四川大学

博士学位论文

题 目 自由仿拓扑群的若干拓扑性质研究

作 者 蔡 长 勇 完成日期 2016 年 3 月 25 日

培 养 单 位 四川大学

指 导 教 师 林 寿 教授

专 业 基础数学

研 究 方 向 一 般 拓 扑 学

授予学位日期 年 月 日

摘　要

自由仿拓扑群的若干拓扑性质研究

基础数学专业

研究生　蔡长勇　　　**指导教师**　林寿

A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 在其学术专著《Topological Groups and Related Structures》中提出的一类公开问题是: 自由拓扑群的哪些结果能够推广到自由仿拓扑群 [8, 问题 7.4.4]? 本文围绕此问题开展工作, 研究自由仿拓扑群的若干拓扑性质: σ 空间、半层空间、k^* 可度量空间等几个广义度量空间性质; 局部紧性质; Fréchet 空间性质; 伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等, 一方面对上述问题进行部分回答; 另一方面改进和扩充了关于自由仿拓扑群研究的一些文献如 [23, 46, 47, 72] 等中的重要结果. 全文主要由四部分组成.

第一部分 (第二章) 研究自由仿拓扑群的几个广义度量性质, 获得了下列结果. 设 X 是次可度量空间, 那么 X 是 Ξ 空间当且仅当 $FP(X)$ 是 Ξ 空间 (定理 2.1.6). 特别地, 让 X 是次可度量空间, 那么 X 是 σ 空间当且仅当 $FP(X)$ 是 σ 空间当且仅当 $AP(X)$ 是 σ 空间 (推论 2.1.7); X 是半层空间当且仅当 $FP(X)$ 是半层空间当且仅当 $AP(X)$ 是半层空间 (推论 2.1.8). 这扩充了文 [72] 的结果: 次可度量性在取自由 (Abel) 仿拓扑群下是稳定的. 让 X 是 Hausdorff 的 k^* 可度量的 k 空间, 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, 从而 X 是 $\aleph_0'$ 空间 (定理 2.2.9). 这改进了文 [46] 关于可度量空间上的自由 Abel 仿拓扑群的可数 tightness 的相关结果. 设 X 是正则空间, 那么 $FP_2(X)$ 是第一可数空间当且仅当 $FP_2(X)$ 是可度量空间当且仅当 X 是度量空间且 X 的所有非孤立点之集是有限的; 类似断言对 Abel 情况成立 (定理 2.4.6).

第二部分 (第三章) 研究自由仿拓扑群的局部紧性. 直接通过拟伪度量构建拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基, 扩充了 A. Elfard 和 P. Nickolas 的一个结果: [23, 定理 3.1]. 证明了: 让 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 即 $X = Y \oplus D$, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(Y)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(X)$ 是局部紧空间当

且仅当 $AP_2(Y)$ 是局部紧空间 (定理 3.2.2, 推论 3.2.5). 特别地, 设 X 同胚于一 Hausdorff 紧空间与一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(X)$ 在单位元 e 是局部紧的 (推论 3.2.3). 这部分回答了文 [47] 提出的一个问题.

第三部分 (第四章) 研究自由仿拓扑群中一些特殊空间的拷贝. 证明了: 让 X 是完全正则空间, 且设 P 是具有 q 点的稠密自嵌入的质数空间, 那么 $AP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 $FP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 X 包含 P 的一拷贝 (推论 4.1.7), 这推广了文 [19] 中关于自由 (Abel) 拓扑群的相应结论. 设 X 是完全正则空间, 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 是 Fréchet 空间, 那么空间 X 是离散的 (推论 4.2.6), 这推广了文 [68] 关于自由 (Abel) 拓扑群的相应结论.

