H\}$. 事实上, 对 e_H 在 H 中的任意邻域 V', 存在 e 在 G 中的邻域 U 使得 $f(U) \subseteq V'$. 因此 $f(N) \subseteq V'$, 从而 $f(N) = \{e_H\}$.

由 [12, 定理 1.5.11] , 存在连续同态 $\overline{f} : G/N \to H$, 其中对任意 $x \in G$, $\overline{f}(xH) = f(x)$. 显然, $\overline{f}r_c = f$. 易证 $\overline{f}$ 是唯一的. 证毕.

定理 4.2.6 *所有遗传不连通拟拓扑群形成的范畴 $HQTopGr$ 是范畴 $QTopGr$ 的反射子范畴.*

证明 设 G 是拟拓扑群. 记 r_G 为 G 到 G/c_G 上的标准同态. 由引理 4.2.4, G/c_G 是遗传不连通的. 设 A 是遗传不连通的拟拓扑群且 $f : G \to A$ 是连续同态, 则 $f(C) = \{e_A\}$. 由 [12, 定理 1.5.11], 存在连续同态 $\overline{f} : G/c_G \to A$ 使得对任意 $x \in G$, $\overline{f}(xc_G) = f(x)$. 易知 $\overline{f}r_G = f$, 且 $\overline{f}$ 是唯一的. 证毕.

空间 X 称为道路连通的, 若 X 中任意两点都存在 X 中连接它们的道路. 空间 X 称为局部道路连通的, 若 X 的每一点都具有由道路连通子集形成的邻域基. 设 G 是半拓扑群, 记 $a(G)$ 是 G 中单位元 e 的道路连通分支, 则有如下结论.

命题 4.2.7 *半拓扑群 G 的道路连通分支 $a(G)$ 是 G 的不变子群.*

证明 对任意 $x \in a(G)$, $e \in x^{-1}a(G)$. 因为左变换是连续的, 所以 $x^{-1}a(G)$ 是道路连通的. 因此, $x^{-1}a(G) \subseteq a(G)$. 由此可得 $a(G)^{-1}a(G) = \bigcup_{x\in a(G)} x^{-1}a(G) \subseteq a(G)$. 这表明 $a(G)$ 是 G 的子群. 又因为对任意 $g \in G$, 共轭映射 $x \mapsto gxg^{-1}$ 是连续的, 所以 $a(G)$ 在该共轭映射下的像 $ga(G)g^{-1}$ 是道路连通的且包含 e. 因此 $ga(G)g^{-1} \subseteq a(G)$. 故 $a(G)$ 是 G 的不变子群. 证毕.

§4.3 拟 (半) 拓扑群的嵌入

对任意拓扑群 G, S. Hartman 与 J. Mycielski [68] 利用 Lebesgue 测度构造了一个道路连通且局部道路连通的拓扑群 $G^{\bullet}$, 并证明了如下定理.

定理 4.3.1 *每一个 T_2 拓扑群 G 拓扑同构于一个道路连通且局部道路连通拓扑群 $G^\bullet$ 的闭子群.*

这一节, 主要通过修正 [68] 的构造及证明方法证明任一拟 (半) 拓扑群 G 拓扑同构于一个道路连通且局部道路连通的拟 (半) 拓扑群 $G^\bullet$ 的子群, 并在此基础上进一步讨论它们之间的拓扑性质.

设 G 是一个群. 令 $J=[0,1)$, G^J 是 J 到 G 的全体映射的集合, $G^\bullet$ 为 G^J 的子集且满足如下条件:

($\triangle$): $f\in G^\bullet$ 当且仅当存在某个有限序列 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ 满足对任意 $k=0,1,\cdots,n-1$, f 在 $[a_k,a_{k+1})$ 上取定值.

定义集合 $G^\bullet$ 上的二元运算 $*$ 如下: 对任意 f, $g\in G^\bullet$ 及 $x\in J$, 令

$$(f*g)(x)=f(x)g(x).$$

容易验证 $(G^\bullet,*)$ 是一个群且其单位元为 $e^\bullet$, 其中对任意 $r\in J$ 有 $e^\bullet(r)=e$. 对每一 $f\in G^\bullet$ 有唯一的逆 $f^{-1}\in G^\bullet$, 其中对任意 $r\in J$ 有

$$f^{-1}(r)=(f(r))^{-1}.$$

对任意拟 (半) 拓扑群 G, 设 $\mathscr{N}$ 是单位元的邻域基. 定义 $G^\bullet$ 上的拓扑如下: 对任意 $V\in\mathscr{N}$ 及实数 $\varepsilon>0$, 令

$$O(V,\varepsilon)=\{f\in G^\bullet:\mu(\{r\in J:f(r)\notin V\})<\varepsilon\},$$

其中 μ 是 J 上的 Lebesgue 测度. 令

$$\mathscr{N}^\bullet=\{O(V,\varepsilon):V\in\mathscr{N}(e),\varepsilon>0\},$$

则下述两个命题成立. 因此, 集族 $\mathscr{N}^\bullet$ 是 $G^\bullet$ 上某拟 (半) 拓扑群拓扑在单位元 $e^\bullet$ 处的邻域基. 此后 $G^\bullet$ 上的拓扑总是指由 $e^\bullet$ 的邻域基 $\mathscr{N}^\bullet$ 生成的拓扑.

命题 4.3.2 *若 G 是半拓扑群, 则集族 $\mathscr{N}^\bullet$ 满足命题 4.1.2 中的条件 (a)-(c); 若 G 是拟拓扑群, 则 (d) 也成立.*

证明 设 G 是半拓扑群.

(a) 对 $\mathscr{N}^\bullet$ 中的任意两元 $O(V_1,\varepsilon_1)$ 与 $O(V_2,\varepsilon_2)$, 取 $U\in\mathscr{N}$ 使得 $U\subseteq V_1\cap V_2$ 及 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. 易验证 $O(U,\varepsilon)\subseteq O(V_1,\varepsilon_1)\cap O(V_2,\varepsilon_2)$.

(b) 对任意 $O(V,\varepsilon)\in\mathscr{N}^\bullet$ 及 $f\in O(V,\varepsilon)$, 存在有限序列 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ 及 $\{x_k:k=0,1,\cdots,n-1\}\subseteq G$ 使得对任意 $x\in J_k=[a_k,a_k+1)$ 及 $k=0,1,\cdots,n-1$, $f(x)=x_k$. 设 $A=\{k:x_k\in V,i=0,1,\cdots,n-1\}$, 则存在 $U\in\mathscr{N}$ 使得 $Ux_k\subseteq V$ 对任意 $k\in A$ 成立. 令 $\delta=\varepsilon-\mu\{r\in J:f(r)\notin V\}$, 则 $O(U,\delta)f\subseteq O(V,\varepsilon)$. 事实上, 对任意 $g\in O(U,\delta)$, 由 Lebesgue 测度的性质, 下述式子成立

$$\begin{aligned}
\{r\in J:g(r)f(r)\notin V\} &= \bigcup_{k=0}^{n-1}\{r\in[a_k,a_{k+1}):g(r)x_k\notin V\}\\
&= \bigcup_{k\in A}\{r\in[a_k,a_{k+1}):g(r)x_k\notin V\}\cup\\
&\quad \bigcup_{k\in\{0,1,\cdots,n-1\}\setminus A}\{r\in[a_k,a_{k+1}):g(r)x_k\notin V\}\\
&\subseteq \{r\in J:g(r)\notin U\}\cup\{r\in J:f(r)\notin V\}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mu(\{r\in J:g(r)f(r)\notin V\}) &\le \mu(\{r\in J:g(r)\notin U\}\cup\{r\in J:f(r)\notin V\})\\
&\le \mu(\{r\in J:g(r)\notin U\})+\mu(\{r\in J:f(r)\notin V\})\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 $g*f\in O(V,\varepsilon)$, 从而 $O(U,\delta)f\subseteq O(V,\varepsilon)$.

(c) 对任意 $O(V,\varepsilon)\in\mathscr{N}^\bullet$ 及 $f\in G^\bullet$, 存在有限序列 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ 及 $\{x_k:k=0,1,\cdots,n-1\}\subseteq G$ 使得对任意 $x\in J_k=[a_k,a_k+1)$ 及 $k=0,1,\cdots,n-1$ 有 $f(x)=x_k$. 因为 G 是半拓扑群, 则存在 $U\in\mathscr{N}$ 使得对任意 $k=0,1,\cdots,n-1$, $x_kUx_k^{-1}\subseteq V$. 因此, 对任意 $g\in O(U,\varepsilon)$ 有

$$\begin{aligned}
\{r\in J:f(r)g(r)f(r)^{-1}\notin V\} &= \bigcup_{k=0}^{n-1}\{r\in[a_k,a_{k+1}):x_kg(r)x_k^{-1}\notin V\}\\
&\subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1}\{r\in[a_k,a_{k+1}):g(r)\notin U\}\\
&= \{r\in J:g(r)\notin U\}.
\end{aligned}$$

因而

$$\mu(\{r \in J : f(r)g(r)f(r)^{-1} \notin V\}) \leq \mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) < \varepsilon.$$

所以 $fgf^{-1} \in O(V, \varepsilon)$, 于是 $fO(U, \varepsilon)f^{-1} \subset O(V, \varepsilon)$.

若 G 是拟拓扑群.

(d) 对任意 $O(V, \varepsilon) \in \mathscr{N}^\bullet$, 存在 $U \in \mathscr{N}$ 使得 $U^{-1} \subseteq V$ 且 $U = U^{-1}$. 于是 $O(U, \varepsilon)$ 在 $G^\bullet$ 中是对称的. 显然, $e^\bullet \in O(U, \varepsilon) \subseteq O(V, \varepsilon)$.

命题 4.3.3 *若拟 (半) 拓扑群 G 是 T_i 的, 则 $G^\bullet$ 也是 T_i 的, 其中 $i \in \{1, 2\}$.*

证明 设 $f \in G^\bullet$ 且 $f \neq e^\bullet$, 则 $\varepsilon = \mu(\{r \in J : f(r) \neq e\}) > 0$ 且 $f(r)$ 的值仅有有限个.

若 $i = 1$, 则存在 $V \in \mathscr{N}$ 使得 V 不含除 e 外的任何 $f(r)$ 的值. 从而 $f \notin O(V, \varepsilon)$. 因此 $\bigcap \mathscr{N}^\bullet = \{e^\bullet\}$, 即 $G^\bullet$ 是 T_1 的.

若 $i = 2$, 则存在 $V \in \mathscr{N}$ 使得 VV^{-1} 不含除 e 外的任何 $f(r)$ 的值. 从而对任意 $f \in O(V, \frac{\varepsilon}{2})$, $\mu(\{r \in J : f(r)g(r) \notin V\}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. 因此 $f \notin O(V, \frac{\varepsilon}{2})(O(V, \frac{\varepsilon}{2}))^{-1}$. 所以 $\bigcap_{U \in \mathscr{N}^\bullet} UU^{-1} = \{e^\bullet\}$, 即 $G^\bullet$ 是 T_2 的. 证毕.

