閩南師範大學

理学硕士学位论文

统计序列紧空间，统计序列空间及G方法

刘 丽

闽南师范大学

二〇一六年六月

学校代码：10402　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：2013022004

分 类 号：　　　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

闽南師範大學

理学硕士学位论文

统计序列紧空间，统计序列空间及 G 方法

学位申请人：刘丽

指导教师：林寿教授

学位类别：理学硕士

学科专业：基础数学

授予单位：闽南师范大学

答辩日期：二〇一六年六月

CODE：10402 **NO.： 2013022004**

U.D.C.： **Classified Index：**

A Dissertation for the Degree of M. Science

Statistically sequentially compact spaces，Statistically sequential spaces and G -methods

Candidate ：Liu Li

Supervisor ：Prof. Lin Shou

Specialty ：Fundamental Mathematics

Academic Degree Applied for ：Master of Science

University ：Minnan Normal University

Date of Oral Examination ：June，2016

闽 南 师 范 大 学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：______________ 日期：____年____月____ 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权闽南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书。

2、不保密☑。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：______________ 日期：____年____月____日

导师签名：______________ 日期：____年____月____日

摘 要

序列的收敛性是拓扑学与分析学的重要研究对象。这一方面是由于收敛性与连续性、紧性等性质密不可分，另一方面是因为收敛性在可和性理论中起了基础性的作用。统计收敛性作为收敛性的重要推广，有着重大的研究意义。本文主要做了下面三个方面的工作：

(1) 在一般拓扑空间中，引入了序列紧空间的统计定义并讨论其相应的拓扑性质，深化了拓扑群与可度量化空间中关于序列紧空间的一些结果。

(2) 讨论了统计序列空间的性质，引入了统计序列连续映射、统计序列覆盖映射与统计序列商映射，探讨了这些映射与非统计意义下相关映射的关系以及他们在统计序列空间中的作用，否定地回答了关于统计序列空间乘积性的一个问题。

(3) 在一般收敛，统计收敛等收敛性的基础上，引入一般拓扑空间的 G 方法，从而引入 G 序列空间和 G-Fréchet-Urysohn 空间，探讨了 G 序列空间，G-Fréchet-Urysohn 空间的刻画，遗传性及映射性质，建立了连续性与 G 连续性的相互关系，推广了第一可数的 T_2 拓扑群中的 G 方法及一些相关结果。

关键词：统计序列空间；统计序列紧空间；统计序列连续映射；统计序列商映射；G 序列空间；G-Fréchet-Urysohn 空间。

Abstract

Sequential convergence is an important research object in topology and analysis. On the one hand, convergence is closely related to continuity, compactness and other related properties. On the other hand, it has played a fundamental role in mathematics and its applications. Statistical convergence as an important generalization of convergence has a great significance. The main results are the following:

Firstly, we introduce the statistical definition of sequential compact spaces in general topological spaces, discuss some topological properties on statistically sequential spaces and deepen some results on sequential compact spaces in topological groups and metrizable spaces.

Secondly, the properties of statistically sequential spaces are studied. After introducing the concepts of statistically sequentially continuous mappings, statistically sequence-covering mappings and statistically sequentially quotient mappings, the relationship among the new or old mappings and their effects in statistically sequential spaces are discussed. Also a negative answer is given to a problem about the products of statistically sequential spaces.

Thirdly, based on general convergence, statistical convergence and other convergences, we try to introduce the notions of G-methods, G-sequential spaces and G-Fréchet-Urysohn spaces, discuss the characterization, hereditary properties and mapping properties of G-sequential spaces and G-Fréchet-Urysohn spaces, and establish the mutual relationship between continuity and G-sequential continuity, promote G-methods and some related results in topological Hausdorff group which satisfies the first axiom of countability.

Keywords: statistically sequential spaces; statistically sequential compact spaces; statistically sequentially continuous mappings; statistically sequentially quotient mappings; G-sequential spaces; G-Fréchet-Urysohn spaces

目 录

第 1 章 引 言

1.1 研究现状

作为收敛性的拓展，Zygmund[1] 提出了统计收敛的思想。Fast[2] 和 Steinhaus[3] 各自独立地引入了实数与复数空间上统计收敛的概念。J. Connor[4-5]，J. A. Fridy[6-8]，H. I. Miller[9] 等进一步研究和发展了统计收敛理论。近年来，H. Cakalli[10-12]，P. Kostyrko 等[13]，G. Di Miao 和 D. Kocinac[14]，程立新[15] 等分别探索了拓扑群，度量空间，拓扑空间，测度论中的统计收敛性，同时研究了统计收敛在选择原理，函数空间，多维空间等方向中的应用。其后，唐忠宝和林福财[16] 进一步研究了拓扑空间中的统计序列空间与统计 Fréchet-Urysohn 空间。

众所周知，紧空间与度量空间是拓扑学中重要的研究对象。在拓扑学中，与序列相关的紧性主要有序列紧性及可数紧性等。如何用统计收敛性来探讨这些紧性？自 H. Cakalli[12] 引入并初步探讨了拓扑群中的统计序列紧性之后，李克典，林寿和葛英[17] 定义并研究了锥度量空间中的统计序列紧性。他们的研究都是假设或基于拓扑空间中的第一可数性。如何在不假设第一可数的条件下讨论“统计序列紧性”？在第二章中，本文借助 G. Di Miao 和 D. Kocinac[14] 引入的一般空间中的统计收敛性，定义了拓扑空间中的统计序列紧性，阐述了统计序列紧性的一些基本性质，建立了不依赖于拓扑群或锥度量空间或第一可数空间的更一般的统计序列紧理论。

序列空间性质在刻画拓扑空间的收敛性方面起了极其重要的作用[18]。从映射角度研究序列空间的最主要工具是序列连续映射，序列覆盖映射与商映射等[19-20]。为此，在第三章中，本文在讨论了统计序列空间的进一步性质的基础上，引入了统计序列连续映射，统计序列覆盖映射与统计序列商映射，探讨了这些映射与非统计意义下相应映射的关系及他们在统计序列空间中的作用，否定地回答了唐忠宝和林福财[16] 提出的一个问题。

除了通常的序列收敛性以外，在理论研究与数学应用中还会出现各式各样的具有重要作用的收敛性。如，在可和性理论中矩阵方法的 A 收敛性，在泛函分析中的几乎收敛性，在实分析中的 Cesaro 收敛性和统计收敛性等[21]。Connor 和 Grosse-Erdmann[21] 基于实分析中的几类收敛性，引入了在实数序列集的线性子空间上具有普遍意义的 G 方法，G 收敛性及实空间上的 G 连续性，研究了 G 连续函数与线性函数，连续函数之间

的关系，建立了G连续性的二歧性定理，推广了文献中一些重要的结果。 Cakalli[22-23]将实空间上的G方法，G收敛性及G连续性拓展到拓扑群或第一可数的拓扑群中，定义了G序列紧性，同时利用G闭包和G闭集讨论了G连续性。近来，Mucuk 和 Sahan[24]在第一可数的拓扑群中引入了G开集和G邻域的概念，并给出了G闭集，G开集的运算性质及与G连续性的进一步关系。拓扑空间既是实空间的抽象又是研究拓扑群的基础。收敛性，序列连续性，序列紧性等概念本质上仅与开集或闭集相关。从上述所描述的统计收敛性的研究范围的拓展，启发我们尝试在拓扑空间中引入G方法，G收敛性及G连续性。本文在第四部分定义了拓扑空间中的G方法及G收敛性，以G闭包为基础，给出了G闭包与闭包一致的条件，探讨了G序列空间，G-Fréchet-Urysohn 空间的刻画，遗传性及映射性质，建立了连续性与G连续性的相互关系，把G方法真正变成了一般拓扑学中处理序列收敛问题的一般性方法，统一处理了拓扑群中的G方法及拓扑空间中的收敛方法，特别地推广了第一可数的T_2拓扑群中的G方法及一些相关结果。

虽然在第四章中，给出的结果的证明都不难，同时在拓扑空间中讨论问题也使我们失去了代数运算性质，但是我们的工作更具有一般性，相信这些工作，尤其是G连续性，必将会在以后的研究中产生积极的影响。

1.2 基本概念

定义 1.2.1[18] 设X是拓扑空间。

(1) 对于$P\subset X$，$x\in X$，若X中每一统计收敛于x的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$终于P，则称P为点$x\in X$的序列邻域。

(2) 对于$P\subset X$，若P是P中每一点的序列邻域，则称P为X的序列开集；若$X\setminus P$是X的序列开集，则称P为X的序列闭集。

(3) 若X的每一序列开集是X的开集，则称X是序列空间。

显然，P是空间X的序列闭集当且仅当若由P中点组成的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$收敛于$x\in X$，则$x\in P$。易验证：第一可数空间是序列空间；空间X是序列空间当且仅当X的每一序列闭集是X的闭集。

定义 1.2.2[18] 拓扑空间X称为 Fréchet-Urysohn 空间，若对于每一$A\subset X$有$\overline{A}\subset\overline{A}^{seq}$，即若$x\in\overline{A}\subset X$，则存在由$A$中点组成的序列收敛于$x$。

定义 1.2.3 对于拓扑空间 X 和 Y，设 $f:X\to Y$ 是满映射。

(1) f 称为商映射，若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集，则 U 是 Y 的开集。

(2) f 称为伪开映射[18]，若对每一 $y\in Y$ 及 X 中包含 $f^{-1}(y)$ 的开集 U，$f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域。

提醒读者注意：通常商映射均假设映射的连续性[25]，即上述 (1) 的条件叙述为：若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集当且仅当 U 是 Y 的开集。由于本文讨论的一些映射未必要求连续性，为讨论商映射与相关映射之间更为精确的关系。定义 1.2.3 中的商映射并未预先假设连续性。因而，连续的商映射就是通常的商映射。易验证：伪开映射是商映射。

定义 1.2.4[26] 设 A 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集，$n\in\mathbb{N}$，记 $A(n)=\{k\in A:\ k\le n\}$，则 $\underline{\delta}(A):=\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{|A(n)|}{n}$ 及 $\overline{\delta}(A):=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|A(n)|}{n}$ 分别称为 A 的下渐近密度和上渐近密度。如果 $\underline{\delta}(A)=\overline{\delta}(A)$，则 $\delta(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|A(n)|}{n}$ 称为 A 的渐近密度或自然密度。

注： 1) 对集合 $A\subset\mathbb{N}$，若 $\underline{\delta}(A)$、$\overline{\delta}(A)$、$\delta(A)$ 存在，则它们的值在区间 $[0,1]$ 上。

2) 对集合 $A\subset\mathbb{N}$，若 $\delta(A)$ 存在，则 $\delta(\mathbb{N}\setminus A)=1-\delta(A)$。

3) 若 P 是 $\mathbb{N}$ 的任意非空子集族，且任意 $A\in P$ 有 $\delta(A)=1$，则 $\delta(\cup P)=1$，且对任意 $A_1,A_2\in P$ 有 $\delta(A_1\cap A_2)=1$。

定义 1.2.5[14] X 是拓扑空间，序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$，$x\in X$，如果对 x 的任意邻域 U，$\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\notin U\})=0$，则称序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x，记为 $x=s-\lim x_n$。

显然，拓扑空间 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x\in X$ 当且仅当对 x 的任意邻域 U，$\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U\})=1$。

对于第一可数的拓扑群 X，记 $s(X)$ 是 X 中的所有序列所组成的群，$s(X)$ 的元写为 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。$c(X)$ 是 X 中的所有收敛序列所组成的子群。

定义 1.2.6[22] 设 X 是一个第一可数的拓扑群。

(1) X 上的一种方法是定义于 $s(X)$ 的某子群 $c_G(X)$ 到 X 中的一个同态 $G: c_G(X) \to X$。序列 $x \in s(X)$ 称为 G 收敛于 $l \in X$，如果 $x \in c_G(X)$ 且 $G(x) = l$。

(2) X 上的一种方法 $G: c_G(X) \to X$ 称为正则的，如果 $c(X) \subset c_G(X)$ 且 $G(x) = \lim x$，$\forall x \in c(X)$。