第四部分 (第五章) 研究自由仿拓扑群的 MP 等价性. 通过构造例子, 证明了两个拓扑同构的自由仿拓扑群使其基底非同胚的存在性 (定理 5.1.11). 证明了伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等是 MP 不变性质. 即, 设两个完全正则空间 X 和 Y 是 AP 等价的, 更一般地, MP 等价的, 如果 Y 是伪紧的, 那么 X 也是伪紧的 (定理 5.2.6), 这推广了 M. Graev [29] 关于自由拓扑群的相应结论. 让 X 和 Y 是 MP 等价的拓扑空间, 如果 X 是遗传 Lindelöf 空间, 那么 Y 也是遗传 Lindelöf 空间; 如果 X 是遗传可分空间, 那么 Y 也是遗传可分空间; 如果 X 是 cosmic 空间, 那么 Y 也是 cosmic 空间 (推论 5.2.12). 这拓展了 V. Pestov [70] 关于自由拓扑群的相关结果.

同时, 本文也提出了一些问题供进一步研究.

关键词: 自由仿拓扑群; 自由 Abel 仿拓扑群; 广义度量空间; 局部紧性; Fréchet 性; MP 等价性.

Abstract

A study on some topological properties of free paratopological groups

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: Cai Zhangyong **Supervisor:** Lin Shou

A large open problem, posed by A. Arhangel'skiĭ and M. Tkachenko in their monograph "Topological Groups and Related Structures", is which results of free topological groups can be generalized to free paratopological groups [8, Open Problem 7.4.4]. Around this problem, in this thesis, we mainly study some topological properties of free paratopological groups, for example, the property of being a σ-space, semi-stratifiable space or k^*-metrizable space; local compactness; the property of being a Fréchet space; pseudocompactness, hereditary Lindelöfness, hereditary separability and the property of being a cosmic space etc, at the same time, improve and complement many results on free paratopological groups in [23, 46, 47, 72] etc. This thesis is composed of four parts.

In the first part (Chapter 2), we study a few generalized metric properties of free paratopological groups. The following results are obtained. Suppose that X is a submetrizable space. Then X is a Ξ-space if and only if $FP(X)$ is a Ξ-space (Theorem 2.1.6). As an application, it is shown that X is a σ-space if and only if $FP(X)$ is a σ-space if and only if $AP(X)$ is a σ-space (Corollary 2.1.7); X is a semi-stratifiable space if and only if $FP(X)$ is a semi-stratifiable space if and only if $AP(X)$ is a semi-stratifiable space (Corollary 2.1.8). These complement a result in [72], i.e., submetrizability is stable with respect to taking free (Abelian) paratopological groups. If X is a Hausdorff k^*-metrizable k-space, and $FP(X)$ or $AP(X)$ has countable tightness, then the subspace X' consisting of all non-isolated points in X is ω_1-compact, and hence X is an $\aleph_0'$-space (Theorem 2.2.9). This improves a corresponding result in [46] about countable tightness of free Abelian paratopological groups over metric spaces. If X is a regular space, then $FP_2(X)$ is first-countable if and only if $FP_2(X)$ is metrizable if and only if X is metrizable and the set of all non-isolated points in X is finite if and only if $AP_2(X)$ is first-countable if and only if $AP_2(X)$ is metrizable if and only if $AP_n(X)$ is first-countable for every $n \in \mathbb{N}$ (Theorem 2.4.6).

In the second part (Chapter 3), we study local compactness of free paratopological groups. We directly construct a local base at the identity e in the subspace $FP_2(X)$ of free paraopological group $FP(X)$ on a topological space X by quasi-pseudometrics, which complements [23, Theorem 3.1], a result of A. Elfard and P. Nickolas. It is shown that if $X = Y \oplus D$ is the topological sum of a completely regular space Y and a discrete space D, then $FP_2(X)$ is locally compact if and only if $FP_2(Y)$ is locally compact if and only if $AP_2(X)$ is locally compact if and only if $AP_2(Y)$ is locally compact (Theorem 3.2.2, Corollary 3.2.5). Especially, if X is homeomorphic to the topological sum of a compact space and a discrete space, then $FP_2(X)$ is locally compact if and only if $FP_2(X)$ is locally compact at the identity e (Corollary 3.2.3). These partially answer a question in [47].