命题 4.3.4 *半拓扑群 $G^\bullet$ 是道路连通且局部道路连通的.*

证明 只需证明对半拓扑群 G, $G^\bullet$ 是局部道路连通的即可, 其他情形类似. 因为半拓扑群是齐性空间, 只需证对任意 $O(V, \varepsilon)$ 是道路连通的. 任取 $O(V, \varepsilon)$ 及 $f \in O(V, \varepsilon)$, 则存在连续函数 $\varphi : [0, 1] \to O(V, \varepsilon)$ 使得 $\varphi(0) = e^\bullet$ 及 $\varphi(1) = f$. 事实上, 由 $G^\bullet$ 的定义, 存在有限实数列 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ 使得对每一 $k = 0, 1, \cdots, n-1$, f 在 $[a_k, a_{k+1})$ 上为定值. 对任意 $t \in [0, 1]$ 及每一非负整数 $k < n$, 令 $b_{k;t} = a_k + t(a_{k+1} - a_k)$. 易知, 对任意 $0 < t < 1$ 及 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 有 $b_{k;0} = a_k, b_{k;1} = a_{k+1}$ 及 $a_k < b_{k;t} < a_{k+1}$. 定义映射 $\varphi : [0, 1] \to G^\bullet$ 如下: $\varphi(0) = e^\bullet$, $\varphi(1) = f$, 对任意 $0 < t < 1$ 及 $0 \leq r < 1$,

$$\varphi(t)(r) = \begin{cases} f(r), & \text{若 } a_k \leq r < b_{k;t}; \\ e, & \text{若 } b_{k;t} \leq r < a_{k+1}. \end{cases}$$

对每一 $t \in [0, 1]$, 因为

$$\{r \in J : \varphi(t)(r) \notin V\} \subseteq \{r \in J : f(r) \notin V\},$$

则映射 $\varphi(t) \in O(V,\varepsilon)$. 下证 φ 在 $[0,1]$ 上是连续的. 任取 $t_0 \in [0,1]$, 令 $\delta = \varepsilon - \mu(\{r \in J : \varphi(t_0)(r) \notin V\})$, 则 $\varphi(t_0-\delta, t_0+\delta) \subseteq O(V,\varepsilon)$. 实际上, 对任意 $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$, 下列式子成立

$$\begin{aligned}\{r \in J : \varphi(t)(r) \notin V\} &= \{r \in J : \varphi(t)(r) \notin V, \varphi(t)(r) = \varphi(t_0)(r)\} \cup \\ &\quad \{r \in J : \varphi(t)(r) \notin V, \varphi(t)(r) \neq \varphi(t_0)(r)\} \\ &\subseteq \{r \in J : \varphi(t_0)(r) \notin V\} \cup \{r \in J : \varphi(t)(r) \neq \varphi(t_0)(r)\}.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\mu(\{r \in J : \varphi(t)(r) \neq \varphi(t_0)(r)\}) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu(\{r \in [a_k, a_{k+1} : \varphi(t)(r) \neq \varphi(t_0)(r)\}) \\ &= |\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k;t} - b_{k;t_0})| \\ &= |t - t_0| < \delta.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mu(\{r \in J : \varphi(t)(r) \notin V\}) &\leq \mu(\{r \in J : \varphi(t_0)(r) \notin V\}) \\ &\quad +\mu(\{r \in J : \varphi(t)(r) \neq \varphi(t_0)(r)\}) \\ &< \mu\{r \in J : \varphi(t_0)(r) \notin V\} + \delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

从而, $\varphi(t) \in O(V,\varepsilon)$. 由 t 的任意性,

$$\varphi(t_0-\delta, t_0+\delta) \subseteq O(V,\varepsilon).$$

因此, 对任意 $f \in O(V,\varepsilon)$, 存在 $O(V,\varepsilon)$ 中连接 f 与 $e^\bullet$的道路. 这说明对 $O(V,\varepsilon)$ 中的任意两元存在 $O(V,\varepsilon)$ 中连接这两点的道路. 故 $O(V,\varepsilon)$ 是道路连通的. 证毕.

定理 4.3.5 *对每一个拟 (半) 拓扑群 G, 存在一个从 G 到道路连通且局部道路连通拟 (半) 拓扑群 $G^\bullet$ 的子群的自然拓扑同构 $i_G : G \to G^\bullet$. 若 G 是 T_2 的, 则 $i_G(G)$ 闭于 $G^\bullet$.*

证明 对每一 $x \in G$, $G^\bullet$ 中的元 $x^\bullet$ 定义如下: 对任意 $r \in J$, $x^\bullet(r) = x$. 映射 $i_G : G \to G^\bullet, x \mapsto x^\bullet$ 是拓扑单射. 事实上, 显然 $i_G : G \to i_G(G)$ 是同构映射. 对任意 $V \in \mathscr{N}$,

$$i_G(V) = \{x^\bullet : x \in V\} = O(V,1) \cap i_G(G)$$

及

$$i_G^{-1}(O(V,\varepsilon)\cap i_G(G)) = i_G^{-1}(\{x^\bullet : x\in V\}) = V.$$

因此, i_G 是拓扑单射.

由命题 4.3.4, 半拓扑群 $G^\bullet$ 是道路连通且局部道路连通的. 若 G 是 T_2 的, 下证 $i_G(G)$ 是 $G^\bullet$ 的闭子群.

任取 $f\in G^\bullet\setminus i_G(G)$. 显然, 映射 f 不是 J 到 G 的常值映射. 因此, 存在实数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足 $0\le a_1<a_2\le a_3\le a_4\le 1$ 及 $x_1,x_2\in G$ 使得 f 在 $[a_1,a_2)$ 上的值为 x_1, 在 $[a_3,a_4)$ 上的值为 x_2. 因为 x_1,x_2 是 G 中不同点且 G 是 T_2 的, 从而存在 $V\in\mathscr{N}$ 使得 $Vx_1\cap Vx_2=\emptyset$. 令 $\varepsilon=\min\{a_2-a_1,a_4-a_3\}$, 则 $i_G(G)\cap O(V,\varepsilon)f=\emptyset$. 实际上, 任取 $g\in O(V,\varepsilon)$,

$$\mu\{r\in J: g(r)\notin V\}<\varepsilon.$$

显然, 可选取 $r_1\in[a_1,a_2)$ 及 $r_2\in[a_3,a_4)$ 使得 $g(r_1),g(r_2)\in V$. 因此,

$$gf(r_1)=g(r_1)f(r_1)=g(r_1)x_1\in Vx_1$$

且

$$gf(r_2)=g(r_2)f(r_2)=g(r_2)x_2\in Vx_2.$$

又因为 $Vx_1\cap Vx_2=\emptyset$, 所以 $gf(r_1)\neq gf(r_2)$. 从而映射 $f\notin\overline{i_G(G)}^{G^\bullet}$, 即 $i_G(G)$ 闭于 $G^\bullet$. 证毕.

接下来我们讨论 G 与 $G^\bullet$ 之间的拓扑性质. 下述结论推广了拓扑群中的相应结果.

定理 4.3.6 *设 κ 是无限基数, G 是半拓扑群且具有如下性质之一:*

(a) $\chi(G)\le\kappa$;

(b) $nw(G)\le\kappa$;

(c) $d(G)\le\kappa$;

(d) G 是 κ-narrow,

则 $G^\bullet$ 也具有相同的性质.

证明 (a) 假设 G 在单位元 e 处有邻域基 $\mathscr{N}$ 满足 $|\mathscr{N}|\le\kappa$. 由 $G^\bullet$ 上拓扑的定义, 集族 $\mathscr{N}^\bullet=\{O(V,1/n): V\in\mathscr{N}, n\in\mathbb{N}\}$ 是 $G^\bullet$ 中单位元 $e^\bullet$ 的邻域基, 且 $|\mathscr{N}^\bullet|\le|\mathscr{N}|\cdot\omega\le\kappa$. 这就证明了 (a).

(b) 取 G 的网 $\mathcal{P}$ 满足 $|\mathcal{P}| \leq \kappa$. 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 记 $J(m) = \{(b_1, \ldots, b_m) : 0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$ 且对每一 $i \in \{1, \ldots, m\}$, $b_i \in \mathbb{Q}\}$. 给定 $m, n \in \mathbb{N}$ 及 $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in J(m)$, $\overrightarrow{P} = (P_1, \ldots, P_m) \in \mathcal{P}^m$, 定义 $G^\bullet$ 的子集 $Q(m, n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P})$ 如下: $g \in Q(m, n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P})$ 当且仅当

$$\mu(\{r \in J : \text{存在 } k \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ 使得 } b_k \leq r < b_{k+1},\ g(r) \notin P_{k+1}\}) < \frac{1}{n}.$$

令 $\mathcal{L} = \{Q(m, n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P}) : m, n \in \mathbb{N}, \overrightarrow{b} \in J(m), \overrightarrow{P} \in \mathcal{P}^m\}$, 则 $|\mathcal{L}| \leq \kappa$. 下证 $\mathcal{L}$ 是 $G^\bullet$ 的网. 事实上, 任取 $f \in G^\bullet$ 及 $O(V, \varepsilon)$, 则存在 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 满足 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$ 使得 f 在每个半开区间 $J_k = [a_k, a_{k+1})$ 上取定值. 对每一 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, 令 $x_k = f(a_k)$, 因为 $\mathcal{P}$ 是 G 的网, 所以存在 $P_{k+1} \in \mathcal{P}$ 使得 $x_k \in P_{k+1} \subseteq x_k V$. 选取 $n \in \mathbb{N}$ 及 $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in J(m)$ 满足 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 且对任意 $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ 有 $a_k \leq b_k < a_{k+1}$, 及 $\sum_{k=1}^{m-1}(b_k - a_k) < \frac{1}{2n}$. 设 $b_0 = 0, b_m = 1$, 接下来只需验证: $f \in Q(m, 2n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P}) \subseteq fO(V, \varepsilon)$. 由 $\overrightarrow{b}$ 及 $\overrightarrow{P}$ 的选取可知, 对任意 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 及 $r \in [b_k, a_{k+1})$, $f(r) = x_k \in P_{k+1}$. 因此若对某个 $k < m$ 有 $b_k \leq r < b_{k+1}$ 及 $f(r) \notin P_{k+1}$, 则 $r \in [a_{k+1}, b_{k+1})$ 及 $k + 1 \neq m$. 因为 $\sum_{k=1}^{m-1}(b_k - a_k) < \frac{1}{2n}$, 则 $f \in Q(m, 2n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P})$. 为了完成证明, 只需证对任意 $g \in Q(m, 2n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P})$, 有 $f^{-1}g \in O(V, \varepsilon)$. 令

$$L = \{r \in J : \text{存在 } k \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ 使得 } b_k \leq r < b_{k+1}, g(r) \notin P_{k+1}\},$$

由 $Q(m, 2n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P})$ 的定义知 $\mu(L) < \frac{1}{2n}$. 若对某个 $k < m$ 有 $r \in J \setminus L$ 及 $b_k \leq r < a_{k+1}$, 则 $g(r) \in P_{k+1}$ 且 $f(r) = x_k$. 由此可得, $(f^{-1} * g)(r) = x_k^{-1} g(r) \in x_k^{-1} P_{k+1} \subseteq V$. 这说明

$$M = \{r \in J : f^{-1} * g)(r) \notin V\} \subseteq L \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} [a_k, b_k).$$

因此, $\mu(M) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. 于是 $f^{-1}g \in O(V, \varepsilon)$, 即 $Q(m, 2n, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{P}) \subseteq fO(V, \varepsilon)$. 故 $\mathcal{L}$ 是 $G^\bullet$ 的网.

(c) 取稠密子集 $D \subseteq G$ 满足 $|D| \leq \kappa$. 记 S 为 $G^\bullet$ 中满足如下条件的元 f 的集合: 存在有理数 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 满足 $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$ 使得 f 在每个半开区间 $J_k = [b_k, b_{k+1})$ 上取定值 $x_k \in D$. 易知 $|S| \leq |D| \cdot \omega \leq \kappa$, 下证 S 在 $G^\bullet$ 中稠密. 事实上, 设 $fO(V, \varepsilon)$ 是 $f \in G^\bullet$ 的开邻域, 其中 V 是 G 中单位元 e 的开邻域且 $\varepsilon > 0$. 于是存在实数 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ 满足对任意

$k=0,1,\cdots,n-1$, f 在 $[a_k,a_{k+1})$ 上取定值. 取 J 中的有理数 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 使得对每一 $k<n$, $a_k\le b_k<a_{k+1}$ 且 $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-a_k)<\varepsilon$. 对每一 $k<n$, 因为 D 是 G 的稠密子集, 所以 $D\cap x_kV\ne\emptyset$. 取 $y_k\in D\cap x_kV$, 其中 $x_k=f(a_k)$. 令 $b_0=0$ 及 $b_n=1$. 定义元 $g\in S$ 如下: 对任意 $r\in[b_k,b_{k+1})$ 及 $k=0,\cdots,n-1$, $g(r)=y_k$, 则 $\{r\in J:f^{-1}g(r)\notin V\}\subseteq\{r\in J:r\in[a_k,b_k),k=0,1,\cdots,n-1\}$. 由此可得 $\mu(\{r\in J:f^{-1}g(r)\notin V\})\le\mu(\{r\in J:r\in[a_k,b_k),k=0,1,\cdots,n-1\})<\varepsilon$. 因此 $g\in fO(V,\varepsilon)$, 从而 S 是 $G^\bullet$ 的稠密子集.