(3) X 上的一种方法 $G: c_G(X) \to X$ 称为子序列的，如果 $x \in c_G(X)$ 是 G 收敛于 $l \in X$，则存在 x 的子序列 $x' \in c(X)$ 使得 $\lim x' = l$。

本文中 $\mathbb{N}$ 表示正整数集，ω 和 ω_1 分别表示第一个无限序数与第一个不可数序数。对一些未说明的定义和术语读者可以参考文献[25]。

第 2 章 统计序列紧空间

在一般拓扑空间中，引入序列紧空间的统计定义，并从“统计聚点”和“统计极限点”着手，尝试探讨可数紧空间的统计定义。另外，对新定义的“统计序列紧空间”的基本拓扑性质进行了研究，具体包括遗传性质，可和性质，映射性质和可积性质等。

2.1 紧性的统计序列定义

本节定义“统计序列紧空间”，同时探讨“统计可数紧空间”的定义。拓扑空间 X 称为序列紧空间[25]，若 X 中任意序列有收敛的子序列。为此，很自然地引入统计序列紧空间的概念。

定义 2.1.1 拓扑空间 X 称为统计序列紧空间(statistically sequentially compact space)，若 X 中任意序列有统计收敛的子序列。

H. Cakalli[12] 与李克典，林寿和葛英[17] 分别引入过拓扑群，锥度量空间中的统计序列紧空间的定义，其形式和上述定义基本一致，但本章是在一般的拓扑空间中定义此概念。

显然，序列紧空间是统计序列紧空间。与序列紧空间相似的紧空间类是可数紧空间。一个空间称为可数紧空间[25]，若它的每一可数开覆盖具有有限子覆盖。可数紧性可用聚点的概念来描述。

引理 2.1.2[27] 对于拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是可数紧空间；

(2) X 中的每一序列有聚点；

(3) X 的每一无限子集 A 存在 ω 聚点，即存在 $x\in X$，使得 x 的任意邻域含有集 A 的无限个点。

由引理 2.1.2，统计序列紧空间是可数紧空间。

如何定义“统计可数紧空间”？鉴于“收敛序列是统计收敛序列”及一些与统计收敛概念相关的拓扑空间的定义[14]，我们认为至少所定义的“统计可数紧空间”要满足：“可数紧空间是统计可数紧空间”。由引理 2.1.2，可以尝试从序列的“统计聚点”着手。

首先，H. Cakalli[12,22] 在拓扑群上以下述方式定义了统计序列可数紧空间 X (statistically sequentially countably compact space)：对 X 的每一无限子集 A，存在 $x\in X$

及 $A\setminus\{x\}$ 中统计收敛于 x 的序列。下列引理说明即使在一般的拓扑空间，这种定义无异于定义 2.1.1 所给出的统计序列紧空间。

引理 2.1.3 拓扑空间 X 是统计序列紧空间当且仅当对 X 中任意无限子集 F，存在 $x\in X$ 及 $F\setminus\{x\}$ 中序列 X，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x。

证 必要性。设 X 是统计序列紧空间。任取 X 中任意无限子集 F，则存在 F 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足若 $n\neq m$，$x_n\neq x_m$。因为 X 是统计序列紧空间，所以存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x。不妨设对任意 $k\in\mathbb{N}$，$x_{n_k}\neq x$，则有 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset F\setminus\{x\}$，且 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x。

充分性。设空间 X 满足充分性条件。任取 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，令 $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$。若序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有无限项相同，显然 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子序列。不妨设对任意 $n\neq m$，$x_n\neq x_m$，则 A 是无限集，从而存在 $x\in X$ 及 $A\setminus\{x\}$ 中序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x。从而 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子序列，X 是统计序列紧空间。

其次，回忆序列聚点或极限点概念的几种形式。J.A.Fridy[7] 最早讨论了实空间的统计聚点和统计极限点。G. Di Miao 和 D. Kocinac[14] 在一般拓扑空间中定义了这两个概念。为了便于这些概念之间的比较，本节引入统计收敛极限点的概念。

定义 2.1.4 设 X 是任意拓扑空间，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中任意序列，$x\in X$。

(1) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计聚点（statistical cluster point）[14]，若对 x 的任意邻域 U，有 $\overline{\delta}\left(\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U\}\right)>0$。$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计聚点集合记为 $\Gamma\left(\{x_n\}\right)$。

(2) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计极限点（statistically limit point）[14]，若存在 $\mathbb{N}$ 的子集 A，使得 $\overline{\delta}(A)>0$ 且序列 $\{x_n\}_{n\in A}$ 收敛于 x。$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计极限点集合记为 $\Lambda\left(\{x_n\}\right)$。

(3) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计收敛极限点（statistically-convergent limit point），若存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x。$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计收

敛极限点集合记为$sL(\{x_n\})$。

(4) 序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在X中的全体聚点的集合记为$C(\{x_n\})$；序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在X中的全体收敛子序列的极限点的集合记为$L(\{x_n\})$。

注 记号$sL(\{x_n\})$和$C(\{x_n\})$为本文所规定。在一些文献中，$L(\{x_n\})$所表示的含义有所不同，如文 [8] 用此表示$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的全体收敛子序列的极限点的集合（本文沿用这一记号），文 [14] 用此表示$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的全体聚点的集合。显然，在第一可数空间中这两种表示方式是一致的。此外，文 [14] 用$\Theta(\{x_n\})$表示$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的全体统计聚点的集合。

定义 2.1.4 中出现的拓扑空间X的五个子集 $\Gamma(\{x_n\})$，$\Lambda(\{x_n\})$，$sL(\{x_n\})$，$C(\{x_n\})$和$L(\{x_n\})$是否为空集各自反映了空间的某种紧性。

易验证：

(1) $\Lambda(\{x_n\})\subset L(\{x_n\})\subset sL(\{x_n\})\subset C(\{x_n\})$。

(2) $\Lambda(\{x_n\})\subset\Gamma(\{x_n\})\subset C(\{x_n\})$[14]。

(3) 空间X是序列紧空间当且仅当对X的任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有$L(\{x_n\})\neq\phi$。

(4) 空间X是统计序列紧空间当且仅当对X的任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有$sL(\{x_n\})\neq\phi$。

(5) 空间X是可数紧空间当且仅当对X的任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有$C(\{x_n\})\neq\phi$。

无论以下述 (6) 或 (7) 哪种方式定义所谓的“统计可数紧空间”都导不出“可数紧空间是统计可数紧空间”，只能导出其逆命题“统计可数紧空间是可数紧空间”成立。

(6) 对空间X的任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有$\Lambda(\{x_n\})\neq\phi$。

(7) 对空间X的任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有$\Gamma(\{x_n\})\neq\phi$。

为此，如何合理定义“统计可数紧空间”还是一个尚未解决的问题。我们认为如何在一般的拓扑空间中合理定义所谓的“统计紧空间”更是一个有意义的问题。

例 2.1.5 存在非统计序列紧的紧空间。

设$I=[0,1]$是单位闭区间。对每一$\alpha\in I$，记$D_\alpha=\{0,1\}$，赋予离散拓扑，则D_α是紧空间。作积空间$X=\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$。由 Tychonoff 积定理，$X$是紧空间。下面证明$X$不是统计序列紧空间。对每一$n\in\mathbb{N}$，取定$x_n\in X$ 满足$p_\alpha(x_n)=\alpha$的 2 进制展开式中的第n位数字，这里，$\alpha\in I$，$p_\alpha:X\to D_\alpha$是投影映射。若X是统计序列紧空间，则X中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有统计收敛的子序列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，设序列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$统计收敛于$x\in X$。对每一$\alpha\in I$，因为$p_\alpha$是连续映射，在$D_\alpha$中序列$\{P_\alpha(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$统计收敛于$p_\alpha(x)$（见文 [16] 定理 2.2）。取定$\beta\in I$，使得当$k$是奇数时，$p_\beta(x_{n_k})=0$；当$k$是偶数时，$p_\beta(x_{n_k})=1$。那么在空间$D_\beta=\{0,1\}$中序列$\{P_\beta(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$是$0,1,0,1,\cdots,$不是统计收敛的，矛盾。从而$X$不是统计序列紧空间。

问题 2.1.6 寻找非序列紧的统计序列紧空间。

2.2 统计序列紧空间的基本性质

本节讨论在 2.1 节中所定义的统计序列紧空间的一些基本性质，内容涉及遗传性质，可和性质，映射性质和可积性质等。

先回忆一些相关定义。

定义 2.2.1 设X是拓扑空间。

(1) 若对X的任意非闭子集A，存在$x\in X\setminus A$和A中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$统计收敛于x，则称X是统计序列空间[14]。

(2) 设$A\subset X$，若A中任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$统计收敛于$x\in X$，有$x\in A$，则称A为X的统计序列闭集[16]；对任意$x\in A$是及空间X中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，且$x=s-\lim x_n$，有$\left|\{n:x_n\in A\}\right|=\omega$，则称$A$为$X$的统计序列开集[16]。

定义 2.2.2 设X，Y是任意拓扑空间，映射$f:X\to Y$。f称为保持统计收敛映射，若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是X中统计收敛于x的序列，则序列$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$在$Y$中统计收敛于$f(x)$。

先说明怎样的可数紧空间是统计序列紧空间。

定理 2.2.3 若 X 是可数紧的统计序列空间，则 X 是统计序列紧空间。

证 任取 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，令 $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$。若 A 是有限集，显然 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有收敛的子序列。若 A 是无限集，因为 X 是可数紧空间，所以 A 至少有一个聚点 x。令 $B=A\setminus\{x\}$，则 B 不是闭集。由 X 是统计序列空间知 B 不是统计序列闭集，从而存在 B 中序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 中统计收敛，于是 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子序列。故 X 是统计序列紧空间。

这表明例 2.1.5 给出的紧空间不是统计序列空间。定理 2.2.3 可与“可数紧的序列空间是序列紧空间”相类比(见[28，定理 5.3])。由于统计序列紧空间是可数紧空间，所以统计序列紧的序列空间也是序列紧空间。这一方面说明问题 2.1.6 中想找的统计序列紧空间不能是序列空间，另一方面也说明有些文献在第一可数空间中讨论统计序列紧性只是给出序列紧性或可数紧性多一些刻画而已。

问题 2.2.4 统计序列紧的统计序列空间是否是序列紧空间？

序列紧性是闭遗传性质，有限可和性质和连续映射保持性质，统计序列紧性也有类似的性质。

定理 2.2.5 设 X 是统计序列紧空间。若 F 是 X 的统计序列闭集，则 F 是统计序列紧子集。

证 任取 F 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，则 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$。因为 X 是统计序列紧空间，所以存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x\in X$。因为 F 是 X 的统计序列闭集，故 $x\in F$。从而 F 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子序列，F 是统计序列紧子集。

定理 2.2.6 任意 $s\in S$，$X_s\neq\phi$，则 $\bigoplus_{s\in S}X_s$ 是统计序列紧空间当且仅当 S 是有限集且每一 X_s 是统计序列紧空间。

证 充分性。令 $X=\bigoplus_{s\in S}X_s$。任取 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，因为 S 是有限集，则必存在 $s\in S$，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中有无限项属于 X_s，不妨设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X_s$。因为 X_s 是统计序列紧空间，

所以$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在X_s中有统计收敛于$x\in X_s$的子序列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，则$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$在$X$中亦统计收敛于$x$。事实上，任取$x$在$X$中的开邻域$U$，由拓扑和定义知$U\cap X_s$是$x$在$X_s$中的开邻域，从而$1=\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:x_{n_k}\in U\cap X_s\right\}\right)\leq\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:x_{n_k}\in U\right\}\right)\leq 1$。故$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$X$中有统计收敛的子序列，$X=\bigoplus_{s\in S}X_s$是统计序列紧空间。