最后证明 (d). 设 G 是 κ-narrow. 设 $O=O(V,\varepsilon)$ 是 $e^\bullet$ 在 $G^\bullet$ 中的任意开邻域, 其中 V 是 e 在 G 中的开邻域且 $\varepsilon>0$, 则存在集合 $D\subseteq G$ 使得 $G=DV$ 及 $|D|\le\kappa$. 记 S 为 $G^\bullet$ 中满足如下条件的元 g 的集合: 存在有理数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 满足 $0=b_0<b_1<\cdots<b_n=1$, 且函数 g 在每一 $J_k=[b_k,b_{k+1})$ 上取定值, 其值是 D 中的元. 易知 $|S|\le\kappa$. 下证 $G^\bullet=SO$. 任取 $f\in G^\bullet$, 则存在 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ 使得对任意 $k=0,1,\cdots,n-1$, f 在 $[a_k,a_{k+1})$ 上取定值. 类似于 (c) 中的构造方法, 取有理数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 使得对任意 $k=1,\cdots,n-1$ 有 $b_0=0,b_n=1,a_k\le b_k<a_{k+1}$, 且 $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-a_k)<\varepsilon$. 对每一 $k\in\{0,1,...,n-1\}$, 取 $x_k\in D$ 使得 $f(a_k)\in x_kV$. 记 g 为 $G^\bullet$ 中的元使得 g 在 $J_k=[b_k,b_{k+1})$ 上的取值为 x_k, 则 $g\in S$ 且 $f\in gO$. 这就证明了 $G^\bullet=SO$, 故 $G^\bullet$ 是 κ-narrow. 证毕.

由定理 4.3.5 和 4.3.6 及引理 2.1.1, 下列两推论是显然的.

推论 4.3.7 *设 G 拟 (半) 拓扑群, 则 G 是第一可数的当且仅当 $G^\bullet$ 是第一可数的.*

推论 4.3.8 *设 G 是 T_2 的拟拓扑群, 则 G 是半度量的当且仅当 $G^\bullet$ 是半度量的.*

定理 4.3.9 *若半拓扑群 G 是 σ 紧的, 则 $G^\bullet$ 也是 σ 紧的.*

证明 设 G 是可数个紧子集 K_i 的并, 其中 $i\in\mathbb{N}$. 不妨设对任意 $i\in\mathbb{N}$, $K_i\subseteq K_{i+1}$. 对任意 $n,m\in\mathbb{N}$, 令

$$A_n=\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{I}^n:0<a_1<\cdots<a_n<1\}$$

及

$$A_{n,m}=\{(a_1,\cdots,a_n)\in A_n:\ \text{对任意}\ k\le n,\ a_{k+1}-a_k\ge 1/m\},$$

其中 $a_0 = 0$ 及 $a_{n+1} = 1$. 易知 $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$ 且每一 $A_{n,m}$ 闭于 $\mathbb{I}^n$. 特别地, $A_{n,m}$ 是紧的. 给定 $n \in \mathbb{N}$, 定义映射 $\varphi_n : G^n \times A_n \to G^\bullet$ 如下: $\varphi_n(x_0, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n) = f$, 其中对任意 $k \leq n$, $f : J \to G$ 在 $[a_k, a_{k+1})$ 上的值为 x_k. 则对任意 $m \in \mathbb{N}$, φ_n 限制到 $G^n \times A_{n,m}$ 上是连续的. 事实上, 取 $p = (x_0, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n) \in G^n \times A_{n,m}$ 且令 $f = \varphi_n(p)$. 考虑 f 在 $G^\bullet$ 中的开邻域 $fO(V, \varepsilon)$, 其中 V 是 G 中单位元的开邻域且 $\varepsilon > 0$. 取 $\delta < \min\{\varepsilon/(2n), 1/(2m)\}$, 并定义 p 在 $G^n \times \mathbb{R}^n$ 中的邻域 W 如下

$$W = x_0V \times \cdots \times x_nV \times (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

下证对任意 $q \in W \cap (G^n \times A_{n,m})$, $\varphi_n(q) \in fO(V, \varepsilon)$.

显然, $q = (y_0, \cdots, y_n, b_1, \cdots, b_n)$, 其中 $(y_0, \cdots, y_n) \in G^{n+1}$ 及 $(b_1, \cdots, b_n) \in A_{n,m}$. 令 $g = \varphi_n(q)$, 易知对任意 $k \leq n$, $x_k^{-1}y_k \in V$. 若对某个 $k \leq n$ 有 $r \in J \setminus \bigcup_{k=1}^{n}(a_k - \delta, a_k + \delta)$ 及 $a_k \leq r < a_{k+1}$, 则 $b_k \leq r < b_{k+1}$ 且 $g(r) = y_k$ (其中, $b_0 = 0$ 且 $b_{n+1} = 1$). 因此, $f(r)^{-1}g(r) = x_k^{-1}y_k \in V$. 这说明

$$L = \{r \in J : (f^{-1} * g)(r) \notin V\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(a_k - \delta, a_k + \delta),$$

从而 $\mu(L) \leq 2n\delta < \varepsilon$. 于是, $f^{-1} * g \in O(V, \varepsilon)$. 所以 $g = \varphi_n(q)$ 是 $fO(V, \varepsilon)$ 中的元, 即 φ_n 在 $G^n \times A_{n,m}$ 上连续. 容易验证 $G^\bullet = \bigcup_{i,n,m=1}^{\infty} \varphi_n(K_i^n \times A_{n,m})$, 其中每一 $\varphi_n(K_i^n \times A_{n,m})$ 是 $G^\bullet$ 中的紧子集. 故 $G^\bullet$ 是 σ 紧的. 证毕.

因为 σ 紧性是闭遗传的, 因此有如下推论.

推论 4.3.10 *设 G 是 T_2 的拟 (半) 拓扑群, 则 G 是 σ 紧的当且仅当 $G^\bullet$ 是 σ 紧的.*

第五章 对称积的广义度量性质与覆盖性质

约定: 本章中映射均指连续的满映射.

Borsuk 和 Ulam [27] 引进了任意拓扑空间对称积的概念. 对于拓扑空间 X 及每一 $n \in \mathbb{N}$, n 重对称积 $\mathscr{F}_n(X)$ 可以通过积空间 X^n 的商空间获得. 对单位闭区间 $\mathbb{I}$, Borsuk 与 Ulam 证明了当 $n \in \{1,2,3\}$ 时, n 重对称积 $\mathscr{F}_n(\mathbb{I})$ 同胚于 $\mathbb{I}^n$; 且若 $n \geq 4$ 时, $\mathscr{F}_n(\mathbb{I})$ 不同胚于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的任何子集; 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\dim\mathscr{F}_n(\mathbb{I}) = n$. Bott [28] 证明了 $\mathscr{F}_3(\mathbb{S}^1)$ 同胚于 $\mathbb{S}^3$, 其中 $\mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^3$ 分别表示单位圆周和 3 维球面. 之后, Ganea [54], Molski [119], Schori [136] 及 Macías [107, 108, 109, 110] 等进一步研究了对称积.

最近, Good 和 Macías [60] 讨论了广义度量空间的对称积. 他们获得了一些广义度量性质 $\mathscr{P}$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 空间 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 X 具有性质 $\mathscr{P}$. 这表明对称积的性质在某种程度上反映了积拓扑的性质. 值得指出的是, 他们的方法是构造性的, 不依赖于积拓扑和闭映射, 这进一步揭示了空间 X 与 $\mathscr{F}_n(X)$ 的内部结构之间的联系. 同时他们给出了一些例子说明空间 X 具有某些性质, 但 $\mathscr{F}_2(X)$ 不具有该性质.

虽然 Good 与 Macías 指出 [60, p. 94]: “我们尽可能直接证明我们的结果而不是依赖于乘积与闭映射”, 我们仍然尝试利用闭子空间, 有限乘积和有限到一闭映射, 并利用这一方法统一与简化文献 [60] 中已获得的结果及获得对称积一些新的结果. 首先我们获得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 关于 X^n 的像的一般稳定性定理 (定理 5.2.1). 作为一般稳定性定理的应用, 我们考虑拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 列举或证明了 43 个满足一般稳定性定理的拓扑性质, 并在定理 5.2.9 中给出了 [60, 问题 3.35] 的肯定回答. 在 5.3 节, 获得了关于 X^n 的像与 $\mathscr{F}_n(X)$ 的逆像的一般稳定性定理 (定理 5.3.1). 作为这一定理的应用, 我们考察拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及空间 X, 积空间 X^n 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 列举或证明了 25 个满足这一定理的拓扑性质, 并在例 5.3.16 中给出了 [60, 问题 3.6] 的否定回答.

有许多性质满足稳定性定理, 这里仅列举了其中的一部分.

本章取材于作者和林寿教授、林福财教授最近发表的论文“Zhongbao Tang, Shou Lin, Fucai Lin, Symmetric products and closed finite-to-one mappings, Topol. Appl. 234 (2018), 26-45”, 即参考文献 [144].

§5.1 预备知识

设 (X,τ) 是拓扑空间, 其中 τ 是 X 上的拓扑. 考虑 X 中的下列子集族:

1. $2^X=\{A\subseteq X:\ A$ 是 X 的非空紧子集$\}$;
2. $\mathscr{F}(X)=\{A\in 2^X:\ A$ 是有限集$\}$;
3. $\mathscr{F}_n(X)=\{A\in 2^X:|A|\leq n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

显然, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)\subseteq\mathscr{F}_{n+1}(X)\subseteq 2^X$ 且 $\mathscr{F}(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n(X)$.

赋予子集族 2^X Vietoris 拓扑 τ_V, 所有形如下列的子集构成 τ_V 的一个基:

$$\langle U_1,\ldots,U_k\rangle=\{A\in 2^X:A\subseteq\bigcup_{i\leq k}U_i \text{ 且对每一 } i\in\{1,\ldots,k\},A\cap U_i\neq\emptyset\},$$

其中对每一 $k\in\mathbb{N}$ 及 $i\leq k$, U_i 是 X 中的开集.

赋予子集族 $\mathscr{F}_n(X)$ 与 $\mathscr{F}(X)$ 关于 2^X 的子空间拓扑. 空间 2^X 称为 X 的非空紧子集的超空间; 子空间 $\mathscr{F}(X)$ 称为 X 的有限子集的超空间; 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 子空间 $\mathscr{F}_n(X)$ 称为 X 的 n 重对称积.

映射 $f_n:X^n\twoheadrightarrow\mathscr{F}_n(X)$ 定义如下: 对任意 $(x_1,\ldots,x_n)\in X^n$, $f_n(x_1,\ldots,x_n)=\{x_1,\ldots,x_n\}$. 该映射在本章中将反复使用, 且有如下引理.

引理 5.1.1 设 X 是拓扑空间, $n\in\mathbb{N}$, 则

(1) $\mathscr{F}_n(X)$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 的闭子集;

(2) $f_n:X^n\twoheadrightarrow\mathscr{F}_n(X)$ 是有限到一闭映射 *[60]*.

由引理 5.1.1, 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 若 $m<n$, 则 $\mathscr{F}_m(X)$ 是 $\mathscr{F}_n(X)$ 的闭子集, 且映射 $f_1:X\twoheadrightarrow\mathscr{F}_1(X)$ 是同胚映射.

对超空间的分离性有如下结果 [113, 定理 4.9]: 空间 X 是 T_2 (正则, 完全正则) 空间当且仅当 2^X 是 T_2 (正则, 完全正则) 空间.

§5.2 X^n 的像

这一节我们主要讨论拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当对每一或某一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$. 有如下一般稳定性定理.

定理 5.2.1 *若拓扑性质 $\mathscr{P}$ 满足:*

(1) $\mathscr{P}$ 是闭遗传的;

(2) $\mathscr{P}$ 是有限可乘的;

(3) $\mathscr{P}$ 是被有限到一闭映射保持.

设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$.

证明 若空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$, 由条件 (2), 积空间 X^n 具有性质 $\mathscr{P}$. 根据引理 5.1.1, 映射 $f_n : X^n \twoheadrightarrow \mathscr{F}_n(X)$ 是有限到一闭映射. 由条件 (3), $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$.

反之, 设 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$. 由条件 (1) 及引理 5.1.1, X 具有性质 $\mathscr{P}$. 证毕.

作为一般稳定性定理的应用, 我们将列出或证明 43 个满足定理 5.2.1 条件的拓扑性质, 见注 5.2.2 及 5.2.3, 推论 5.2.7, 和定理 3.2.8 与 5.2.15. 其中最重要的是关于空间的闭映射性质, 可参考文献 [35, 94].

注 5.2.2 *下列性质 $\mathscr{P}$ 满足定理 5.2.1 的条件, 因此空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当对每一或某一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 这些性质在 [60] 中是通过构造性方法证明的.*

α 空间 [59, 157], $\aleph_0$ 空间 [116], cosmic 空间 [116], 可展空间 [34, 59], 第一可数空间 [156], γ 空间 [59, 80], 局部紧空间[48], 度量空间 [121], Moore 空间 [34, 48, 59], M_2 空间 [26, 40], Nagata 空间 [25, 40], 层空间 [25, 40], σ 空间 [48, 126, 141], 正则空间 [48], r 空间 [94].

注 5.2.3 *下列性质 $\mathscr{P}$ 满足定理 5.2.1 的条件, 因此空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当对每一或某一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 这些性质在 [60] 中没有列出.*

$\aleph$ 空间 [93, 128], Čech 完备空间 [48], hemi 紧空间 [94], k 度量空间 [16], k^* 度量空间 [16], k 半层空间 [55, 106], k_ω 空间 [53], 拟可展空间 [22, 37], 拟度

量空间 *[59, 81]*, 半度量空间 *[59, 156]*, 半层空间 *[44]*, sn 度量空间 *[57]*, so 度量空间 *[100]*, 具有可数型的空间 *[153]*, 具有点可数型的空间 *[50, 96]*, 具有 $\delta\theta$ 基的空间 *[14, 38]*, 具有点可数基的空间 *[14, 50]*, 具有点可数 k 网的空间 *[65]*, 具有 σ 点有限基的空间 *[14, 50]*, 具有一致基的空间 *[14, 34, 155]* [1], 严格 p 空间 *[45, 59]*, 强 Σ 空间 *[32, 122]*, 强 $\Sigma^\sharp$ 空间 *[102]*.

在上述性质中仅验证 k 度量空间满足定理 5.2.1 中的条件. 映射 $f : X \to Y$ 称为 *proper* 映射 [16, p. 477], 若 K 是 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是 X 的紧子集. 度量空间的 proper 映像称为 k 度量空间 [16, p. 484].

引理 5.2.4 *k 度量空间满足定理 5.2.1 中的条件.*

证明 (1) k 度量空间是遗传的. 假设 Y 是 k 度量空间且 Z 是 Y的子空间, 则存在度量空间 X 与 proper 映射 $f : X \to Y$. 设 $S = f^{-1}(Z)$, 则 S 是可度量化空间. 若 A 是 Z 的紧子集, 则 A 也是 Y的紧子集. 从而, $f^{-1}(A)$ 是 X的紧子集, 且 $(f_{|S})^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ 是 S 的紧子集. 所以 $f_{|S} : S \to Z$ 是 proper 映射, 从而 Z 是 k 度量空间.

(2) k 度量空间是可数可乘的. 假设 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 k 度量空间列, 则存在一列度量空间 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及一列 proper 映射 $\{f_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 定义映射 $f : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ 如下: 对每一 $(x_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $f((x_n)) = (f_n(x_n))$. 易知 f 是 proper 映射. 因此 $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ 是 k 度量空间.

(3) k 度量空间被有限到一闭映射保持. 因为两个 proper 映射的复合还是 proper 映射, 所以 k 度量空间被 proper 映射保持. 显然, 每个有限到一闭映射是 proper 映射. 因此, k 度量空间被有限到一闭映射保持.

注 5.2.5 下列拓扑性质 $\mathscr{P}$ 不满足定理 *5.2.1* 中的条件, 但 *[60]* 中证明了空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当对每一或某一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$.

可分空间 *[60, 定理 3.10]*, 具有 G_δ 对角线 (G_δ^* 对角线) 的空间 *[60, 定理 3.21]*, 满足可数链条件的空间 *(MA+¬CH)* *[60, 推论 5.5]*.

[1][34] 与 [155] 没有提及具有一致基的空间. 根据 [48, 引理 5.4.7], 空间具有一致基当且仅当该空间是可展的 meta 紧空间. 设 f 是 X 到 Y 上的完备映射. 若 X 具有一致基, 则 X 是可展的 meta 紧空间. 由 [34, p. 273, 第 2-7 行] 及 [155, 定理 1, p. 175], Y 是可展的 meta 紧空间. 因此 Y 具有一致基.

设拓扑性质 $\mathscr{P}$ 满足可数闭和定理, 由引理 5.1.1, 若每一 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 则由 $\mathscr{F}(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n(X)$, $\mathscr{F}(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$. 于是有下列结论.

注 5.2.6 *下列性质 $\mathscr{P}$ 满足条件: 若空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$, 则 $\mathscr{F}(X)$ 也具有性质 $\mathscr{P}$* [2].

Cosmic 空间 [2, 116], 半层空间 [126], 可分空间, σ 空间 [126], 强 Σ 空间 [122], 强 $\Sigma^\sharp$ 空间 [117].

空间 (X,τ) 称为次可度量的 [63], 若存在 X 上的拓扑 τ' 使得 $\tau'\subseteq\tau$ 且 (X,τ') 是可度量的. 次可度量性不被有限到一闭映射保持 [131, 例 1].

推论 5.2.7 *设 X 是拓扑空间, $n\in\mathbb{N}$, 则 X 是次可度量空间当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 是次可度量空间.*

证明 因为次可度量性是遗传的, 故只需证必要性. 设 (X,τ) 是次可度量空间. 则存在 X 上的拓扑 τ' 使得 $\tau'\subseteq\tau$ 且 (X,τ') 是可度量的. 容易验证 2^X 上的 Vietoris 拓扑满足 $\tau'_V\subseteq\tau_V$. 令 $\mathscr{T}'_n=\tau'_V|\mathscr{F}_n(X)$ 及 $\mathscr{T}_n=\tau_V|\mathscr{F}_n(X)$, 则 $\mathscr{F}_n(X)$ 上的子空间拓扑满足 $\mathscr{T}'_n\subseteq\mathscr{T}_n$. 由定理 5.2.1, $(\mathscr{F}_n(X),\mathscr{T}'_n)$ 是可度量的. 因此 $\mathscr{F}_n(X)$ 是次可度量的. 证毕.

Good 与 Macías [60, p. 94] 提出了下述问题.

问题 5.2.8 *[60, 问题 3.35] 设 X 是拓扑空间, $n\in\mathbb{N}$. 若 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 Morita 的 P 空间, 那么 X 是 Morita 的 P 空间吗?*

下面给出问题 5.2.8 的肯定回答. 回忆 Morita 的 P 空间的定义. 空间 X 称为 *Morita 的 P 空间* [120], 若 X 的开集族 $\{U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A;n\in\mathbb{N}\}$ 满足下述条件: 对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\in A$ 及 $n\in\mathbb{N}$ 有 $U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\subseteq U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, 则存在 X 的闭集族 $\{F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A;n\in\mathbb{N}\}$ 满足下述条件:

(1) $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\subseteq U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$;

(2) 若对每个序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=X$, 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=X$.

---

[2] 正则性不满足可数闭和定理 [48, 例 1.5.6]. 若 X 是正则空间, 则 2^X 是正则的 [113, 定理 4.9], 因此 $\mathscr{F}(X)$ 是正则的.

定理 5.2.9 设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则 X 是 *Morita* 的 P 空间当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 *Morita* 的 P 空间.

证明 由 [60, 定理 3.34], 必要性已证. 根据引理 5.1.1, 只需证 Morita 的 P 空间具有闭遗传性即可.

设 X 是 Morita 的 P 空间, Y 是 X 的闭子空间. 假设 Y 的开集族 $\{U(\alpha_1,\dots,\alpha_n):\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A; n\in\mathbb{N}\}$ 满足下述条件:

对任意 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in A$ 及 $n\in\mathbb{N}$, $U(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\subseteq U(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$.

令 $H(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=U(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cup(X-Y)$, 则 $H(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 开于 X 且 $H(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\subseteq H(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$. 由 Morita 的 P 空间的定义, 存在 X 的闭集族 $\{F(\alpha_1,\dots,\alpha_n):\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A; n\in\mathbb{N}\}$ 满足下述条件:

(1) $F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\subseteq H(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$;

(2) 若对任意序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=X$, 则有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=X$.

容易验证集族 $\{F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cap Y:\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A; n\in\mathbb{N}\}$ 满足 Morita 的 P 空间的定义. 故 Y 是 Morita 的 P 空间. 证毕.

由 [120, 定理 3.3], 闭映射保持 Morita 的 P 空间. 但我们不知道 Morita 的 P 空间是否是有限可乘的.

接下来我们将证明 snf 可数 (sof 可数, csf 可数) 空间满足定理 5.2.1 中的条件, 特别是它们被有限到一闭映射保持.

映射 $f:X\to Y$ 称为序列商映射 [24, p. 174], 若 $f^{-1}(H)$ 是 X 中的序列开集, 则 H 是 Y 中的序列开集[3]. 我们知道 f 是序列商映射当且仅当对任意收敛于 $y\in Y$ 的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 中的序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足对 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的某个子序列 $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 有 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$, 且 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于某个 $x\in f^{-1}(y)$ [24, 定理 4.5].

引理 5.2.10 设 $f:X\to Y$ 是有限到一闭映射, 则 f 是序列商映射.

证明 假设 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中收敛于点 $y\in Y$ 的序列. 令 $S=\{y_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{y\}$, 则 $f^{-1}(S)$ 是 X 的紧的可数子集, 因此 $f^{-1}(S)$ 是紧度量空间 [63, 定理 2.13, 4.6]. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 取点 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 则 $f^{-1}(S)$ 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有收敛子序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. 由 [24, 定理 4.5], f 是序列商映射. 证毕.

[3]设 $f:X\to Y$ 是连续的. 若 H 是 Y 中的序列开集, 则 $f^{-1}(H)$ 是 X 中的序列开集.

引理 5.2.11 *设 $f: X \to Y$ 是有限到一闭映射, 若 X 是 snf 可数的, 则 Y 也是 snf 可数的.*

证明 设 $y \in Y$ 且对某个 $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. 因为 X 是 snf 可数的, 则对每一 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 存在 x_i 的递减的 sn 网 $\{U_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$. 对任意 $j \in \mathbb{N}$, 令 $V_j = \bigcup_{i\leq n} U_{i,j}$, 则 $f(V_j)$ 是 Y 中点 y 的序列邻域. 若不然, 存在 Y 中的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 y 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $y_n \notin f(V_j)$. 由引理 5.2.10, f 是序列商映射, 因而存在 X 中的序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于点 $z \in f^{-1}(y)$ 使得对每一 $k \in \mathbb{N}$, $y_{n_k} = f(z_k)$. 因此, 存在 $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ 满足 $z = x_{i_0}$. 又因为 $U_{i_0,j}$ 是 x_{i_0} 的序列邻域, 所以存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $k > k_0$ 有 $z_k \in U_{i_0,j} \subseteq V_j$, 即对任意 $k > k_0$, $y_{n_k} = f(z_k) \in f(V_j)$, 矛盾. 下证集族 $\{f(V_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 y 在 Y 中的 sn 网. 设 $y \in W$ 且 W 开于 Y, 则 $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq f^{-1}(W)$. 对每一 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 存在 $j_i \in \mathbb{N}$ 使得 $x_i \in U_{i,j_i} \subseteq f^{-1}(W)$. 令 $j = \max\{j_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$, 则 $f^{-1}(y) \subseteq V_j \subseteq f^{-1}(W)$, 即 $y \in f(V_j) \subseteq W$. 证毕.

推论 5.2.12 *设 $f: X \to Y$ 是有限到一闭映射. 若 X 是弱第一可数 (第一可数) 空间, 则 Y 也是弱第一可数 (第一可数) 空间.*

证明 因为序列 (Fréchet) 空间被闭映射保持 [51, 命题 1.2, 2.3], 所以 Y 是序列 (Fréchet) 空间. 由引理 5.2.11, Y 是 snf 可数空间. 又因为空间是弱第一可数 (第一可数) 当且仅当该空间是序列 (Fréchet) 的 snf 可数空间 [97, 99]. 故 Y 是弱第一可数 (第一可数) 空间. 证毕.