必要性。设$X=\bigoplus_{s\in S}X_s$是统计序列紧空间。先证S是有限集。若不然，则S包含可数无限子集S_0。在集S_0中的每个X_s取一点构成X中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，则此序列无统计收敛的子序列。否则，存在$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的子序列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$在统计收敛于$x\in X_s$。取$x$在$X_s$中的开邻域$U$，满足任意$n\in\mathbb{N}$，$x_{n_k}\notin U$，则$U$是$x$在$X$中的开邻域，从而$\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:x_{n_k}\in U\right\}\right)=1$，这与$U$的取法矛盾。

再证任意$s\in S$，X_s是统计序列紧空间。任取X_s中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，则$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\bigoplus_{s\in S}X_s$。因为$\bigoplus_{s\in S}X_s$是统计序列空间，则$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\bigoplus_{s\in S}X_s$中存在统计收敛的子序列，从而则$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$X_s$中存在统计收敛的子序列，即$X_s$是统计序列紧空间。

定理 2.2.7 设X是统计序列紧空间，Y是任意拓扑空间。若$f:X\to Y$是保持统计收敛的满映射，则Y是统计序列紧空间。

证 任取Y中任意序列$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，取定X中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得每一$x_n\in f^{-1}(y_n)$。因为X是统计序列紧空间，则存在$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的子列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$在统计收敛于某$x\in X$。而$f:X\to Y$是保持统计收敛的满映射，则$\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$统计收敛于$f(x)\in Y$，且$\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，从而$Y$是统计序列紧空间。

容易验证：序列紧空间具有可数可积性[25]。例 2.1.5 表明统计序列紧空间不是任意可积性。

问题 2.2.8 统计序列紧空间是否具有可数可积性？

我们甚至不知道两个统计序列紧空间的积空间是否是可数紧空间？然而，有下述结果成立。

定理 2.2.9 设 X 是序列紧空间，Y 是统计序列紧空间，则 $X\times Y$ 是统计序列紧空间。

证 任取 $X\times Y$ 中序列 $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中每一 $p_i=(x_i,y_i)$。因为 X 是序列紧空间且 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset X$，从而存在 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\left\{x_{i_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\left\{x_{i_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于某 $x\in X$。由 Y 是统计序列紧空间且相应的子列 $\left\{y_{i_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}\subset Y$，于是存在 $\left\{y_{i_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\left\{y_{i_{k_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\left\{y_{i_{k_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于某 $y\in Y$。这时，$\left\{\left(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $(x,y)\in X\times Y$。事实上，任取 (x,y) 在 $X\times Y$ 中的开邻域 $U\times V$，由于 $\left\{x_{i_{k_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于某 $x\in X$，所以存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $n>n_0$ 时，$x_{i_{k_n}}\in U$。这时 $\left\{n\in\mathbb{N}:\left(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}}\right)\in U\times V\right\}\supset\{n\in\mathbb{N}:n\geq n_0\}\cap\left\{n\in\mathbb{N}:y_{i_{k_n}}\in V\right\}$，又由于 $\left\{y_{i_{k_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于某 $y\in Y$，则 $\delta\left(\left\{n\in\mathbb{N}:\left(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}}\right)\in U\times V\right\}\right)=1$，从而 $\left\{\left(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $(x,y)\in X\times Y$。故 $X\times Y$ 是统计序列紧空间。

第 3 章 统计序列空间与统计序列商映射

本章讨论了统计序列空间的拓扑性质，否定地回答了关于统计序列空间乘积性的一个问题。另外，引入了统计序列连续映射、统计序列覆盖映射与统计序列商映射，探讨了这些映射与非统计意义下相关映射的关系以及他们在统计序列空间中的作用。

3.1 统计序列空间

本节主要讨论统计序列闭（开）集与序列闭（开）集之间的关系，证明统计序列空间具有可和性但不具有可积性。另外，还给出几个例子，分别说明统计序列闭集与序列闭集，闭集的真包含关系。

虽然统计序列开集与统计序列闭集的定义形式（定义 2.2.1）有别于序列开集与序列闭集的定义方式，但其本质是一样的。易验证：拓扑空间 X 的子集 A 是 X 的统计序列闭集当且仅当 $X \setminus A$ 是 X 的统计序列开集[16]。同时，有下述结果成立：

引理 3.1.1[16] 对于空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是统计序列空间；

(2) X 的每个统计序列开集是 X 的开集；

(3) X 的每个统计序列闭集是 X 的闭集。

显然，X 的每一开（或闭）集是统计序列开（或统计序列闭）集。

定理 3.1.2 空间 X 的每一统计序列开（或统计序列闭）集是 X 的序列开（或序列闭）集。

证 仅证明统计序列闭集的情形，统计序列开集的情形是类似的。设 F 是空间 X 的统计序列闭集。任取序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$，若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x，则 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x，因为 F 是 X 的统计序列闭集，所以 $x\in F$，即 F 是空间 X 的序列闭集。

由定理 3.1.2 立即导出序列空间是统计序列空间[14,16]。由于存在非序列空间的统计序列空间，所以拓扑空间的序列开（或序列闭）集未必是统计序列开（或统计序列闭）集[16]。鉴于此例本文将多次引用，重新叙述这例。

例 3.1.3［16，例 2.1］存在不是统计序列闭集的序列闭集。

令 $S=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$，满足若 $m\neq n$ 则 $x_m\neq x_n$。任取 $x_0\notin S$，令 $X=S\cup\{x_0\}$。对集合 X 赋予如下拓扑：

(1) 每一个点 x_n 是孤立点；

(2)点 x_0 的每个开邻域 U 形如 $U=\{x_0\}\cup M$，其中 $M\subset S$ 且 $\delta\left(\{n\in\mathbb{N}:x_n\in M\}\right)$。

则 S 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x_0\notin S$，故 S 不是统计序列闭集。另一方面，由 S 中点组成的 X 中的收敛序列只能是平凡序列。否则，由于 S 中的点均是 X 的孤立点，不妨设存在 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset S$ 收敛于 x_0 且当 $m\neq n$ 时，$y_m\neq y_n$。取定 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\left\{y_{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，令 $V=X\setminus\left\{y_{n^2}:n\in\mathbb{N}\right\}$。由于 $\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:y_k\in\left\{y_{n^2}:n\in\mathbb{N}\right\}\right\}\right)=0$，故 V 是 x_0 的开邻域，从而 $\left\{y_{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛于 x_0，这与 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_0 矛盾。这表明：S 是 X 的序列闭集。

例 3.1.4 存在每一子集都是统计序列闭集的非离散空间。

让 X 是任意不可数集，赋予集合 X 可数补拓扑，即取 X 的拓扑

$$\tau=\{\phi\}\cup\{U\subset X:X\setminus U\text{是可数集}\}$$

显然，X 不是离散空间。对于 $F\subset X$，若 F 不是 X 的统计序列闭集，则存在 $x\in X\setminus F$ 及 F 中统计收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，令 $U=X\setminus\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$，则 U 是 x 的开邻域且每一 $x_n\notin U$，这与 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x 矛盾。此例也说明拓扑空间中的统计序列闭集未必是闭集。

由定义 2.2.1 易见：空间中一族统计序列闭集的交是统计序列闭集，显然，拓扑空间中的闭集（或序列闭集）关于有限并封闭。

问题 3.1.5 设 A，B 均是空间 X 的统计序列闭集，那么 $A\cup B$ 是否是 X 的统计序列闭集？

定理 3.1.6 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ 是统计序列空间族，则 $\bigoplus_{\alpha\in\wedge}X_\alpha$ 是统计序列空间。

证 令 $X=\bigoplus_{\alpha\in\wedge}X_\alpha$，由引理 3.1.1 知只须证明：若 F 是 X 的统计序列闭集，则 F 是 X 的闭集。对于每一 $\alpha\in\wedge$，由于 X_α 是 X 的闭集，所以 $F\cap X_\alpha$ 是 X 的统计序列闭集。由于 $F\cap X_\alpha\subset X_\alpha$，所以 $F\cap X_\alpha$ 是 X_α 的统计序列闭集。又由于 X_α 是统计序列空间，故 $F\cap X_\alpha$ 是 X_α 的闭集。由拓扑和的定义，F 是 X 的闭集，从而 $X=\bigoplus_{\alpha\in\wedge}X_\alpha$ 是统计序列空间。

关于统计序列空间的乘积性质，唐忠宝和林福财[16] 提出问题：两个统计序列空间的乘积是否一定是统计序列空间？下述对这个问题给出否定的回答。

拓扑空间 X 称为具有可数 tightness[29]，若 $A \subset X$ 且 $x \in \overline{A}$，则存在 A 的可数子集 C，使得 $x \in \overline{C}$。已知序列空间具有可数 tightness[29]。下述定理推广了这一结果。

定理 3.1.7 统计序列空间具有可数 tightness。

证 对于空间 X 的任意子集 A，记 $[A]_\omega = \cup\{\overline{B}: B是A的可数子集\}$。显然，$A \subset [A]_\omega \subset \overline{A}$。下面证明：$[A]_\omega$ 是 X 的统计序列闭集。任取 $[A]_\omega$ 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x \in X$，我们要证明：$x \in [A]_\omega$。对任意 $n \in \mathbb{N}$，由于 $x_n \in [A]_\omega$，存在 A 的可数子集 B_n，使得 $x_n \in \overline{B_n}$。令 $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$，则 B 是 A 的可数子集且 $x_n \in \overline{B}$。由于 $\overline{B}$ 是统计序列闭集，所以 $x \in \overline{B} \subset [A]_\omega$。

现在，设 X 是统计序列空间且 $A \subset X$，则统计序列闭集 $[A]_\omega$ 是 X 的闭集，于是 $[A]_\omega \subset \overline{A} \subset \overline{[A]_\omega} = [A]_\omega$，从而 $\overline{A} = [A]_\omega$。若 $x \in \overline{A}$，则 $x \in [A]_\omega$，于是存在 A 的可数子集 C 使得 $x \in \overline{C}$，即 X 具有可数 tightness。

例 3.1.8 两个统计序列空间的积空间不是统计序列空间。

取数直线 $\mathbb{R}$ 关于通常拓扑的子空间 $S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$。对每一序数 $\alpha \in \omega_1$，让 S_α 同胚于 S。记拓扑和空间 $\bigoplus_{\alpha\in\omega_1} S_\alpha$ 为 X。把 X 的所有非孤立点集 A 贴成一点所得的商空间 X/A 记为 S_{ω_1}，称为序列扇。S_{ω_1} 是序列空间[27]，从而是统计序列空间。但积空间 $(S_{\omega_1})^2$ 不具有可数 tightness [30]，由定理 3.1.7 知 $(S_{\omega_1})^2$ 不是统计序列空间。

序列空间的一个基本结论是序列空间是 k 空间[29]。拓扑空间 X 称为 k 空间[25]，若 X 的子集 F 满足：对于 X 的每一紧子集 K，$K \cap F$ 是 K 中的闭集，则 F 是 X 的闭集。然而，统计序列空间未必是 k 空间。

例 3.1.9 存在非 k 空间的统计序列空间。

我们验证例 3.1.3 给出的空间 $X = S \cup \{x_0\}$ 满足要求。文 [16] 已证明了 X 是统计序

列空间。下面说明X不是k空间。设K是X的任意紧子集，因为K是可数子空间，所以K具有可数网（network）。由文 [27，定理 7.3.13]，具有可数网的T_2的紧空间是可度量化空间，于是K可度量化，从而K是序列紧空间。由于X中不存在非平凡的收敛序列，所以K是有限集。这时，S与X中每一紧子集K的交集$S\cap K$是K中的闭集。如果X是k空间，则S是X的闭集，矛盾。故X不是k空间。

3.2 统计序列连续映射

由于序列空间和统计序列空间都涉及序列的收敛性，所以在讨论它们的拓扑性质时，保持收敛性的映射将发挥积极的作用。本节将引入统计序列连续映射，并讨论其与原有连续映射，序列连续映射之间的关系。为此，先回忆序列连续映射的概念。

定义 3.2.1[31] 设X，Y是任意拓扑空间，映射$f:X\to Y$称为序列连续映射，若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是X中收敛于x的序列，则序列$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$在$Y$中收敛于$f(x)$。