引理 5.2.13 *设 $f: X \to Y$ 是有限到一闭映射. 若 X 是 sof 可数的, 则 Y 也是 sof 可数的.*

证明 设 $\sigma X, \sigma Y$ 分别是空间 X, Y 的序列余反射. 定义映射 $g: \sigma X \to \sigma Y$ 如下: 对任意 $x \in X$, $g(x) = f(x)$. 显然 g 是有限到一的.

断言 1. σX 是第一可数的.

设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 是 X 的 so 网. 因为 X 是 sof 可数的, 对任意 $x \in X$, 不妨设集族 $\mathscr{P}_x$ 是 X 中的递减的序列开集族. 显然, $\mathscr{P}$ 是 σX 中的开集族. 下证集族 $\mathscr{P}_x = \{P_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 σX 中的邻域基. 若不然, 则存在 σX 中 x 的开邻域 U 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $P_{x,n} \setminus U \neq \emptyset$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x_n \in P_{x,n} \setminus U$,

则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 因此 U 不是 X 中的序列开集, 矛盾. 故 σX 是第一可数的.

断言 2. g 是连续闭映射.

设 F 闭于 σY, 即 F 是 Y 中的序列闭集. 因为 f 是连续的, 所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的序列闭集. 从而 $f^{-1}(F)$ 闭于 σX. 因此, g 是连续的.

设 A 是 σX 的闭子集. 若 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $f(A)$ 中收敛于点 $y\in Y$ 的序列. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 选取 $x_n\in A$ 使得 $y_n=f(x_n)$. 由引理 5.2.10, 存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛子序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. 设序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x\in X$. 因为 A 是 X 中的序列闭集, 所以收敛点 $x\in A$. 因此, 序列 $\{f(x_{n_i})\}=\{y_{n_i}\}$ 收敛于 $y\in Y$. 这意味着 $y=f(x)\in f(A)$, 且 $f(A)$ 是 Y 的序列闭集, 即 $f(A)$ 闭于 σY. 于是映射 $g:\sigma X\to\sigma Y$ 是闭的.

根据推论 5.2.12 和断言 1 与 2, 空间 σY 是第一可数的. 故 Y 是 sof 可数的. 证毕.

引理 5.2.14 *设 $f:X\to Y$ 是有限到一闭映射. 若 X 是 csf 可数的, 则 Y 也是 csf 可数的.*

证明 假设 $y\in Y$ 及对某个 $n\in\mathbb{N}$, $f^{-1}(y)=\{x_1,\dots,x_n\}$. 对每一 $i\in\{1,\dots,n\}$, 设 $\{U_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 x_i 的 cs 网. 令 $\mathscr{P}_y=\{f(U_{i,j}):i\in\{1,\dots,n\},j\in\mathbb{N}\}$, 则集族 $\mathscr{P}_y$ 是 y 在 Y 中的 cs^* 网. 事实上, 设 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中收敛于点 y 的序列, 且 V 是 y 在 Y 中的邻域. 由引理 5.2.10, f 是序列商映射. 从而存在 X 中的收敛序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{f(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列. 设序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $z\in f^{-1}(y)$, 则存在 $i\in\{1,\dots,n\}$ 使得 $z=x_i$. 由 $z\in f^{-1}(V)$, 存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $U_{i,j}\subseteq f^{-1}(V)$ 且序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 终于 $U_{i,j}$. 因此, 序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有子序列终于 $f(U_{i,j})$ 且 $f(U_{i,j})\subseteq V$. 这表明集族 $\mathscr{P}_y$ 是 y 在 Y 中的 cs^* 网. 所以, Y 是 cs^*f 可数的. 由 [17, 命题 2], Y 是 csf 可数的. 证毕.

由定义容易验证 snf 可数空间 (sof 可数空间, csf 可数空间) 都具有闭遗传性和有限可乘性. 因此, 由引理 5.2.11 (引理 5.2.13 和 5.2.14) 及定理 5.2.1, 有如下结果.

定理 5.2.15 *设 X 是拓扑空间, $n\in\mathbb{N}$, 则 X 是 snf 可数的 (sof 可数的, csf 可数的) 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 snf 可数的 (sof 可数的, csf 可数的).*

具有 σ 闭包保持基的正则空间称为 M_1 空间 [40]. [60, 定理 3.26] 中证明了如下结果: 设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则 X 是 M_1 空间当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 M_1 空间. 在 [60, 定理 3.26] 证明过程中, 作者指出 M_1 空间的每个闭子集是 M_1 空间. 事实上, 上述证明存在漏洞, 因为尚不清楚 M_1 是闭遗传的 [64, 问题 1 和定理 1.1]. 因此, 我们有如下问题.

问题 5.2.16 *设 X 是拓扑空间. 若对某个整数 $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n(X)$ 是 M_1空间, 那么 X 是 M_1 空间吗?*

完全正则空间 X 称为 p 空间 [63, p. 441-442], 若存在 Čech-Stone 紧化 βX 中的开集族列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (i) 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 X; (ii) 对每一 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq X$.

问题 5.2.17 *如果 X 是 p 空间, 那么存在整数 $n \geq 2$ 使得 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 p 空间吗?*

§5.3 $\mathscr{F}_n(X)$ 的逆像

这一节我们主要讨论不具有有限可乘性的拓扑空间的 n 重对称积. 考虑拓扑性质 $\mathscr{P}$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 空间 X 的积空间 X^n 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当$\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$.

由引理 5.1.1, 容易证明如下一般稳定性定理.

定理 5.3.1 *若拓扑性质 $\mathscr{P}$ 满足:*

(1) $\mathscr{P}$ 被有限到一闭映射保持;

(2) $\mathscr{P}$ 被有限到一闭映射逆保持.

设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则积空间 X^n 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$.

作为一般稳定性定理的应用, 下面列出或证明 25 个满足定理 5.3.1 中条件的拓扑性质, 见注 5.3.2 与 5.3.3, 定理 5.3.6, 5.3.8, 5.3.10, 5.3.12 和 5.3.14, 及推论 5.3.11.

注 5.3.2 *下列拓扑性质满足定理 5.3.1 中条件:*

β 空间 [87, 147], k 空间 [3, 48], q 空间 [87, 156], 序列空间 [52, 164], Σ 空间 [122], $\Sigma^\sharp$ 空间 [102, 127], wM 空间 [75, 87], $w\sigma$ 空间 [87, 147].

注 5.3.3 *下列拓扑性质满足定理 5.3.1 中条件:*

Iso 紧空间 [15], Lindelöf 空间 [48], meso 紧空间 [79, 111], meta 紧空间 [61, 155], 仿紧空间 [48, 114], 仿 Lindelöf 空间 [35, 36], 次仿紧空间 [32, 33], θ 加细空间 [35, 77], 弱 θ 加细空间 [39, 165].

引理 5.3.4 *设 $f: X \to Y$ 是有限到一闭映射. 若 Y 是 Fréchet (强 Fréchet) 空间, 则 X 也是 Fréchet (强 Fréchet) 空间.*

证明 该引理已在 [94] 中发布, 其证明是新的. 这里仅证明强 Fréchet 空间. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中递减的集列且满足 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则 $f^{-1}(f(x)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立且令 $x_1 = x$. 因为 X 是 T_2 空间, 所以存在 x 的开邻域 V 使得 $\overline{V} \cap \{x_2, \ldots, x_n\} = \emptyset$. 从而对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x \in V \cap \overline{A_n} \subseteq \overline{V \cap A_n}$. 因此, $f(x) \in f(\overline{V \cap A_n}) = \overline{f(V \cap A_n)}$. 又因为 Y 是强 Fréchet 空间, 所以对任一 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $z_n \in V \cap A_n$ 使得序列 $\{f(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $f(x)$. 由引理 5.2.10 及 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是递减集列, 序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中收敛, 且其极限点属于集合 $\overline{V} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, 即 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 故 X 是强 Fréchet 空间. 证毕.

空间 X 称为 $w\gamma$ 空间 [72], 若存在 X 上的 g 函数使得如果对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $y_n \in g(n,p)$ 及 $x_n \in g(n, y_n)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点. 此 g 函数称为 $w\gamma$ 函数.

闭映射 $f: X \to Y$ 称为拟完备的 [35], 若对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 中的可数紧子集.

引理 5.3.5 *设 $f: X \to Y$ 是拟完备映射. 若 X 是 $w\gamma$ 空间, 则 Y 也是 $w\gamma$ 空间.*

证明 因为 (X, τ_X) 是 $w\gamma$ 空间, 则存在 X 上的 $w\gamma$ 函数 $g: \mathbb{N} \times X \to \tau_X$.

断言. 若 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点, 则任一满足 $z_n \in g(n, x_n)$ 的序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点.

实际上, 设 x 是序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中的聚点, 则存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对任一 $k\in\mathbb{N}$, $x_{n_k}\in g(k,x)$. 因此, $z_{n_k}\in g(n_k,x_{n_k})\subseteq g(k,x_{n_k})$. 所以序列 $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点.

定义函数 $h:\mathbb{N}\times Y\to\tau_Y$ 如下: 对任意 $n\in\mathbb{N}, y\in Y$, $h(n,y)=Y\setminus f(X\setminus\cup\{g(n,x):f(x)=y\})$. 因为 f 是闭的, 则 h 是 Y 上的 g 函数. 下证 h 是 Y 上的 $w\gamma$ 函数. 事实上, 对每一 $q\in Y$, 设 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中的序列且对任意 $n\in\mathbb{N}$, $b_n\in h(n,q)$ 及 $y_n\in h(n,b_n)$. 因为 $f^{-1}(y_n)\subseteq f^{-1}(h(n,b_n))\subseteq\bigcup\{g(n,x):f(x)=b_n\}$, 则存在 $a_n\in f^{-1}(b_n)$ 及 $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap g(n,a_n)$. 又因为 $f^{-1}(b_n)\subseteq f^{-1}(h(n,q))\subseteq\bigcup\{g(n,x):f(x)=q\}$, 所以存在 $p_n\in f^{-1}(q)$ 使得 $a_n\in g(n,p_n)$. 由于 $f^{-1}(q)$ 是 X 中的可数紧子集, 所以序列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点. 根据断言及 $a_n\in g(n,p_n)$ 与 $x_n\in g(n,a_n)$, 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点. 因此, 由 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Y 中有聚点. 故 Y 是 $w\gamma$ 空间. 证毕.

因为 Fréchet 空间 (强 Fréchet 空间) 被伪开映射 (可数双商映射 [139, 命题 3.4]) 保持 [51, 命题 2.3] 及 $w\gamma$ 空间被拟完备映射逆保持 [87], 由引理 5.3.4 (引理 5.3.4, 5.3.5) 和定理 5.3.1, 下列结果是显然的.

定理 5.3.6 *设 X 是拓扑空间, $n\in\mathbb{N}$, 则积空间 X^n 是 Fréchet 空间 (强 Fréchet 空间, $w\gamma$ 空间) 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 Fréchet 空间 (强 Fréchet 空间, $w\gamma$ 空间).*

称拓扑空间 X 具有可数 *tightness* [118, 定义 8.2 与命题 8.5] [4], 若对 X 的任意子集 A 及 $x\in\overline{A}$, 存在可数子集 $C\subseteq A$ 使得 $x\in\overline{C}$.

引理 5.3.7 *设 $f:X\to Y$ 是有限到一闭映射. 若 Y 具有可数 tightness, 则 X 也具有可数 tightness.*

证明 设 $A\subseteq X$ 及 $x\in\overline{A}$, 则 $f^{-1}(f(x))=\{x_1,\ldots,x_n\}$ 对某个 $n\in\mathbb{N}$ 成立且令 $x=x_1$. 因为空间 X 是 T_2, 则存在 X 的互不相交的开集 V_1,V_2 使得 $x\in V_1$ 且 $\{x_2,\ldots,x_n\}\subseteq V_2$. 从而, $x\in V_1\cap\overline{A}\subseteq\overline{V_1\cap A}$. 因此, $f(x)\in f(\overline{V_1\cap A})=\overline{f(V_1\cap A)}$. 又因为空间 Y 具有可数 tightness, 所以存在可数子集 $C\subseteq V_1\cap A$ 使得 $f(x)\in\overline{f(C)}=f(\overline{C})$. 这说明 $f^{-1}(f(x))\cap\overline{C}\neq\emptyset$. 由 $f^{-1}(f(x))\cap\overline{C}\subseteq(V_1\cup V_2)\cap\overline{V_1}=V_1$, $f^{-1}(f(x))\cap\overline{C}=\{x\}$, 即 $x\in\overline{C}$. 故 X 具有可数 tightness. 证毕.

[4] 可数 *tightness* 也称为由可数集确定的性质 [118].

因为商映射保持具有可数 tightness 的空间 [118, 引理 8.4], 由引理 5.3.7 及定理 5.3.1, 下述结论是显然的.

定理 5.3.8 *设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则积空间 X^n 具有可数 tightness 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有可数 tightness.*

序列空间是具有可数 tightness 的 k 空间 [118, p. 119 与引理 8.3].

例 5.3.9 *存在一个 Fréchet 空间 X 使得 $\mathscr{F}_2(X)$ 既不是 k 空间也不具有可数 tightness.*

证明 令 $X = S_{\omega_1}$, 则空间 X 是 Fréchet 空间, 但积空间 X^2 既不是 k 空间 [62, 引理 5] 也不具有可数 tightness [66, p. 303]. 由定理 5.3.1 及 5.3.8, $\mathscr{F}_2(X)$ 既不是 k 空间也不具有可数 tightness. 证毕.

每个对称度量空间都是弱第一可数的 [4, p. 129]. 对称度量空间不被有限到一闭映射逆保持 [112, 例 4.8].

定理 5.3.10 *设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$. 下列结论相互等价:*

(1) *X 是对称度量空间且 X^n 是 k 空间;*

(2) *X^n 是对称度量空间;*

(3) *$\mathscr{F}_n(X)$ 是对称度量空间.*

证明 由 [142, 定理 4.2], (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). 因为有限到一闭映射保持对称度量空间 [142, p. 110], 由引理 5.1.1, $\mathscr{F}_n(X)$ 是对称度量空间.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 $\mathscr{F}_n(X)$ 是对称度量空间, 则 $\mathscr{F}_n(X)$ 是序列空间 [140, 1.4] 且 X 是对称度量空间. 因为有限到一闭映射逆保持序列空间 [164], 所以由引理 5.1.1 知, 积空间 X^n 是序列空间. 故 X^n 是 k 空间. 证毕.

推论 5.3.11 *设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$. 下述结论相互等价:*

(1) *X 是 g 度量空间且 X^n 是 k 空间;*

(2) *X^n 是 g 度量空间;*

(3) *$\mathscr{F}_n(X)$ 是 g 度量空间.*

证明 由 [143, 定理 2.9], (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). 因为有限到一闭映射保持 g 度量空间 [95], 由引理 5.1.1, $\mathscr{F}_n(X)$ 是 g 度量空间.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 g 度量空间. 显然, X 是 g 度量空间. 因为 g 度量空间是对称空间 [140, 1.8], 由定理 5.3.10, X^n 是 k 空间. 证毕.

定理 5.3.12 *设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$. 下述结论相互等价:*

(1) X 是 snf 可数的且 X^n 是序列空间;

(2) X^n 是弱第一可数空间;

(3) $\mathscr{F}_n(X)$ 是弱第一可数空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 因为 X 是 snf 可数的, 容易验证积空间 X^n 是 snf 可数的. 因此, 由 [97, 引理 5.1], X^n 是弱第一可数空间.

(2) $\Rightarrow$ (3). 因为 $f_n : X^n \twoheadrightarrow \mathscr{F}_n(X)$ 是有限到一闭映射且积空间 X^n 是弱第一可数空间, 由推论 5.2.12, $\mathscr{F}_n(X)$ 是弱第一可数空间.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 $\mathscr{F}_n(X)$ 是弱第一可数空间, 则 X 是 snf 可数的且 $\mathscr{F}_n(X)$ 是序列空间. 又因为 $f_n : X^n \twoheadrightarrow \mathscr{F}_n(X)$ 是有限到一闭映射, 所以由 [164, 定理 5.1], 积空间 X^n 是序列空间. 证毕.

例 5.3.13 *存在 g 度量空间 X 使得 $\mathscr{F}_2(X)$ 不是 k 空间.*

证明 令 $Y = S_2 \times (\mathbb{P} \cup \{0\})$, 其中 S_2 是 Arens 空间 [48, 例 1.6.19] 且 $\mathbb{P}$ 是无理数空间, 则空间 Y 不是 k 空间 [102, 例 1.8.6, p. 44]. 令 $X = S_2 \oplus (\mathbb{P} \cup \{0\})$. 因为 S_2 与 $(\mathbb{P} \cup \{0\})$ 都是 g 度量空间, 所以空间 X 是 g 度量空间. 又因为 Y 是 X^2 的闭子集且 k 空间是闭遗传的, 所以 X^2 不是 k 空间. 由引理 5.1.1 或注 5.3.2, $\mathscr{F}_2(X)$ 不是 k 空间. 证毕.

例 5.3.13 说明存在一个 g 度量空间 (对称度量空间, 弱第一可数空间, 序列空间, k 空间) X 使得 $\mathscr{F}_2(X)$ 不是 g 度量空间 (对称度量空间, 弱第一可数空间, 序列空间, k 空间).

空间 X 称为 *Lašnev* 空间 [35], 若 X 是度量空间的闭映像.

定理 5.3.14 *对空间 X, 下述结论相互等价:*

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X)$ 是度量空间;

(2) 存在整数 $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n(X)$ 是度量空间;

(3) 存在整数 $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n(X)$ 是 *Lašnev* 空间;

(4) X^2 是 *Lašnev* 空间;

(5) X 是度量空间.

证明 显然, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 由 [74, 定理 B], 有 (4) $\Leftrightarrow$ (5). 由定理 5.2.1 或注 5.2.2, (1) $\Leftrightarrow$ (5).

下证 (3) $\Rightarrow$ (4). 若存在整数 $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n(X)$ 是 Lašnev 空间. 由引理 5.1.1, $\mathscr{F}_2(X)$ 是 $\mathscr{F}_n(X)$ 的闭子集, 所以 $\mathscr{F}_2(X)$ 是 Lašnev 空间. 根据 [60, 定理 3.9], X^2 是 Lašnev 空间. 证毕.

Good 与 Macías [60, p. 94] 提出了下述问题.

问题 5.3.15 *[60, 问题 3.6] 设 X 是 Lašnev 空间, 那么存在整数 $n \geq 2$ 使得 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 Lašnev 空间吗?*

下述例子给出了问题 5.3.15 的否定回答.

例 5.3.16 *存在一个 Lašnev 空间 X 使得对任意整数 $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n(X)$ 不是 Lašnev 空间.*

证明 取 $X = S_\omega$, 则空间 X 是不可度量的 Lašnev 空间 [102, 例 1.8.7, p. 45]. 因此, 由定理 5.3.14, $\mathscr{F}_n(X)$ 不是 Lašnev 空间. 证毕.

空间 (X, τ) 称为 $w\Delta$ 空间 [102, 定义 B.3.36], 若存在 X 上的 g 函数 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 使得如果对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\{x, x_n\} \subseteq g(n, y_n)$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有聚点.

问题 5.3.17 *设 X 是拓扑空间, 整数 $n \geq 2$. 若积空间 X^n 是 $w\Delta$ 空间, 那么 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 $w\Delta$ 空间吗?*

注 5.3.18 *若 $\mathscr{F}_n(X)$ 是 $w\Delta$ 空间, 由 [102, 命题 3.6.15], X^n 是 $w\Delta$ 空间.*

注 5.3.19 最近, 彭良雪和孙愿 *[130]* 考虑了广义度量空间的对称积. 他们的方法也是构造性的, 不依赖乘积运算和闭映射. 他们证明了*:* 设 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{N}$, 则 X 具有性质 $\mathscr{P}$ 当且仅当 $\mathscr{F}_n(X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 其中 $\mathscr{P}$ 是下列性质之一*:*

(G)*;* 开 (G)*;* 具有点可数基的空间*;* 第二可数空间*;* 具有正则 G_δ 对角线的空间*;* 半层空间*;* 半度量空间*;* k 半层空间*;* *scattered* 空间*;* 具有点可数 cs 网的空间 *(*度量空间的序列覆盖 s 映像*);* 每个紧子集是可度量化的空间*.*

第六章　结束语

§6.1　拟拓扑群的拟研究方向

拟拓扑群作为拓扑群的推广, 自概念提出后, 研究进展很缓慢. 本文从拟拓扑群的广义度量性质、基数不变量、三空间问题及连通性几个方面研究了拟拓扑群. 拟拓扑群的研究才开始起步, 其前景广阔. 相较于拓扑群与仿拓扑群的研究, 除了本文研究的几个方面, 拟拓扑群还有如下拟研究方向可继续探讨.

一个拓扑空间 X 的 *Hausdorff* 紧化剩余指的是 X 的某 Hausdorff 紧化 bX 的子空间 $bX\setminus X$. 对拓扑空间的 Hausdorff 紧化剩余的研究是一般拓扑学的一个研究方向. 研究 Hausdorff 紧化剩余的一个重要问题是一个 Tychonoff 空间 X 的 Hausdorff 紧化剩余具有什么样的拓扑性质? M. Henriksen 与 J. Isbell 证明了空间 X 是可数型的当且仅当 X 的任何紧化剩余是 Lindelöf [70]. A. Arhangel'skiĭ 研究了拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余并取得了很多重要结果, 特别是二岐性定理: 若 G 是拓扑群, 则 G 的 Hausdorff 紧化剩余或者是伪紧的或者是 Lindelöf. 运用二岐性定理获得了一系列结果, 见 [8, 9, 89, 103, 105] 等. 关于仿拓扑群和半拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余的结果也日渐丰富, 见 [92, 154, 159, 160, 158] 等. 而目前关于拟拓扑群的 Hausdoff 紧化剩余的研究尚属空白, 因此可作为拟拓扑群研究的潜在方向.

拓扑群 G 称为 $\mathbb{R}$-*factorizable* [148, 149], 若对 G 上的任一实值连续函数 f, 存在具有可数基的拓扑群 H, 连续同态 $p : G \to H$ 及 H 上的实值连续函数 h, 使得 $f = h \circ p$. 关于 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群的详细结果参见 [12, 第 8 章]. 谢利红等进一步研究了仿拓扑群的 $\mathbb{R}$-factorizability, 见 [161, 163] 等. 目前尚无关于拟拓扑群的 $\mathbb{R}$-factorizability 的相关结果, 只有 M. Tkachenko 在 [135, 问题 3.12 (h)] 中提到拟拓扑群的 $\mathbb{R}$-factorizability. 因而可研究拟拓扑群的 $\mathbb{R}$-factorizability.

§6.2　拟拓扑群中的一些公开问题

本节将文献中关于拟拓扑群的问题集中, 供进一步研究.

问题 6.2.1 *[12, 公开问题 3.2.3] 每一个局部仿紧的仿拓扑群 (拟拓扑群) 是仿紧的吗?*

问题 6.2.2 *[12, 公开问题 3.2.4]* 每一个局部正规的仿拓扑群 (拟拓扑群) 是正规的吗?

问题 6.2.3 *[12, 公开问题 3.2.5]* 每一个局部 *meta* 紧(次仿紧) 的仿拓扑群 (拟拓扑群) 是 *meta* 紧(次仿紧) 吗?

问题 6.2.4 *[12, 公开问题 4.5.3]* *Tychonoff* (正则) 的极不连通的拟拓扑群的每个紧子集是有限的吗?

问题 6.2.5 *[12, 公开问题 4.5.5]* 设 G 是极不连通的拟拓扑群, 那么 G 具有既开且闭的交换子群吗?

问题 6.2.6 *[12, 公开问题 5.2.2]* 设 κ 是无限基数. 若 *Hausdorff* (正则, *Tychonoff*) 的拟拓扑群 G 含有 κ-*narrow* 的稠密子群, 那么 G 是 κ-*narrow* 吗?

问题 6.2.7 *[12, 公开问题 5.2.4]* 设 κ 是无限基数. 若 G 是 *Hausdorff* (正则, *Tychonoff*) τ-*narrow* 拟拓扑群使得 $\psi(G) \leq \kappa$, 那么 G 的基数不超过 2^{κ} 吗?

问题 6.2.8 *[151, 问题 4.5]* 是否每一个 (*Hausdorff*, 正则) σ 紧半拓扑群 G 具有可数胞腔度? 如果 G 是拟拓扑群, 那么结果又怎样呢?

问题 6.2.9 *[151, 问题 4.6]* 是否每一个 (*Hausdorff*, 正则) *precompact* 半拓扑群 G 具有可数胞腔度? 如果 G 是拟拓扑群, 那么结果又怎样呢?