显然，连续映射是序列连续映射。易验证：对T_1空间Y，映射$f:X\to Y$是序列连续映射当且仅当若U是Y的序列开（序列闭）集，则$f^{-1}(U)$是X的序列开（序列闭）集[28]。

定义 3.2.2 设X，Y是任意拓扑空间，映射$f:X\to Y$称为统计序列连续映射，U是Y的统计序列开集，则$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集。

显然，映射$f:X\to Y$是统计序列连续映射当且仅当若F是Y的统计序列闭集，则$f^{-1}(F)$是X的统计序列闭集。

保持统计收敛映射、统计序列连续映射与连续映射之间的基本关系如下。

定理 3.2.3 设映射$f:X\to Y$，其中X，Y是任意拓扑空间。

(1) 若f是连续映射，则f是保持统计收敛映射。

(2) 若f是保持统计收敛映射，则f是统计序列连续映射。

证 由文 [16] 的定理 2.2 知 (1) 成立。下证 (2) 成立。

设f是保持统计收敛映射。任取Y的统计序列闭集F，下证$f^{-1}(F)$是X的统计序列

闭集。设 $f^{-1}(F)$ 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x\in X$。因为 f 是保持统计收敛映射，所以序列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $f(x)$。又因为 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset f\left(f^{-1}(F)\right)\subset F$，$F$ 是 Y 的统计序列闭集，所以 $f(x)\in F$，即 $x\in f^{-1}(F)$。因而 $f^{-1}(F)$ 是 X 的统计序列闭集，f 是统计序列连续映射。

问题 3.2.4 统计序列连续映射是否是保持统计收敛映射？

在一定的附加条件下，上述问题的回答是肯定的。

定理 3.2.5 设映射 $f:X\to Y$，其中 X 是统计序列空间，Y 是任意拓扑空间。下述条件相互等价：

(1) f 是连续映射；

(2) f 是保持统计收敛映射；

(3) f 是统计序列连续映射。

证 文 [16] 的定理 2.2 已证明：$(1)\Leftrightarrow(2)$，由定理 2.2.3 知 $(2)\Rightarrow(3)$。为完成定理证明，下面证明 $(3)\Rightarrow(1)$ 即可。

设 f 是统计序列连续映射。若 F 是 Y 的任意闭集，则 F 是 Y 的统计序列闭集，因为设 f 是统计序列连续映射，所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 的统计序列闭集。又因为 X 是统计序列空间，则 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集，故 f 是连续映射。

推论 3.2.6 设映射 $f:X\to Y$，其中 X 是序列空间，Y 是任意拓扑空间。下述条件相互等价：

(1) f 是连续映射；

(2) f 是保持统计收敛映射；

(3) f 是统计序列连续映射；

(4) f 是序列连续映射。

证 由于序列空间是统计序列空间，所以由定理3.2.5，$(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$。由文[32]的定理1知$(1)\Leftrightarrow(4)$。

例 3.2.7 存在非连续的保持统计收敛的序列连续映射。

令 $X=[0,\omega_1]$，赋予下述拓扑：X中的点ω_1具有通常的序拓扑邻域，其余点是孤立点。令$Y=X$，映射$f:X\to Y$定义如下：当$x=\omega_1$时，$f(x)=0$；当$x=0$时，$f(x)=\omega_1$；当$x\in X\setminus\{0,\omega_1\}$时，$f(x)=x$。由$X$上的拓扑，若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X$中统计收敛于某点$x$的序列，则$\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\neq x\})=0$，即统计收敛序列只能是平凡的，从而$f$是保持统计收敛映射。因为$\{0\}$是$Y$中的开集，但$f^{-1}(0)=\{\omega_1\}$不是$X$中的开集，所以$f$不是连续映射。此外，由于$X$没有非平凡的收敛序列，从而$f$是序列连续映射。

例 3.2.8 存在非统计序列连续的序列连续映射。

ω赋予离散拓扑，令$X=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$。$X$上拓扑定义如下：

(1) 每一$\frac{1}{n}$是孤立点；

(2) 0的每个开邻域U形如$U=\{0\}\cup M$，其中$M\subset\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$，$\delta\left(\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\in M\right\}\right)=1$。

映射$f:X\to\omega$定义如下；若$x=0$，$f(x)=0$；若$x=\frac{1}{n}$，$f(x)=n$。

由例3.1.3知X中没有非平凡的收敛序列，从而f是序列连续映射。但f不是统计序列连续映射。事实上，因为ω中无非平凡的统计收敛序列，所以$\mathbb{N}$是ω的统计序列闭集。$f^{-1}(\mathbb{N})=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$，由$X$上拓扑定义知序列$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$在$X$中统计收敛于$0\notin\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$，故$f^{-1}(\mathbb{N})$不是$X$的统计序列闭集，从而$f:X\to\omega$不是统计序列连续映射。

问题 3.2.9 保持统计收敛映射是否是序列连续映射？

3.3 统计序列商映射

研究序列空间最强有力的映射是商映射[29] 与序列商映射[31]。为更好的研究统计序列空间，本小节我们将引入统计序列商映射，统计序列覆盖映射，并讨论它们与商映射，序列商映射，序列覆盖映射之间的关系，给出例子说明相关映射之间的不蕴含关系。为此，先回忆与序列空间相关的映射。

定义 3.3.1 设 X，Y 是任意拓扑空间，$f:X\to Y$ 是满映射。

(1) f 称为序列商映射[31]，若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的序列开集，则 U 是 Y 的序列开集。

(2) f 称为序列覆盖映射[19]，若 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中收敛于 $y\in Y$ 的序列，则存在 X 中收敛于某 $x\in f^{-1}(y)$ 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n\in f^{-1}(y_n)$，$\forall\, n\in\mathbb{N}$。

本文引入定义 3.3.1 中所定义映射的统计形式。

定义 3.3.2 设 X，Y 是任意拓扑空间，$f:X\to Y$ 是满映射。

(1) f 称为统计序列商映射，若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的统计序列开集，则 U 是 Y 的统计序列开集。

(2) f 称为统计序列覆盖映射，若 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中统计收敛于 $y\in Y$ 的序列，则存在 X 中统计收敛于某 $x\in f^{-1}(y)$ 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n\in f^{-1}(y_n)$，$\forall\, n\in\mathbb{N}$。

序列覆盖是序列商映射[31]。对于统计形式的序列覆盖映射，有相应的结果成立。

定理 3.3.3 设 X，Y 是任意拓扑空间，若 $f:X\to Y$ 是统计序列覆盖映射，则 f 是统计序列商映射。

证 任取 Y 中非统计序列闭集 H，则存在 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H$，使得 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $y\notin H$，由于 $f:X\to Y$ 是统计序列覆盖映射，所以存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$，满足 $x_n\in f^{-1}(y_n)$ 及 $x\in f^{-1}(y)$，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x，而 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset f^{-1}(H)$，$x\notin f^{-1}(H)$，所以 $f^{-1}(H)$ 不是统计序列闭集。从而 f 是统计序列商映射。

下述定理给出了商映射与统计序列商映射之间的关系。

定理 3.3.4 设X，Y是任意拓扑空间，$f:X\to Y$ 是满映射。

(1) 若X 是统计序列空间且f是商映射，则f是统计序列商映射。

(2) 若Y 是统计序列空间且f是统计序列商映射，则f是商映射。

证 (1) 设X是统计序列空间且f是商映射。任取$U\subset Y$，满足$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集，由于X是统计序列空间，则$f^{-1}(U)$是X的开集。又因为f是商映射，所以U是Y的开集，从而U是Y的统计序列开集。故f是统计序列商映射。

(2) 若Y是统计序列空间且f是统计序列商映射。若$f^{-1}(U)$是X的开集，则$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集，由于f是统计序列商映射，故U是Y的统计序列开集。又因为Y是统计序列空间，所以U是Y的开集。故f是商映射。

推论 3.3.5 设X是统计序列空间，Y是任意拓扑空间。若 $f:X\to Y$是统计序列连续映射，则f是商映射当且仅当f是统计序列商映射且Y是统计序列空间。

证 文 [16] 的定理 2.4 本质上已证明了统计序列连续的商映射保持统计序列空间，其余结论来自定理 3.3.4。

上述两结果说明了在统计序列空间的条件下，商映射与统计序列商映射的关系。另一方面，我们也可以通过商映射与统计序列商映射来刻画统计序列空间。

定理 3.3.6 拓扑空间X是统计序列空间当且仅当对任意拓扑空间Y，若$f:X\to Y$是连续的商映射，则f是统计序列商映射。

证 由定理 3.3.4(1) 得必要性，下面证明充分性。

若X不是统计序列空间，则存在X的统计序列闭集H，使得H不是X的闭集。令$Y=\{0,1\}$，映射$f:X\to Y$定义如下：当$x\in H$时，$f(x)=0$；当$x\in X\setminus H$时，$f(x)=1$。Y上的拓扑是由映射f诱导的商拓扑，即对于$U\subset Y$，U是Y的开集当且仅当$f^{-1}(U)$是X的开集。这时，$f:X\to Y$是连续的商映射。因为$f^{-1}(\{1\})=X\setminus H$不是$X$的开集，所以$\{1\}$不是$Y$的开集，从而常值序列$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中每一$y_n=0$，统计收敛于 1，所以$\{0\}$不是$Y$

的统计序列闭集。但 $f^{-1}(\{0\})=H$ 是 X 的统计序列闭集，从而 f 不是统计序列商映射。

本节最后给出例子说明相关映射之间的不蕴含关系。

定理 3.3.3 的逆命题不成立。

例 3. 3. 7 存在既不是序列覆盖也不是统计序列覆盖的连续的统计序列商映射。

设非平凡的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛于不同的点 x，y。令 $S_1=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$，$S_2=\{y_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{y\}$，且 $X=S_1\oplus S_2$。取定 z 不同于 x 与 y。令 $Z=(X\setminus\{x,y\})\cup\{z\}$，赋予 Z 为把 $\{x,y\}$ 贴成点 z 所成的商空间，让 $f:X\to Z$ 为自然商映射，则 f 连续。因为 X 是第一可数空间，所以 X 是序列空间从而 X 是统计序列空间。由定理 3.3.4 知 f 是统计序列商映射。

取 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset Z$，满足 $z_{2k-1}=x_k$，$z_{2k}=y_k$，$\forall k\in\mathbb{N}$。在 Z 中序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 z，当然统计收敛于 z。若 f 是统计序列覆盖映射，因为每一 $f^{-1}(z_n)=\{z_n\}$，则存在 $a\in f^{-1}(z)=\{x,y\}$，使得 X 中序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 a。不妨设 $a=x$，则 S_1 是 a 在 X 中的邻域且 $\delta(\{n\in\mathbb{N}:z_n\in S_1\})=\dfrac{1}{2}$，这与序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 z 矛盾。故 f 不是统计序列覆盖映射。上述论证也说明 f 不是序列覆盖映射。

下述两个例子分别说明定理 3.3.4 中附加统计序列空间的条件不可省略。

例 3. 3. 8 存在不是统计序列商的连续的商映射。

让 X 是例 3.2.7 中的拓扑空间 $X=[0,\omega_1]$。令 $Y=\{0,1\}$，赋予拓扑 $\{\phi,\{0\},Y\}$。映射 $f:X\to Y$ 定义如下：$f([0,\omega_1))=\{0\}$，$f(\omega_1)=1$。则 f 是连续的商映射。但是，f 不是统计序列商映射。事实上，因为 $f^{-1}(0)$ 是 X 的统计序列闭集，而 Y 中的常值列：$0,0,0\cdots$，统计收敛于 1，从而 $\{0\}$ 不是 Y 的统计序列闭集，所以 f 不是统计序列商映射。

例 3. 3. 9 存在不是商的连续的统计序列覆盖映射。

让 X 是例 3.2.7 中的拓扑空间 $X=[0,\omega_1]$，$Z=[0,\omega_1]$ 赋予离散拓扑，令 $g:X\to Z$ 是恒等映射。显然，g 是连续映射，但不是商映射。否则，由于 Z 是离散空间，则 X 具有离