问题 6.2.10 *[138, 问题 3.6]* 每一个 *Hausdorff*, *Baire* 可展拟拓扑群是拓扑群吗?

问题 6.2.11 *[138, 问题 3.11]* 设 G 是仿 (拟) 拓扑群且含有 S_ω 的闭拷贝, 那么 G 含有 S_2 的闭拷贝吗?

问题 6.2.12 *[12, 公开问题 3.3.5]* 设 G 是拟拓扑群且 G 的每个紧子空间是第一可数的, 那么 G 的每个紧子空间是可度量的吗?

问题 6.2.13 *[10, 问题 6.1]* 是否存在一个完全正则的序列 (*Fréchet*) 拟拓扑群具有可数 δ 特征使其不是第一可数的?

问题 6.2.14 *[10, 问题 6.2] 是否存在完全正则的双序列拟拓扑群具有第一可数的紧化剩余使其不是第一可数的?*

问题 6.2.15 *[10, 问题 6.3] 否存在完全正则拟拓扑群 G 具有可数 π 特征但不具有可数 δ 特征, 且 G 至少满足下述条件之一:*

1) G 是序列空间;

2) G 是 Fréchet 空间;

3) G 的任意紧化剩余既不是 Lindelöf 的也不是伪紧的;

4) G 存在一个第一可数的紧化剩余.

问题 6.2.16 *[135, 问题 3.9] 设 G 是 Hausdorff 仿拓扑群, 那么式子 $\pi(Q_2(G)) = \pi\chi(Q_2(G))$ 成立吗?*

问题 6.2.17 *[71, 问题 1] 在 ZFC 中是否存在伪紧的拟拓扑群 (半拓扑群) G 使得 $G\times G$ 不是伪紧的?*

问题 6.2.18 *[71, 问题 4] 每一个 Hausdorff 可数紧拟拓扑群是拓扑群吗?*

问题 6.2.19 *[71, 问题 5] 在 ZFC 中是否存在 Hausdorff 可数紧的拟拓扑群 G, H 使得 $G\times H$ 不是可数紧的?*

参考文献

[1] K. Alster, T. Przymusiński. Normality and Martin's axiom [J]. Fund. Math., 1974, 91: 123-131.

[2] A. Arhangel'skiĭ. Concerning the weight of topological spaces, in: Proc. 1st Topological Symp. (Prague, 1961), General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I [M]. Academic Press, New York, 1962: 72-74.

[3] A. Arhangel'skiĭ. Bicompact sets and the topology of spaces [J]. Soviet Math. Dokl., 1963, 4: 561-564.

[4] A. Arhangel'skiĭ. Mappings and spaces [J]. Russian Math. Surveys, 1966, 21: 115-162.

[5] A. Arhangel'skiĭ. The frequency spectrum of topological spaces and the classification of spaces [J]. Soviet Math. Dokl., 1972, 13: 265-268.

[6] A. Arhangel'skiĭ. The frequency spectrum of a topological space and the product operations [J]. Trans. Moscow Math. Soc., 1981, 2: 163-200.

[7] A. Arhangel'skiĭ. On topological and algebraic structure of extremally disconnected semitopological groups [J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 2000, 41 (4): 803-810.

[8] A. Arhangel'skiĭ. A study of remainders of topological groups [J]. Fund. Math., 2009, 203: 165-178.

[9] A. Arhangel'skiĭ. The Baire property in remainders of topological groups and other results [J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 2009, 50 (2): 273-279.

[10] A. Arhangel'skiĭ, M. Choban. Examples of quasitopological groups [J]. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2013, 2 (72)-3 (73): 111-118.

[11] A. Arhangel'skiĭ, M. Hušek. Extensions of topological and semitopological groups and the product operation [J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 2001, 42 (1): 173-186.

[12] A. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko. Topological Groups and Related Structures [M]. Atlantis Press and World Scientific, Paris-Amsterdam, 2008.

[13] A. Arhangel'skiĭ, V. Uspenskij. Topological groups: local versus global [J]. Appl. General Topology, 2006, 7 (1): 67-72.

[14] C. Aull. A survey paper on some base axioms [J]. Topol. Proc., 1978, 3: 1-36.

[15] P. Bacon. The compactness of countably compact spaces [J]. Pacific J. Math., 1970, 32: 587-592.

[16] T. Banakh, V. Bogachev, A. Kolesnikov. k^*-metrizable spaces and their applications [J]. J. Math. Sci., 2008, 155 (4): 475-522.

[17] T. Banakh, L. Zdomskyĭ. The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs^*-character [J]. Appl. General Topology, 2004, 5 (1): 25-48.

[18] S. Bardyla, O. Gutik, A. Ravsky. H-closed quasitopological groups [J]. Topol. Appl., 2017, 217: 51-58.

[19] S. Baron, S. Leader. Sequential topologies [J]. Amer. Math. Monthly, 1966, 73: 677-678.

[20] B. Batíková. Completion of quasi-topological groups [J]. Topol. Appl., 2009, 156: 2123-2128.

[21] B. Batíková. M. Hušek, Productivity of coreflective subcategories of semitopological groups [J]. Appl. Categor. Struct., 2016, 24: 497-508.

[22] H. Bennett. On quasi-developable spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 253-262.

[23] G. Birkhoff. A note on topological groups [J]. Comput. Math., 1936, 3: 427-430.

[24] J. Boone, F. Siwiec. Sequentially quotient mappings [J]. Czech. Math. J., 1976, 26: 174-182.

[25] C. Borges. On stratifiable spaces [J]. Pacific J. Math., 1966, 17: 1-16.

[26] C. Borges, D. Lutzer. Characterizations and mappings of M_i-spaces, in: Topology Conference (Virginia Polytech Inst. and State Univ., Blacksburg, 1973), Lecture Notes in Math [M]. V. 375, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 34-40.

[27] K. Borsuk, S. Ulam. On symmetric products of topological spaces [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1931, 37: 875-882.

[28] R. Bott. On the third symmetric potency of S_1 [J]. Fund. Math., 1952, 39: 364-368.

[29] N. Bourbaki. General Topology [M]. Hermann, Paris, 1966.

[30] L. Brouwer. On the structure of perfect sets of points [J]. Proc. Acad. Amsterdam, 1910, 12: 785 – 794.

[31] M. Bruguera, M. Tkachenko. The three space problem in topological groups [J]. Topol. Appl., 2006, 153: 2278-2302.

[32] D. Buhagiar, S. Lin. A note on subparacompact spaces [J]. Mat. Vesnik, 2006, 52 (3-4): 119-123.

[33] D. Burke. On subparacompact spaces [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 23: 655-663.

[34] D. Burke. Preservation of certain base axioms under a perfect mapping [J]. Topol. Proc., 1976, 1: 269-279.

[35] D. Burke. Closed mappings, in: G. Reed (ed.), Surveys in General Topology [M]. Academic Press, New York, 1980, pp. 1-32.

[36] D. Burke. Paralindelöf spaces and closed mappings [J]. Topol. Proc., 1980, 5: 47-57.

[37] D. Burke. Spaces with a primitive base and perfect mappings [J]. Fund. Math., 1983, 116 (3): 157-163.

[38] D. Burke. Perfect images of spaces with a $\delta\theta$-base and weakly $\delta\theta$-refinable spaces [J]. Topol. Appl., 1984, 18: 81-87.

[39] D. Burke. Covering properties, in: K. Kunen and J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology [M]. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 347-422.

[40] J. Ceder. Some generalizations of metric spaces [J]. Pacific J. Math., 1961, 11: 105-125.

[41] M. Choban, L. Chiriac. On free groups in classes of groups with topologies [J]. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2013, 72 (2)-73 (3): 61-79.

[42] W. Comfort, L. Robertson. Extremal Phenomena in Certain Classes of Totally Bounded Groups [J]. Diss. Math., 1988, 272: 1-48.

[43] W. Comfort, K. Ross. Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups [J]. Pacific J. Math., 1966, 16: 483-496.

[44] G. Creede. Concerning semi-stratifiable spaces [J]. Pacific J. Math., 1970, 32: 47-54.

[45] S. Davis. The strict p-space problem [J]. Topol. Proc., 1985, 10: 277-292.

[46] D. Dikranjan, V. Uspenskij. Categorically compact topological groups [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1998, 126: 149-168.

[47] R. Ellis. Locally compact transformation groups [J]. Duke Math. J., 1957, 24: 119-125.

[48] R. Engelking. General Topology (revised and completed edition) [M]. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[49] M. Fernández, I. Sánchez. Three-space properties in paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2017, 216: 74-78.

[50] V. Filippov. Preservation of order of a base under a perfect mapping [J]. Soviet Math. Dokl., 1968, 9: 1005-1007.

[51] S. Franklin. Spaces in which sequences suffice [J]. Fund. Math., 1965, 57: 107-115.

[52] S. Franklin. Spaces in which sequences suffice II [J]. Fund. Math., 1967, 61: 51-56.

[53] S. Franklin, B. Thomas. A survey of k_ω-spaces [J]. Topol. Proc., 1977, 2: 111-124.

[54] T. Ganea. Symmetrische potenzen topologischer Räume [J]. Math. Nachr., 1954, 11: 305-316.

[55] Z. Gao. $\aleph$-space is invariant under perfect mappings [J]. Questions Answers in General Topology, 1987, 5 (2): 271-279.

[56] X. Ge. On so-metrizable spaces [J]. Mat. Vesnik, 2009, 61: 209-218.

[57] 葛英. 关于 sn-度量空间 [J]. 数学学报, 2002, 45 (2): 355-360.

[58] R. Gittings. Open mapping theory, in: Set-Theoretic Topology [M]. Academic Press, 1977, pp. 141-191.

[59] R. Gittings. Products of generalized metric spaces [J]. Rocky Mountain J. Math., 1979, 9 (3): 479-497.

[60] C. Good, S. Macías. Symmetric products of generalized metric spaces [J]. Topol. Appl., 2016, 206: 93-114.

[61] E. Grabner, G. Grabner, K. Miyazaki. On properties of relative metacompactness and paracompactness type [J]. Topol. Proc., 2000, 25: 145-177.

[62] G. Gruenhage. k-spaces and products of closed images of metric spaces [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 80: 478-482.

[63] G. Gruenhage. Generalized metric spaces, in: K. Kunen and J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology [M]. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 423-501.

[64] G. Gruenhage. Are stratifiable spaces M_1, in: E. Pearl (ed.), Open Problems in Topology II [M]. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 2007, pp. 143-150.

[65] G. Gruenhage, E. Michael, Y. Tanaka. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pacific J. Math., 1984, 113: 303-332.

[66] G. Gruenhage, Y. Tanaka. Products of k-spaces and spaces of countable tightness [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 273: 299-308.

[67] J. Guthrie. A characterization of $\aleph_0$-spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 105-110.

[68] S. Hartman, J. Mycielski. On the embeddings of topological groups into connected topological groups [J]. Colloq. Math., 1958, 5: 167-169.

[69] R. Heath. Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces [J]. Canad. J. M., 1964, 16: 763-770.

[70] M. Henriksen, J. Isbell, Some properties of compactifications [J]. Duke Math. J., 1958, 25: 83-106.

[71] C. Hernández, M. Tkachenko. Three examples of pseudocompact quasitopological groups [J]. Topol. Appl., 2006, 153: 3615-3620.

[72] R. Hodel. Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences have cluster points [J]. Duke Math. J., 1972, 39: 253-263.

[73] R. Hodel. Cardinal functions I, in: K. Kunen and J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology [M]. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 1-61.

[74] M. Hyman. A note on closed maps and metrizability [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21: 109-112.

[75] T. Ishii. wM-spaces and closed maps [J]. Proc. Japan Acad., 1970, 46: 16-21.

[76] I. Juhász. Cardinal functions II, in: K. Kunen and J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology [M]. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 63-109.

[77] H. Junnila. On submetacompactness [J]. Topol. Proc., 1978, 3: 375-405.

[78] S. Kakutani. Über die Metrization der Topologischen Gruppen [J]. Proc. Imp. Acad. (Tokyo), 1936, 12: 82-84.

[79] Kuo-shih Kao, L. Wu. Mapping theorems on mesocompact spaces [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, 89: 355-357.

[80] J. Kofner. Closed mapping and quasi-metrics [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 80: 333-336.