散拓扑，矛盾。由于X中统计收敛序列都是平凡的，所以g是统计序列覆盖映射。由定理 3.3.3 知g是统计序列商映射。

例 3. 3. 10 存在不是统计序列商的连续的序列覆盖映射。

让$X=S\cup\{x_0\}$是例 3.1.3 给出的拓扑空间，再让Z是集X赋予离散拓扑。令$h:Z\to X$是恒等映射。显然，h是连续映射。由例 3.1.3 知X中没有非平凡的收敛序列，于是h是序列覆盖映射。但h不是统计序列商映射。事实上，因为$h^{-1}(S)$ 是Z的闭集，从而也是Z的统计序列闭集，但S不是X的统计序列闭集，所以h不是统计序列商映射。

例 3. 3. 11 存在不是序列商映射的连续的统计序列覆盖的商映射。

让$Y=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$，赋予实直线$\mathbb{R}$ 的关于通常拓扑的子空间拓扑。记

$$\left\{\overline{\{y_k:k\in\mathbb{N}\}}:\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\text{是}Y\text{中的收敛序列}\right\}=\{Y_\alpha:\ \alpha\in\wedge\}$$

显然，$\{Y_\alpha:\alpha\in\wedge\}$是$Y$的覆盖。对于每一$\alpha\in\wedge$，集$Y_\alpha$赋予下述拓扑记为空间$X_\alpha$：若$Y_\alpha$是有限集，则$X_\alpha$是离散空间；若$Y_\alpha$是无限集，则$0\in Y_\alpha$，并赋予$X_\alpha$形如例 3.1.3 的拓扑，其中视 0 为例 3.1.3 中的x_0。令X是互不相交空间族$\{X_\alpha\times\{\alpha\}:\alpha\in\wedge\}$的拓扑和，并定义函数$p:X\to Y$为自然映射，即$p((y,\alpha))=y$；$\forall(y,\alpha)\in X\times\{\alpha\},\alpha\in\wedge$。下面证明$p$是满足例要求的映射。

若U是 0 在Y中的邻域，则$Y\setminus U$是有限集，于是对于每一$\alpha\in\wedge$，$(X\times\{\alpha\})\cap p^{-1}(Y\setminus U)$是有限集，所以$p^{-1}(Y\setminus U)$是$X$的闭集，即$p^{-1}(U)$是$X$的开集。这说明$p$是连续映射。

例 3.1.3 已证明了每一X_α中不存在非平凡的收敛序列，于是X中也不存在非平凡的收敛序列，从而p不是序列商映射。

最后证明p是统计序列覆盖映射。设$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是Y中的一个统计收敛序列，不妨设$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$统计收敛到 0。由于Y是第一可数空间，所以存在$A\subset\mathbb{N}$，使得$\delta(A)=1$且

$\lim\limits_{k\in A,k\to\infty} y_k = 0$（见文[14]定理 2.2），于是存在$\alpha\in\wedge$使得$\{y_k : k\in A\}\cup\{0\}=Y_\alpha$。因为在空间$X_\alpha$中序列$\{y_k\}_{k\in A}$统计收敛于 0，所以在空间$X$中序列$\{(y_k,\alpha)\}_{k\in A}$也统计收敛于 0。对于每一$k \in \mathbb{N}$，取定$x_k\in p^{-1}(y_k)$满足当$k\in A$时，有$x_k=(y_k,\alpha)\in Y_\alpha\times\{\alpha\}$。由于$\delta\left(A\right)=1$，于是在$X$中序列$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$统计收敛于 0。故$p$是统计序列覆盖映射。

第 4 章 拓扑空间中的G方法，G序列空间与G连续性

以上讨论的均是拓扑空间中的一种特殊收敛性——统计收敛性。在下面的研究中，我们讨论更加一般的收敛性——G 收敛。以 G 闭包为基础，给出了 G 闭包与闭包一致的条件，探讨了 G 序列空间，G-Fréchet-Urysohn 空间的刻画，遗传性及映射性质，建立了连续性与 G 连续性的相互关系，把 G 方法真正变成了一般拓扑学中处理序列收敛问题的一般性方法，统一处理了拓扑群中的 G 方法及拓扑空间中的收敛方法，特别地推广了第一可数的 T_2 拓扑群中的 G 方法及一些相关结果。

4.1 拓扑空间中的G方法

Connor 和 Grosse-Erdmann[21] 最先在实空间中阐述了 G 方法及相关概念。其后，Cakalli[22] 把这些概念拓展到拓扑群上，给出了 1.1.2 节中相应的定义。受他们工作的启发，我们在拓扑空间中讨论这些方法。

定义 4.1.1 设 X 是一个拓扑空间。

(1) X 上的一种方法是定义于 $s(X)$ 的某子集 $c_G(X)$ 到 X 中的一个函数 $G:c_G(X)\to X$。序列 $x\in s(X)$ 称为 G 收敛于 $l\in X$，如果 $x\in c_G(X)$ 且 $G(x)=l$。

(2) X 上的一种方法 $G:c_G(X)\to X$ 称为正则的，如果 $c(X)\subset c_G(X)$ 且 $G(x)=\lim x$，$\forall x\in c(X)$。

(3) X 上的一种方法 $G:c_G(X)\to X$ 称为子序列的，如果 $x\in c_G(X)$ 是 G 收敛于 $l\in X$，则存在 x 的子序列 $x'\in c(X)$ 使得 $\lim x'=l$。

冠以“收敛”之名的 G 方法仅是一个函数关系，与 X 的拓扑并无关系。通过正则方法或子序列方法，可以建立 G 收敛与 X 中收敛序列的密切联系。另一方面，由于 X 仅是一个拓扑空间，定义 4.1.1 中没有要求 $c_G(X)$ 是一个子群及 G 是一个同态映射，但是在本文所给出的所有例子中 G 均是同态映射。

作为拓扑空间中序列闭包概念的一般化，用 G 方法探讨拓扑性质的重要概念是 G 闭

包。

定义 4.1.2 设 X 是拓扑空间， G 是 X 上的一种方法。对于 $A \subset X$，

(1) $\overline{A}^{seq} = \{l \in X$: 存在 A 中序列 $x \in c(X)$ 使得 $\lim x = l\}$ 称为 A 的序列闭包[33]。

(2) $\overline{A}^{G} = \{l \in X$: 存在 A 中序列 $x \in c_G(X)$ 使得 $G(x) = l\}$ 称为 A 的 G 闭包。

(3) 如果 $\overline{A}^{seq} \subset A$ (或 $\overline{A}^{G} \subset A$)，则 A 称为 X 的序列闭集[18] (或 G 闭集)，即若 A 中的序列 x 收敛 (或 G 收敛) 于 $l \in X$，则 $l \in A$。

Connor 和 Grosse-Erdmann[21]和 Cakalli[22]分别在实空间和拓扑群中定义了 $\overline{A}^{G}$ 和 G 序列闭集。

显然，$G(s(A) \cap c_G(X)) = \overline{A}^{G}$ 且 $A \subset \overline{A}^{seq} \subset \overline{A}$。一般说来，$A \subset \overline{A}^{G}$ 不总成立，甚至未必有 $X = \overline{X}^{G}$，见例 4.2.8(1)。 由此可见 G 方法的广泛性。

4.2 G 闭包

由闭包运算可生成集上的拓扑结构。探讨 G 闭包在拓扑空间中的闭性是建立 G 方法拓扑性质的有较途径。本节讨论对于拓扑空间 X 及其子集 A ， A 的闭包 $\overline{A}$ 与 A 的 G 闭包 $\overline{A}^{G}$，序列闭包 $\overline{A}^{seq}$ 的相互关系。

下述引理是显然的。

引理 4.2.1 设 X 是拓扑空间。

(1) 若 G 是 X 上的正则方法，则对于每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A}^{seq} \subset \overline{A}^{G}$，从而 X 的 G 闭集是序列闭集。

(2) 若 G 是 X 上的子序列方法，则对于每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A}^{G} \subset \overline{A}^{seq}$，从而 X 的序列闭集是 G 闭集。

由此，若 G 是 X 上的子序列的正则方法，则对于每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A}^{seq} = \overline{A}^{G}$，从而 X 的序列闭集与 G 闭集是一致的。

引理 4.2.2 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法且 $A \subset X$。若 $\overline{A} = \overline{A}^{G}$，则 A 是 X 的 G 闭集当且仅当 A 是 X 的闭集。

证 如果 A 是 X 的闭集，则 $\overline{A}^G=\overline{A}=A$，所以 A 是 X 的 G 闭集。另一方面，如果 A 是 X 的 G 闭集，则 $\overline{A}^G\subset A\subset\overline{A}=\overline{A}^G$，于是，即 A 是 X 的闭集。

对于拓扑空间 X 及序列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in s(X)$，记

$$\overline{x}=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\in X:l\text{是序列}x\text{在}X\text{中的聚点}\}。$$

引理 4.2.3 若 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，则下述条件相互等价：

(1) 对于每一 $A\subset X$ 有 $\overline{A}^G\subset\overline{A}$。

(2) X 的每一闭集是 G 闭集。

(3) 对于每一 $A\subset X$， 若 $x\in s(A)\cap c_G(X)$，则 $G(x)=\overline{x}$。

证 (1)$\Rightarrow$(3) 对于每一 $A\subset X$，设 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in s(A)\cap c_G(X)$。记 $l=G(x)$。不妨设对每一 $n\in\mathbb{N}$，$l\neq x_n$。对每一 $m\in\mathbb{N}$，由条件(1)，$l\in\overline{\{x_n:n\in\mathbb{N}\}}^G\subset\overline{\{x_n:n\in\mathbb{N}\}}=\{x_n:n\leq m\}\cup\overline{\{x_n:n\geq m\}}$。于是 $l\in\overline{\{x_n:n>m\}}$，即 $l\in\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n:n\geq m\}}$，所以 l 是序列 x 在 X 中的聚点，从而 $G(x)=\overline{x}$。

(3)$\Rightarrow$(2) 设 A 是 X 的闭集。若 $l\in\overline{A}^G$，则存在 $x\in s(A)\cap c_G(X)$ 使得 $G(x)=l$。由条件(3)，$G(x)\in\overline{x}\subset\overline{A}=A$。因此，$\overline{A}^G\subset A$，即 A 是 X 的 G 闭集。

(2)$\Rightarrow$(1) 若 X 的每一闭集是 G 闭集，对于每一 $A\subset X$，因为 $\overline{A}$ 是 X 的闭集，所以 $\overline{A}$ 是 X 的 G 闭集，即 $\overline{(\overline{A})}^G\subset\overline{A}$。又因为 $A\subset\overline{A}$，则 $\overline{A}^G\subset\overline{(\overline{A})}^G$，从而 $\overline{A}^G\subset\overline{A}$。

对于统计收敛性，Di Miao 和 Kocinac 在拓扑空间中引入了统计 Fréchet-Urysohn 空间[14]。我们引入下述更一般的概念。

定义 4.2.4 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法。X 称为 G-Fréchet-Urysohn 空间，若对 X 的任意子集 A 有 $\overline{A}\subset\overline{A}^G$，即若 $l\in\overline{A}$，则存在 $x\in s(A)$，使得 $G(x)=l$。

本节的主要结果如下：

定理 4.2.5 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，则下述条件等价：

(1) 对于每一 $A\subset X$ 有 $\overline{A}=\overline{A}^G$。

(2) X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间且 X 的子集 A 是 X 的 G 闭集当且仅当 A 是 X 的闭集。

(3) X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间且若 A 是 X 的闭集，则 A 是 X 的 G 闭集。

(4) X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间且对于每一 $A \subset X$，若 $x \in s(A) \cap c_G(X)$，则 $G(x) = \overline{x}$。

证 由引理 4.2.2 得 $(1) \Rightarrow (2)$。$(2) \Rightarrow (3)$ 是显然的。由引理 4.2.3 得 $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$。