[81] J. Kofner. Quasi-metrizable spaces [J]. Pacific J. Math., 1980, 88: 81-89.

[82] F. Leja. Sur la notion du groupe abstrait topologique [J]. Fund. Math., 1927, 9: 37-44.

[83] E. Levi. Sulla struttura dei gruppi finiti e continui [J]. Atti Accad., 1905, 40: 3-17 (in Italian).

[84] 黎景辉, 冯绪宁. 拓扑群引论 (第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[85] P. Li, L. Mou. On quasitopological groups [J]. Topol. Appl., 2014, 161: 243-247.

[86] P. Li, L. Mou, S. Wang. Notes on questions about spaces with algebraic structures [J]. Topol. Appl., 2012, 159 (17): 3619-3623.

[87] 李招文. 关于拟完备映射的注记 [J]. 长沙水电师院自然科学学报, 1993, 8 (1): 24-29.

[88] S. Lie, F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, Teubner 1, 2, 3) [M]. 1888-1893.

[89] F. Lin. Local properties on the remainders of the topological groups [J]. Kodai Mathematical Journal, 2011, 34: 505-518.

[90] 林福财. 拓扑代数与广义度量空间 [M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2012.

[91] F. Lin. A note on paratopological groups with countable networks of sequential neighborhoods [J]. Topol. Proc., 2013, 41: 9-16.

[92] F. Lin, S. Lin, About remainders in compactifications of paratopological groups, Arxiv: 1106.3836v1 [Math. GN] 20. Jun., 2011.

[93] S. Lin. Mapping theorems on ℵ-spaces [J]. Topol. Appl., 1988, 30: 159-164.

[94] 林寿. 关于空间和映射 [J]. 苏州大学学报 (自然科学), 1989, 5 (3): 313-326 .

[95] 林寿. 关于 g-可度量空间 [J]. 数学年刊, 13A: 1992, 3: 403-409.

[96] 林寿. 具有点可数型空间的闭映像 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 1993, 10 (增刊): 16-18.

[97] S. Lin. 关于序列覆盖 s 映射 [J]. 数学进展, 1996, 25 (6): 548-551.

[98] S. Lin. A note on the Arens' space and sequential fan [J]. Topol. Appl., 1997, 81 (3): 185-196.

[99] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射 (第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[100] S. Lin, Y. Ge. Preservations of so-metrizable spaces [J]. Filomat, 2012, 26 (4): 801-807.

[101] S. Lin, F. Lin, L. Xie. The extensions of some convergence phenomena in topological groups [J]. Topol. Appl., 2015, 180: 167-180.

[102] S. Lin, Z. Yun. Generalized Metric Spaces and Mappings [M], Atlantis Studies in Mathematics, No. 6, Atlantis Press, Paris, 2016.

[103] C. Liu. Remainders in compactification of topological groups [J]. Topol. Appl., 2009, 156: 849-854.

[104] C. Liu. Paratopological (topological) groups with certain networks [J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 2014, 55 (1): 111-119.

[105] C. Liu, S. Lin. Generalized metric spaces with algebraic structure [J]. Topol. Appl., 2010, 157: 1966-1974.

[106] D. Lutzer. Semimetrizable and stratifiable spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 43-48.

[107] S. Macías. Aposyndetic properties of symmetric products of continua [J]. Topol. Proc., 1997, 22: 281-296.

[108] S. Macías. On symmetric products of continua [J]. Topol. Appl., 1999, 92: 173-182.

[109] S. Macías. On n-fold hyperspaces of continua [J]. Glas. Mat., 2009, 44 (64): 479-492.

[110] S. Macías. Retractions and hyperspaces [J]. Glas. Mat., 2011, 46 (66): 473-483

[111] V. Mancuso, Mesocompactness and related properties [J]. Pacific J. Math., 1970, 33: 345-355.

[112] V. Mancuso. Inverse images and first countability [J]. Gen. Topol. Appl., 1972, 2 : 29-44.

[113] A. Michael. Topologies on spaces of subsets [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71: 152-182.

[114] A. Michael. Another note on paracompact spaces [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8: 822-828.

[115] A. Michael. A note on closed maps and compact sets [J]. Israel J. Math., 1964, 2: 173-176.

[116] A. Michael. $\aleph_0$-spaces [J]. J. Math. Mech., 1966, 15: 983-1002.

[117] A. Michael. On Nagami's Σ-spaces and some related matters [J]. Proc. Washington State Univ. Top. Conf., 1970: 13-19.

[118] A. Michael. A quintuple quotient quest [J]. Gen. Topol. Appl., 1972, 2: 91-138.

[119] R. Molski. On symmetric products [J]. Fund. Math., 1957, 44: 165-170.

[120] K. Morita. Products of normal spaces with metric spaces [J]. Math. Ann., 1964, 154: 365-382.

[121] K. Morita, S. Hanai. Closed mappings and metric spaces [J]. Proc. Japan Acad., 1956, 32: 10-14.

[122] K. Nagami. Σ-spaces [J]. Fund. Math., 1969, 55: 169-192.

[123] T. Nogura. The product of $\langle\alpha_i\rangle$-spaces [J]. Topol. Appl., 1985, 21 (3): 251-259.

[124] T. Nogura, D. Shakhmatov, Y. Tanaka. α_4-property versus A-property in topological spaces and groups [J]. Studia Sci. Math. Hungar., 1997, 33: 351-362.

[125] P. Nyikos. Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 83: 793-801.

[126] A. Okuyama. A survey of the theory of σ-spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 57-63.

[127] A. Okuyama. On a generalization of Σ-spaces [J]. Pacific J. Math., 1972, 42: 485-495.

[128] P. O'Meara. On paracompactness in function spaces with the compact open topology [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 29: 183-189.

[129] L. Peng, M. Guo. On reflections and three space properties of semi(para)-topological groups [J]. Topol. Appl., 2017, 217: 107-115.

[130] L. Peng, Y. Sun. A study on symmetric products of generalized metric spaces [J]. Topol. Appl., 2017, 231: 411-429.

[131] V. Popov. A perfect map need not presever a G_δ-diagonal [J]. Gen. Topol. Appl., 1977, 7: 31-33.

[132] O. Ravsky. On H-closed paratopological groups [J]. Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mat. Mekh., 2001, 59: 96-101.

[133] O. Ravsky. Paratopological groups I [J]. Mat. Stud., 2001, 16: 37-48.

[134] O. Ravsky. Paratopological groups II [J]. Mat. Stud., 2002, 17: 93-101.

[135] I. Sánchez, M. Tkachenko. A quasitopological modification of paratopological groups [J]. Houston J. Math. 2017, 43 (4): 1305-1321

[136] R. Schori. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces [J]. Fund. Math., 1968, 63: 77-87.

[137] O. Schreier. Abstrakte kontinuerliche Gruppen [J]. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1925, 4: 15-32.

[138] R. Shen. On generalized metrizable properties in quasitopological groups [J]. Topol. Appl., 2014, 173: 219-216.

[139] F. Siwiec. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 143-154.

[140] F. Siwiec. On defining a space by a weak base [J]. Pacific J. Math., 1974, 52: 233-245.

[141] F. Siwiec, J. Nagata. A note on nets and metrization [J]. Proc. Japan Acad., 1968, 44: 623-627.

[142] Y. Tanaka. On symmetric spaces [J]. Proc. Japan Acad., 1973, 49: 106-111.

[143] Y. Tanaka. Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces [J]. Math. Japonica, 1991, 36 (1): 71-84.

[144] Z. Tang, S. Lin, F. Lin. Symmetric products and closed finite-to-one mappings [J]. Topol. Appl. 2018, 234: 26-45.

[145] Z. Tang, S. Lin, F. Lin. A special class of semi(quasi)topological groups and three-space properties [J]. Topol. Appl. 2018, 235: 92-103.

[146] Z. Tang, S. Lin. On generalized metrizable properties and cardinal invariants in quasitopological groups [J]. submitted.

[147] 腾辉, 夏省祥, 林寿. 某些广义可数紧空间的闭映像 [J]. 数学年刊, 1989, 10 (3): 239-245.

[148] M. Tkachenko. Subgroups, quotient groups and products of $\mathbb{R}$-factorizable groups [J]. Topol. Proc., 1991, 16: 201-231.

[149] M. Tkachenko. Factorization theorems for topological groups and their applications [J]. Topol. Appl., 1991, 38: 21-37.

[150] M. Tkachenko. Paratopological and semitopological groups vs topological groups, in: K. P. Hart, J. van Mill, P. Simon (Eds.), Recent Progress in General Topology III [M]. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 2014, pp. 825-882.

[151] M. Tkachenko, A. Tomita. Cellularity in subgroups of paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2015, 192: 188-197.

[152] V. Uspenskij. Extensions of topological groups with a countable network [J]. Mosc. Univ. Math. Bull., 1984, 39 (5): 84-85.

[153] J. Vaughan. Perfect mappings and spaces of countable type [J]. Can. J. Math., 1970, 22 (6): 1208-1210.

[154] H. Wang, W. He. Remainders and cardinal invariants [J]. Topol. Appl., 2014, 164: 14-23.

[155] J. Worrell. The closed continuous images of metacompact topological spaces [J]. Portugal Math., 1966, 25: 175-179.

[156] 吴利生. 关于有限到一伪开映射的注记 [J]. 苏州大学学报 (自然科学版), 1984, (1): 8-12.

[157] S. Xia. Mapping theorems on some generalized metric spaces [J]. Questions Answers in General Topology, 1988, 6: 107-115.

[158] L. Xie, P. Li, S. Lin. Remainders in compactification of semitopological and paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2014, 178: 84-92.

[159] L. Xie, S. Lin. The Baire property in the remainders of semitopological groups [J]. Bull. Aust. Math. Soc., 2013, 88: 301-308.

[160] L. Xie, S. Lin. Remainders of topological and paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2013, 160: 648-655.

[161] L. Xie, S. Lin. Cardinal invariants and R-factorizability in paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2013, 160: 979-990.

[162] L. Xie, S. Lin. The extensions of paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2015, 180: 91-99.

[163] L. Xie, S. Lin, M. Tkachenko. Factorization properties of paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2013, 160: 1902-1917.

[164] 严力. 具有 Heine 性质空间的刻画 [J]. 漳州师范学院学报 (自然科学版), 2003, 16 (4): 6-8.

[165] 周友成. 关于 θ-加细性 [J]. 数学研究与评论, 1983, 3 (4): 27-30.

作者攻读博士学位期间的工作目录

1 . Zhongbao Tang (唐忠宝), Shou Lin, Fucai Lin, *Symmetric products and closed finite-to-one mappings*, Topol. Appl., **234** (2018), 26-45. (SCI)

2 . Zhongbao Tang (唐忠宝), Shou Lin, Fucai Lin, *A special class of semi(quasi)topological groups and three-space properties*, Topol. Appl., **235** (2018), 92-103. (SCI)

3 . Zhangyong Cai, Shou Lin, Zhongbao Tang (唐忠宝), *Characterizing s-paratopological groups by free paratopological groups*, Topol. Appl., **230** (2017), 283-294. (SCI)

4 . Zhongbao Tang (唐忠宝), Shou Lin, *On generalized metrizable properties and cardinal invariants in quasitopological groups*, submitted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师 ____________

作者 ____________

二零一八年三月二十五日

致　谢

本文是在导师林寿教授的悉心指导下完成的. 三年来林老师在学习和生活等方面都给予了我很大的鼓励和支持. 林老师学术上刻苦钻研的精神, 严谨、细致的科学态度, 深深地感染和激励着我. 林老师不仅在学业上给我细致而耐心的指导, 同时还在生活上对我无微不至的关怀, 作者在此表示真挚的感谢.

感谢四川大学数学学院寇辉教授讲授学位课程及指导, 感谢张德学教授、张树果教授等的指导和关心.

感谢闽南师范大学李进金教授, 李克典教授对我在读博期间给予的帮助和指导.

感谢墨西哥的 M. Tkachenko 教授的建议; 感谢葛英教授、曹继岭教授提供的科研资料; 感谢沈荣鑫教授与作者的讨论与交流.

感谢我的硕士生导师林福财教授的指导、帮助与合作, 及生活上的关心.

感谢与刘鑫同学有益的探讨和四川大学同学的帮助与支持; 感谢我的家人和朋友对我的支持.