结合引理 4.2.1，有下述推论。

推论 4.2.6 设 G 是拓扑空间 X 上的子序列方法，则 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间当且仅当对于每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A} = \overline{A}^G$。

例 4.2.7 G 方法与 G 闭包。

(1) 存在拓扑空间 X 上非正则 G 的方法使得 X 的每一 G 闭集是闭集。

让 X 是全体整数的集合，赋予 X 离散拓扑。令 $c_G(X) = s(X)$，定义 $G: c_G(X) \to X$ 为 $G(x) = 0$，$\forall x \in c_G(X)$，则 G 是 X 上的一种方法。由于 X 是离散空间，于是 X 的每一 G 闭集是闭集。虽然 $c(X) \subset c_G(X)$，但是 G 不是 X 上的 G 正则方法，甚至不满足：$X = \overline{X}^G$。事实上，$\overline{X}^G = \{0\}$。

(2) 存在拓扑空间 X 上非子序列的方法 G 使得对于每一 $A \subset X$，有 $\overline{A}^G \subset \overline{A}^{seq}$。

让 X 是任意非离散的第一可数的拓扑空间。在 X 上定义方法 $G: s(X) \to X$ 满足 $G(x) = x_1$，$\forall x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in s(X)$。对于每一 $A \subset X$，$\overline{A}^G = A \subset \overline{A}^{seq}$。这时，$G$ 不是 X 上的子序列方法，所以引理 4.2.1(2) 之逆命题不成。

例 4.2.8 闭包，序列闭包与 G 闭包。

(1) 两个 G 闭集的并不是 G 闭集。

Connor 和 Grosse-Erdmann[21] 给出下述例子。实数集 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑。取 $c_G(\mathbb{R}) = \left\{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in s(\mathbb{R}) : \{x_n + x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \in c(\mathbb{R})\right\}$。定义 $G: c_G(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为 $G(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$，$\forall x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_G(\mathbb{R})$。则 G 是 $\mathbb{R}$ 上的正则方法。

让 $A=\{0\}$，$B=\{1\}$，则 $\overline{A}^G=\{0\}$ ，$\overline{B}^G=\{1\}$ ，$\overline{A\cup B}^G=\{0,\frac{1}{2},1\}$，于是 A，B 都是 $\mathbb{R}$ 的 G 闭集，但是 $A\cup B=\{0,1\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 的 G 闭集。事实上，$\overline{(\overline{A\cup B}^G)}^G=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$。

容易直接验证：设 G 是拓扑空间 X 上的任意一种方法，则 X 上任意个 G 闭集的交仍是 X 的 G 闭集。

(2) 闭集不是 G 闭集。

在上述(1) 中，$A\cup B=\{0,1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭集，但是 $A\cup B$ 不是 $\mathbb{R}$ 的 G 闭集。这表明 G 不是 $\mathbb{R}$ 上的子序列方法，且 $\overline{A\cup B}^G\not\subset\overline{A\cup B}$。

(3) G 闭集不是闭集。

拓扑空间及其上的方法如例 4.2.7(2)，则对于每一 $A\subset X$，$\overline{A}^G=A$，于是 A 是 X 的 G 闭集，但是不能保证 A 是 X 的闭集。

(4) G 闭集与序列闭集互不蕴涵。

由于在第一可数空间中闭集与序列闭集是一致的，所以上述(1), (3) 之例也说明：G 闭集与序列闭集互不蕴涵。

4.3 G 序列空间与 G-Fréchet-Urysohn 空间

在拓扑空间中，由收敛序列确定了两类重要的空间[25]：序列空间与 Fréchet-Urysohn 空间。对于统计收敛性，Di Miao 和 Kocinac[14]在拓扑空间中引入了统计序列空间。

定义 4.3.1 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法。X 称为 G 序列空间，若对 X 的任意非闭子集 A，存在 A 中的序列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $l\in X\setminus A$ 使得 $G(x)=l$。

用 G 开集及 G 邻域的概念，有助于加深对 G 序列空间及 G-Fréchet-Urysohn 空间的认识。

定义 4.3.2 设 X 是拓扑空间，G 是 X 上的一种方法。

(1) X 的子集 A 称为 X 的序列开集[18]（或 G 开集[24]），若 $X\setminus A$ 是 X 的序列闭集（或 G 闭集）。

(2) 对于 $x\in X$，X的子集 A 称为 x 的 G 邻域，若存在 G 开集 U 使得 $x\in U\subset A$。

注 1) 上述 (2) 是按 Mucuk 和 Sahan[24] 在第一可数的拓扑群中给出的“G 邻域”

的定义方式定义的。若取 G 为拓扑空间的通常收敛方法，则由此定义的“G 邻域”不同于拓扑空间中按下述方式定义的“序列邻域”概念。设 X 是一个拓扑空间且 $x\in X$，X 的子集 A 称为 x 在 X 中的序列邻域[34]，若 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x_n:n>m\}\subset A$。这时，未必存在 X 的序列开集 U 使得 $x\in U\subset A$。考虑 Arens’空间 S_2[25]。令 $X=\{0\}\cup\bigcup_{i\in\mathbb{N}}X_i$，其中每一 $X_i=\left\{1/i\right\}\cup\left\{1/i+1/k:k\in\mathbb{N},k\geq i^2\right\}$。集 X 赋予下述拓扑:(1) 形如 $1/i+1/j$ 的点是孤立点；(2) 点 $1/i$ 的邻域基元形如 $\left\{1/i\right\}\cup\left\{1/i+1/k:k\geq j\right\}$，其中 $j\geq i^2$；点 0 的邻域基元由 X 删除有限个集 X_i，同时在每一个剩余的集 X_i 中再删除掉有限个点。取 $A=\{0\}\cup\left\{1/i:i\in\mathbb{N}\right\}$ 则 A 是点 0 的序列邻域，但是不存在 X 中的序列开集 U 使得 $0\in U\subset A$。

2) 通过 G 开集可以定义“G 内部”[24]：设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，X 的子集 A 的 G 内部 $\mathring{A}^G$ 是 A 所包含的最大的 G 开集。对于拓扑空间 X 及其子集 A，与第 4.2 节的讨论相类似，可以获得 A 的内部 $\mathring{A}$ 与 A 的 G 内部 $\mathring{A}^G$ 之间的相互关系，同时也可以在第 4.4 节的讨论中用 G 内部来研究 G 连续性。本文不叙述关于 G 内部的相关工作。

本节讨论 G 序列空间及 G-Fréchet-Urysohn 空间的刻画及遗传性，为后续探讨 G 连续性做准备。

定理 4.3.3 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，则下述等价：

(1) X 是 G 序列空间。

(2) X 中任意 G 闭集是闭集。

(3) X 中任意 G 开集是开集。

(4) X 中任意点的 G 邻域是该点的邻域。

证 显然，$(2)\Leftrightarrow(3)$。为完成定理证明，下面只需说明 $(1)\Leftrightarrow(2)$ 和 $(3)\Leftrightarrow(4)$。

$(1)\Rightarrow(2)$ 设 F 是 X 中的 G 闭集，下证 F 是 X 中的闭集。若不然，由于 X 是 G 序列空间，则存在 $l\in X\setminus F$ 和 F 中的序列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $G(x)=l$。而 F 是 G 闭集，则 $\overline{F}^G\subset F$，于是 $l\in F$ 矛盾。从而 F 是 X 的闭集。

$(2)\Rightarrow(1)$ 取 X 中非闭子集 A，由条件(2) 知 A 不是 X 的 G 闭集，即 $\overline{A}^G \not\subset A$， 所以存在 $l\in X\setminus A$ 和 A 中的序列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $G(x)=l$。从而 X 是 G 序列空间。

$(3)\Rightarrow(4)$ 取 $x\in X$，若 A 是 x 的 G 邻域，则存在 X 的 G 开集 U 使得 $x\in U\subset A$。由条件(3)，U 是 X 的开集，从而 A 是点 x 的邻域。

$(4)\Rightarrow(3)$ A 是空间 X 的 G 开集，则 A 是其中每一点的 G 邻域，由条件(4)，于是 A 是其中每一点的邻域，从而 A 是 X 的开集。

推论 4.3.4 G-Fréchet-Urysohn 空间是 G 序列空间。

证 设拓扑空间 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间。如果 A 是 X 的 G 闭集，则 $\overline{A}\subset\overline{A}^G\subset A$，于是 A 是 X 的闭集。由定理 4.3.3，X 是 G 序列空间。

由于序列空间严格弱于 Fréchet-Urysohn 空间且收敛是 G 收敛的特例，所以 G 序列空间严格弱于 G-Fréchet-Urysohn 空间。

由引理 4.2.1 和定理 4.3.3 或定义 4.3.2，有下述推论。

推论 4.3.5 设 G 是拓扑空间 X 上的正则方法。

(1) 若 X 是序列空间，则 X 是 G 序列空间.

(2) 若 X 是 Fréchet-Urysohn 空间，则 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间。

对于例 4.2.7(2)，取 X 是具有通常拓扑的实空间，则 X 是第一可数空间，但 X 不是 G 序列空间。这表明推论 4.3.5 中正则方法的假设不可省略。

下面讨论 G-Fréchet-Urysohn 空间的刻画。先描述如何从拓扑空间 X 上的一种方法诱导出 X 的任意子空间上的一种方法。设 $G:c_G(X)\to X$ 是拓扑空间 X 上的一种方法。对于 $Y\subset X$，让

$$c_G(X\mid Y)=\{x\in s(Y)\cap c_G(X):G(x)\in Y\}$$

定义 $G|_Y:c_G(X\mid Y)\to Y$ 为 $G|_Y(x)\to G(x)$，$\forall x\in c_G(X\mid Y)$，则 $G|_Y$ 是子空间 Y 上的一种方法。

定义 4.3.6 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法。对于 $Y\subset X$，$G|_Y:c_G(X\mid Y)\to Y$ 称为空间 X 的子空间 Y 上关于 G 的子方法，或称为由 G 诱导

的子空间 Y 上的方法。

若 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，如未特别说明，X 的子空间 Y 上的方法均指关于 G 的子方法 $G|_Y$。

引理 4.3.7 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法。若 Y 是 X 的子空间，则对于每一 $A \subset Y$ 有 $\overline{A}^{G|_Y} = \overline{A}^G \cap Y$。

证 如果 $l \in \overline{A}^{G|_Y}$，则存在 $x \in c_G(X \mid Y)$ 使得 $G(x) = l$，于是 $l \in \overline{A}^G \cap Y$。另一方面，如果 $l \in \overline{A}^G \cap Y$，则存在 $x \in c_G(X) \cap s(Y)$ 使得 $G(x) = l \in Y$，从而 $x \in c_G(X \mid Y)$，于是 $l = G|_Y(x) \in \overline{A}^{G|_Y}$。

显然，$G|_Y(c_G(X|Y)) = \overline{Y}^G \cap Y$，于是 $c_G(X|Y) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\overline{Y}^G \cap Y \neq \varnothing$。让 $G: c_G(X) \to X$ 是例 4.2.7(1) 定义的离散拓扑空间 X 上的方法。令 $Y = X \setminus \{0\}$，则 $\overline{Y}^G = \{0\}$，于是 $c_G(X|Y) = \varnothing$。

由于序列空间的子空间未必是序列空间[18]，所以 G 序列空间的子空间一般说来不必仍是 G 序列空间。

定理 4.3.8 G 序列空间的每个 G 闭子集是 G 序列空间。

证 设 G 是 G 序列空间 X 上的方法，Y 是 X 的 G 闭子集。下证子空间 Y 关于方法 $G|_Y$ 是 G 序列空间。任取 Y 的非闭子集 A，则 A 不闭于 X。因为 X 是 G 序列空间，则存在 $l \in X \setminus A$ 和 $x \in s(A)$ 使得序列 $G(x) = l$。由 Y 是 X 的 G 闭集，所以 $\overline{Y}^G \subset Y$，从而 $x \in c_G(X \mid Y)$ 且 $G|_Y(x) = l \in Y \setminus A$。因此，$Y$ 是 G 序列空间。

定理 4.3.9 设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，则下述条件相互等价：

(1) X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间。

(2) X 的任意子空间是 G-Fréchet-Urysohn 空间。

(3) X 的任意子空间是 G 序列空间且对于每一 $A \subset X$ 有 $A \subset \overline{A}^G$。

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 Y 是 X 的任意子空间。对于每一 $A \subset Y$，因为 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间，由定义 4.2.4 和引理 4.3.7，$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y \subset \overline{A}^G \cap Y = \overline{A}^{G|_Y}$，所以 Y 关于子方法 $G|_Y$ 是

G-Fréchet-Urysohn 空间。

$(2)\Rightarrow(3)$ 由推论 4.3.4，只需证明对于每一 $A\subset X$ 有 $A\subset\overline{A}^{G}$。因为 A 关于子方法 $G|_{A}$ 是 G-Fréchet-Urysohn 空间，由引理 4.3.7，所以 $A=\mathrm{cl}_{A}(A)\subset\overline{A}^{G|_{A}}=\overline{A}^{G}\cap A\subset\overline{A}^{G}$。

$(3)\Rightarrow(1)$ 设 $A\subset X$ 且 $l\in\overline{A}$。若 $l\in A$，由于 $A\subset\overline{A}^{G}$，则 $l\in\overline{A}^{G}$。若 $l\notin A$，令 $Y=\{l\}\cup A$，则 A 不是子空间 Y 的闭子集。因为 Y 关于 $G|_{Y}$ 是 G 序列空间，所以存在 $y\in Y\setminus A=\{l\}$ 及 $x\in s(A)$ 使得序列 $G|_{Y}(x)=y$，于是 $l\in\overline{A}$。这表明 $\overline{A}\subset\overline{A}^{G}$，故 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间。

注 (1) 由于拓扑空间 X 上的正则方法 G 满足对于每一 $A\subset X$ 有 $A\subset\overline{A}^{G}$，所以这时 X 是 G-Fréchet-Urysohn 空间当且仅当 X 的任意子空间是 G 序列空间。因而，定理 4.3.9 统一了 Fréchet-Urysohn 空间及统计 Fréchet-Urysohn 空间的遗传性结果[18,16]。

(2) 每一子空间是 G 序列空间的空间未必是 G-Fréchet-Urysohnt 空间。在例 4.2.7(1) 中，由于 X 的每一子空间具有离散拓扑，所以 X 的每一子空间是 G 序列空间。因为 $X\not\subset\overline{X}^{G}$，所以 X 不是 G-Fréchet-Urysohn 空间。

4.4 G连续映射

Cakalli[22] 依下述方式定义了 G 连续性：设 G 是拓扑群 X 上的一种方法，映射 $f:X\to Y$ 称为 G 连续的，如果对于每一 $x\in c_{G}(X)$ 有 $f(x)\in c_{G}(Y)$ 且 $G(f(x))=f(G(x))$。上述映射是群上的自映射。由于连续映射及序列连续映射一般都是从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射，我们引入下述更一般的 G 连续性。

定义 4.4.1 设 G_1，G_2 分别是拓扑空间 X 与 Y 上的方法，映射 $f:X\to Y$ 称为(G_1，G_2)连续的，若对于每一 $x\in c_{G_1}(X)$ 有 $f(x)\in c_{G_2}(Y)$ 且 $G_2(f(x))=f(G_1(x))$。当 G_1， G_2 是同一方法 G 时，(G_1， G_2)连续简称为 G 连续。

我们也可以先定义在一点处的（G_1，G_2）连续性，然后再定义子集或整个空间上的（G_1， G_2）连续性。Connor，Grosse-Erdmann[21] 和 Mucuk，Sahan[24] 就分别在实空间及

第一可数的拓扑群中考虑了在一点处的G连续性。

Mucuk，Sahan[24] 在第一可数的拓扑群中证明了下述引理，其实他们在拓扑空间中仍成立，证明也是类似的，在此不再复述。

引理 4.4.2 设G是拓扑空间X上的一种方法。

(1) X上任意个G开集的并是G开集。

(2) 设$A\subset X$，则A是X的G开集当且仅当对于任意的$a\in A$，A是a的G邻域。

引理 4.4.3 设G_1，G_2分别是拓扑空间X与Y上的方法。若映射$f:X\to Y$，则下述等价：

(1) 对Y的任意G_2闭集F，$f^{-1}(F)$是X的G_1闭集；

(2) 对Y的任意G_2开集W，$f^{-1}(W)$是X的G_1开集；

(3) 任意$x\in X$，若U是$f(x)$的G_2邻域，则存在x的G_1邻域V，使得$f(V)\subset U$。

证 显然 $(1)\Leftrightarrow(2)$ 为完成定理的证明，下面说明 $(2)\Leftrightarrow(3)$。

$(2)\Rightarrow(3)$ 任意$x\in X$，若U是$f(x)$的G_2邻域，则存在G_2开集A，使得$f(x)\in A\subset U$，从而$x\in f^{-1}(A)\subset f^{-1}(U)$。由$f:X\to Y$满足条件(2)知$f^{-1}(A)$是$X$的$G_1$开集，从而$f^{-1}(A)$是$x$的$G_1$邻域，且$f(f^{-1}(A))\subset U$。

$(3)\Rightarrow(2)$ 任取Y的G_2开集W，下证$f^{-1}(W)$是X的G_1开集。任意$x\in f^{-1}(W)$，则$f(x)\in W$，从而W是$f(x)$的G_2邻域。由$f:X\to Y$满足条件(3)，存在x的G_1邻域V，使得$f(V)\subset W$。从而存在G_1开集U，使得$x\in U\subset V$，于是$x\in U\subset f^{-1}(W)$，因此$f^{-1}(W)$是x的G_1邻域，由引理 4.4.2 知$f^{-1}(W)$是X的G_1开集。

定理 4.4.4 设G_1，G_2分别是拓扑空间X与Y上的方法。若映射$f:X\to Y$，则下述条件有蕴涵关系 $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$ 成立：

(1) f是（G_1，G_2）连续映射。

(2) 对X的任意子集A，$f(\overline{A}^{G_1})\subset\overline{f(A)}^{G_2}$。

(3) 对 Y 的任意 G_2 闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是 X 的 G_1 闭集。

证 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $A \subset X$。若 $l \in \overline{A}^{G_1}$，则存在 $x \in s(A) \cap c_{G_1}(X)$ 使得 $G_1(x) = l$。由条件(1)，$f(x) \in s(f(A)) \cap c_{G_2}(Y)$ 且 $G_2(f(x)) = f(G_1(x))$，于是 $f(l) \in \overline{f(A)}^{G_2}$。故，$f(\overline{A}^{G_1}) \subset \overline{f(A)}^{G_2}$。

(2)$\Rightarrow$(3) 设 F 是 Y 的 G_2 闭集。令 $A = f^{-1}(F)$，则 $f(A) \subset F$。由条件(2)，$f(\overline{A}^{G_1}) \subset \overline{f(A)}^{G_2} \subset \overline{F}^{G_2} \subset F$，从而 $\overline{A}^{G_1} \subset f^{-1}(F) = A$，即 $f^{-1}(F)$ 是 X 的 G_1 闭集。

例 4.4.5 连续性与 G 连续性。

(1) 满足定理 4.4.4 条件 (3)，但不满足定理 4.4.4 条件 (2) 的连续映射。

让 X 是全体整数的集合 $\mathbb{Z}$，赋予离散拓扑。取 $c_{G_1}(X) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in s(X)$: 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_n - x_{n-1}\}_{n \geq m}$ 是常值序列$\}$。定义 $G_1 : c_{G_1}(X) \to X$ 为 $G_1(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n$，$\forall\, x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_{G_1}(X)$。则 G_1 是 X 上的一种方法。让 $Y = \{0,1\}$ 是 X 的子空间且赋予 G_1 的子方法 $G_1|_Y$，记 $G_2 = G_1|_Y$。定义 $f : X \to Y$ 如下：$f(x) = 0$ 当且仅当 $x = 2k$，$\forall\, k \in \mathbb{N}$。由于 X 赋予离散拓扑，所以 $f : X \to Y$ 是连续映射。

若 F 是 Y 的 G_2 闭集，则 F 为 $\{0\}$ 或 Y。易验证：$f^{-1}(F)$ 是 X 的 G_1 闭集。

由于 $\mathbb{N} \subset X$，易验证: $1 \in \overline{\mathbb{N}}^{G_1}$，$\overline{f(\mathbb{N})}^{G_2} = \{0\}$ 于是 $f\left(\overline{\mathbb{N}}^{G_1}\right) \not\subset \overline{f(\mathbb{N})}^{G_2}$。上述 G_1 不是 X 上的正则方法。下面给出一正则方法的例子。实空间 $\mathbb{R}$ 上的方法 G 如例 4.2.8(1)，则 G 是 $\mathbb{R}$ 上的正则方法。定义 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$，则 f 连续。由于 $\mathbb{R}$ 中序列闭集与闭集是一致的，所以 f 满足定理 4.4.4 条件(3)。令 $A = \{-1,1\}$，则 $\overline{A}^{G} = \{-1,0,1\}$，于是 $f(\overline{A}^{G}) = \{0,1\} \not\subset \{1\} = \overline{f(A)}^{G}$，所以 f 不满足定理 4.4.4 条件(2)。

(2) 满足定理 4.4.4 条件 (2)，但不满足定理 4.4.4 条件 (1) 的同胚映射。

拓扑空间 X 及其上的方法 G_1 如例 4.2.7(1)。拓扑空间 Y 及其上的方法 G_2 如例 4.4.5(1)

中的 X 及 G_1。让 $f:X\to Y$ 是恒等映射，则 f 是同胚映射。对于每一非空的 $A\subset\mathbb{Z}$，$\overline{A}^{G_1}=\{0\}\subset\overline{A}^{G_2}$，即 $f(\overline{A}^{G_1})\subset\overline{f(A)}^{G_2}$。取 $x=\{1,1,2,3,5,8\}$ 是斐波那契数列，则 $x\in c_{G_1}(X)$，但是 $f(x)\notin c_{G_2}(Y)$，所以 f 不是（G_1，G_2）连续映射。

(3) 非序列连续的（G_1，G_2）连续映射。

让 X 是全体实数的集合 $\mathbb{R}$，赋予通常的拓扑。再让 Y 是集合 $\mathbb{R}$ 赋予离散拓扑。定义 $f:X\to Y$ 是恒等映射，则 f 不是序列连续映射。取 G 是集 $\mathbb{R}$ 上的任意一种方法，则 f 总是（G，G）连续映射。

Connor 和 Grosse-Erdmann[21]提出问题：是否存在 $\mathbb{R}$ 上的正则方法 G 及 G 连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 f 不是连续函数？

序列连续性有较好的刻画。

引理 4.4.6[31] 设 X，Y 都是拓扑空间。若映射 $f:X\to Y$，那么 f 序列连续当且仅当若 F 是 Y 的序列闭集，则 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集。

由引理 4.2.1，定理 4.4.4 及引理 4.4.6，有下述推论。

推论 4.4.7 设 G_1，G_2 分别是拓扑空间 X 与 Y 上的子序列的正则方法。若 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续映射, 则 f 是序列连续映射。

进而，有下述推论。

推论 4.4.8 设 G_1，G_2 分别是拓扑空间 X 与 Y 上的子序列的正则方法且 X 是 G_1 序列空间。若 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续映射，则 f 是连续映射。

下面进一步说明在一定条件下, 推论 4.4.7 中的子序列方法也是必要的。

设 G 是拓扑空间 X 上的一种方法，称 G 满足共尾条件，若 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in c_G(X)$，$y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in s(X)$ 且存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $n>m$ 时有 $x_n=y_n$，则 $y\in c_G(X)$ 且 $G(x)=G(y)$。按本文第一部分的介绍，若 G 是拓扑群 X 上在 Cakalli 意义下的一个正则方法，则 G 满足共尾条件。事实上，设

$x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in c_G(X)$，$y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in s(X)$ 且存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $n>m$ 时有 $x_n=y_n$，那么 $\lim\left(x\cdot y^{-1}\right)=e$（群 X 的单位元）。由于 G 是正则方法，于是 $x\cdot y^{-1}\in c_G(X)$ 且 $G\left(x\cdot y^{-1}\right)=e$。因为 $c_G(X)$ 是一个群，所以 $y=\left(x^{-1}\left(x\cdot y^{-1}\right)\right)^{-1}\in c_G(X)$。又因为 G 是同态，于是 $G(x)=G(y)$。

引理 4.4.9 设 G 是第一可数的拓扑空间 X 上的满足共尾条件的一种方法，则 G 是 X 上的子序列方法当且仅当对于每一 $A\subset X$ 有 $\overline{A}^G\subset\overline{A}$。

证 对于每一 $A\subset X$，G 是 X 上的子序列方法，由引理 4.2.1，有 $\overline{A}^G\subset\overline{A}^{seq}\subset\overline{A}$。

反之，设对于每一 $A\subset X$ 有 $\overline{A}^G\subset\overline{A}$。让 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in c_G(X)$ 且 $G(x)=l\in X$。如果 U 是 l 在 X 中的开邻域，则 U 中必含有序列 x 中的无限项。否则，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $U\cap\{x_n:n>m\}=\varnothing$。令 $A=\{x_n:n>m\}$，则 $U\cap\overline{A}=\varnothing$，于是 $l\notin\overline{A}$。另一方面，令 $y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中当 $n\leq m$ 时 $y_n=x_{m+1}$；当 $n>m$ 时 $y_n=x_n$。由于 G 满足共尾条件，于是 $y\in c_G(X)$ 且 $G(x)=G(y)\in\overline{A}^G\subset\overline{A}$，从而 $l\in\overline{A}$，矛盾。

因为 X 是第一可数空间，让 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 l 在 X 中递减的开邻域基。这时，每一 U_i 中含有序列 x 中的无限项，于是存在 x 的子序列 $x'=\left\{x_{n_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_{n_i}\in U_i$，从而序列 x' 收敛于 l。故，G 是 X 上的子序列方法。

例 4.2.7(2)表明在引理 4.4.9 中 G 的共尾性不可省略。

定理 4.4.10 设 G 是第一可数的完全正则空间 X 上的满足共尾条件的一种方法。如果每一连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 是 $(G,G_{\mathbb{R}})$ 连续，其中 $G_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的某一正则方法，则 G 是 X 上的子序列方法。

证 如果 G 不是 X 上的子序列方法，由引理 4.4.9，存在 X 的子集 A 使得 $\overline{A}^G\not\subset\overline{A}$。取定 $l\in\overline{A}^G\setminus\overline{A}$。由 X 的完全正则性，存在连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 使得 $f(l)=0$ 且 $f(\overline{A})=\{1\}$。由于 $l\in\overline{A}^G$，存在 $x\in s(A)\cap c_G(X)$，则 $G(x)=l$。由条件，f 是

$(G,G_{\mathbb{R}})$ 连续，于是 $G\left(f\left(x\right)\right)=f\left(G_{\mathbb{R}}\left(x\right)\right)=1\neq 0=f\left(l\right)$，矛盾。故，$G$ 是 X 上的子序列方法。

本节最后给出两个映射保持 G 序列空间与 G–Fréchet-Urysohn 空间的结果。

定理 4.4.11 设 G_1，G_2 分别是拓扑空间 X 与 Y 上的方法且映射 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续的商映射。若 X 是 G_1 序列空间，则 Y 是 G_2 序列空间。

证 任取 Y 中 G_2 开集 U，因为 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续映射，由定理 4.4.4 和引理 4.4.3，$f^{-1}(U)$ 是 X 的 G_1 开集。而 X 是 G_1 序列空间，由定理 4.3.3 知 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集。又因为 $f:X\to Y$ 是商映射，所以 U 是 Y 的开集。再由定理 4.3.3，Y 是 G_2 序列空间。

定理 4.4.12 设 G_1，G_2 分别是拓扑空间 X 与 Y 上的方法且映射 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续的伪开映射。若 X 是 G_1–Fréchet-Urysohn 空间，则 Y 是 G_2–Fréchet-Urysohn 空间。

证 对于 $A\subset Y$，若 $y\in\overline{A}$，则 $f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}\neq\varnothing$。事实上，如果 $f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}=\varnothing$，即 $f^{-1}(y)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}$，由于 $f:X\to Y$ 是伪开映射，则 $y\in[f(X\setminus\overline{f^{-1}(A)})]^{\circ}\subset[f(X\setminus f^{-1}(A))]^{\circ}=(Y\setminus A)^{\circ}=Y\setminus\overline{A}$，矛盾。故存在 $l\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}$。因为 X 是 G_1–Fréchet-Urysohn 空间，所以 $\overline{f^{-1}(A)}\subset\overline{f^{-1}(A)}^{G_1}$，于是存在 $x\in s\left(f^{-1}\left(A\right)\right)\cap c_{G_1}\left(X\right)$ 使得 $G_1\left(x\right)=l$。又因为 $f:X\to Y$ 是（G_1，G_2）连续映射，所以 $f\left(x\right)\in s\left(A\right)\cap c_{G_2}\left(Y\right)$ 且 $G_2\left(f\left(x\right)\right)=f\left(G_1\left(x\right)\right)=y$，于是 $y\in\overline{A}^{G_2}$。因此，$\overline{A}\subset\overline{A}^{G_2}$。从而 Y 是 G_2–Fréchet-Urysohn 空间。

第 5 章 总结与展望

本文将一般拓扑学中的序列收敛方法拓展成更为一般的“收敛方法”。引入了序列紧空间的统计定义并讨论了其相应的拓扑性质，讨论了统计序列空间的性质以及相关映射在统计意义下的关系，引入了一般拓扑空间的 G 方法，建立了连续性与 G 连续性的关系，拓展了第一可数的 T_2 拓扑群中 G 方法的一些相关结果。

本文较一般拓扑学中原有的结果而言更具一般性。但是，在此基础上仍有一些问题值得我们去深入研究：

第一，统计意义下的可数紧空间怎样定义？

第二，开集与开邻域在序列空间的研究中有着十分重要的作用。本文中 G 开集是用 G 闭集的补集定义的。因此，G 开集与 G 邻域自身的性质还有待研究。

第三，为了一般拓扑空间中 G 方法的研究更加完善，G 方法意义下的导集，边缘等也是不容忽视的研究内容。

参考文献

[1] Zygmund A. Trigonometric Series[M]. 2^{th} ed. Cambridge Univ Press, Cambridge: 1959.

[2] Fast H. Sur la convergence statistique[J]. Colloq Math, 1951, 2(3-4): 241–244.

[3] Steinhaus H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloq Math, 1951, 2(1): 73–74.

[4] Connor J. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences[J]. Analysis, 1988, 8(1-2): 47–63.

[5] Connor J. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets ad statistical convergence[J]. Proc Amer Math Soc, 1992, 115(2): 319–327.

[6] Fridy J A. On statistical convergence[J]. Analysis, 1985, 5(4): 301–313.

[7] Fridy J A. Statistical limit points[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 118(4): 1187–1192.

[8] Fridy J A, Khan M K. Tauberian theorems via statistical convergence[J]. Math Anal Appl, 1998, 228(1): 73-95.

[9] Miller H I. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence[J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347(5): 1811–1819.

[10] Cakalli H. Lacunary statistical convergence in topological groups[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, 26(2): 113-119.

[11] Cakalli H. On statistical convergence in topological groups[J]. Pure Appl Math Sci, 1996, 43 (1-2): 27-31.

[12] Cakalli H. A study on statistical convergence[J]. Funct Anal Approx Comput, 2009, 1(2): 19-24.

[13] Kostyrko P, Macaj M, Salát T, Strauch O. On statistical limit points[J]. Proc Amer Math Soc., 2001, 129(9): 2647-2654.

[14] Di Maio G, D R Kocinac Lj. Statistical convergence in topology[J]. Toplogy Appl, 2008, 156(1): 28-45.

[15] 程立新，蓝永艺，林国琛，等．统计收敛的测度理论[J]．中国科学，2008, 38(4): 450-468.

[16] Tang Z B, Lin F C. Statistical versions of sequential and Fréchet–Urysohn spaces[J]. Adv Math(China), 2015, 44(6): 945-954.

[17] Li K D,Lin S, Ge Y. On statistical convergence in cone metric spaces[J]. Topology Appl, 2015, 196:

641-651.

[18] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice[J]. Fund Math, 1965, 57(1): 107-115.

[19] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl, 1971, 1(2): 143-154.

[20] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京：科学出版社, 2002.

[21] Connor J, Grosse-Erdmann K. Sequential definitions of continuity for real functions[J]. Rocky Mountain J Math, 2003, 33(1): 93-122.

[22] Cakalli H. Sequential definitions of compactness[J]. Appl Math Lett, 2008, 21(6): 594-598.

[23] Cakalli H. On G-continuity[J]. Computers Math Appl, 2011, 61(2): 313-318.

[24] Mucuk O, Sahan T. On G-sequential continuity[J]. Faculty Sci Math, 2014, 28(6):1181-1189.

[25] Engelkig R. General Topology(revised ad completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[26] Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H L. A introduction to the Theory of Numbers[M]. 4th ed. New York: John Wiley, 1980.

[27] 高国士. 拓扑空间论[M]. 第二版. 北京：科学出版社，2008.

[28] Vaughan J E. Countably compact and sequentially compact spaces[J]. Kunen K, Vaughan J E eds, Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984, 569-602.

[29] Michael A E. A quintuple quotient quest[J]. General Topology Appl, 1972, 2(2): 91-138.

[30] Gruenhage G, Tanaka Y. Products of k-spaces and spaces of countable tightness[J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 273(1):299-308.

[31] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math J, 1976, 26(2): 174-182.

[32] 严力. 具有 Heine 性质空间的刻划[J]. 漳州师范学院，2003,16 (4): 6-8.

[33] Baron S. Sequential topologies. Amer Math Monthly, 1966, 73: 677--678.

[34] Foged L. Sequential coreflections of stratifiable spaces. Proc Amer Math Soc, 1984, 92(3): 470—472.

致 谢

在论文即将完成之际，我怀着感激之情向三年来一直帮助我、关心我的老师和朋友们表达我最真挚的谢意！首先感谢我的导师林寿教授，本学位论文从课题的选择到论文的撰写完成，林老师都给予了悉心的指导和亲切的关怀。林老师严肃的科学态度和严谨的治学精神，深深地感染和激励着我。他不仅在学业上给我以精心指导，还在思想和生活上给我以无微不至的关怀，在此谨向林老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

同时，感谢李克典教授这三年来对我学习生涯的鼓励与支持，还有林福财副教授，张静老师等拓扑讨论班的老师们，唐忠宝学长，他们在我写学术论文时给我提供了一系列可行性的建议。感谢蔡建平教授、陈跃辉副教授等领导及各位老师，在我研究生三年里，对我生活和学习上的关怀和帮助，却无以回报，谨此一并表达我的谢意。

感谢三年来在学习和生活上给我鼓励的同窗：李晓婷以及 13 级的所有好友，感谢你们给予我的友爱和帮助，你们的友谊为紧张的学习生活增添了许快乐。难忘我们几年来在一起共度的学习时光和课堂上的有益讨论。

感谢我的家人，给予我接受研究生教育的机会，以及在精神上和在物质上的支持。最后，向所有曾经给予我关心和指导的老师，给予我支持和帮助的同学及朋友再次表示我最真挚的谢意！

攻读学位期间取得的科研成果

1、刘丽，唐忠宝，林寿．统计序列空间及统计序列商映射[J]．高校应用数学学报．2015, 30(4): 485-493.

2、刘丽，唐忠宝，林寿．关于统计序列紧空间[J]，已被《数学的实践与认识》录用.

3、林寿，刘丽．G-methods, G-sequential spaces and G-sequential continuity in topological spaces [J]．已投《Topology ad its Applications》.