In the third part (Chapter 4), we study copies of special spaces in free paratopological groups. It is shown that if X is a completely regular space, and P is a densely self-embeddable prime space with a q-point, then $AP(X)$ contains a copy of P if and only if $FP(X)$ contains a copy of P if and only if X contains a copy of P (Corollayr 4.1.7). This generalizes a corresponding result in [19] on free (Abelian) topological groups. If X is a completely regular space, and $FP(X)$ or $AP(X)$ is a Fréchet space, then the space X is discrete (Corollary 4.2.6). This generalizes a corresponding result in [68] on free (Abelian) topological groups.

In the fourth part (Chapter 5), we study MP-equivalence of free paratopological groups, prove that there exist non-homeomorphic topological spaces X and Y such that $FP(X)$ and $FP(Y)$ are topologically isomorphic (Theorem 5.1.11). It is established that pseudocompactness, hereditary Lindelöfness, hereditary separability and the property of being a cosmic space are all MP-invariant. Namely, suppose two completely regular spaces X and Y are AP-equivalent, more generally, MP-equivalent, and Y is pseudocompact, then X is also pseudocompact (Theorem 5.2.6), which generalizes a corresponding result of M. Graev [29] on free topological groups. Let X and Y be MP-equivalent topological spaces. If X is hereditarily Lindelöf, then so is Y; if X is hereditarily separable, then so is Y; if X is a cosmic space, then so is Y (Corollary 5.2.12). This extends a corresponding result of V. Pestov [70] on free topological groups.

At the same time, some interesting questions on free paratopological groups are posed.

Key Words: Free paratopological groups; Free Abelian paratopological group-

s; Generalized metric spaces; Local compactness; The Fréchet properties; MP-equivalence.

引　言

"拓扑" 与 "代数" 的结合给一般拓扑学的发展壮大注入了勃勃生机, 形成了一般拓扑学的一个重要分支: 拓扑代数. 著名拓扑学家 A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 在 2008 年出版的学术专著《Topological Groups and Related Structures》[8] 就是国际上关于拓扑代数研究的杰作. 拓扑群与仿拓扑群是拓扑代数领域中的两个核心概念. 一个集合 G 称为一个拓扑群 [37, 77], 如果 G 是群, 又是拓扑空间，并且这两种结构是相容的, 即, 群的乘法运算 $\mu : G \times G \to G$ 和求逆运算 $\nu : G \to G$ 都是连续映射. 一个集合 G 称为一个仿拓扑群 [11], 如果 G 是群, 又是拓扑空间，并且群 G 的乘法运算是连续映射. 众所周知，仿拓扑群是拓扑群很好的推广 [8]. 一个经典之例: 全体实数集上的 Sorgenfrey 直线拓扑是仿拓扑群而不是拓扑群 [8]. 仿拓扑群逆运算连续性的缺失使得对其研究与对拓扑群的研究有着很大的不同, 较经典文献见 [8, 73, 74, 82] 等. 拓扑群的哪些结果能够改进到仿拓扑群上是拓扑代数工作者所关心的一类较大的问题, 见 [8, 73, 74, 82] 等.

1941 年, A. Markov 创造性地引进了自由拓扑群的概念 [56].

设 X 是拓扑群 G 的子空间, 假设集 X 代数生成 G, 即, $\langle X\rangle = G$; 且每一连续映射 $f : X \to H$ 能扩张到连续同态

$$\hat{f} : G \to H,$$

其中 H 是任一拓扑群. 那么, G 称为 X 上的 *Markov 自由拓扑群* (简称为, *自由拓扑群*), 记为 $F(X)$. 如果上面定义中的所有群是 Abel 群, 那么定义了 X 上的 *Markov 自由 Abel 拓扑群* (简称为, *自由 Abel 拓扑群*), 记为 $A(X)$. 对每一非负整数 n, $F_n(X)$ $(A_n(X))$ 表示 $F(X)$ $(A(X))$ 中关于自由基 X 的约简长度 $\le n$ 的所有元素组成的子空间.

自由拓扑群的成果相当丰富, 其也是拓扑代数构造反例及证明新定理的重要工具, 从而也在拓扑代数理论中占据核心位置 [8].

作为自由拓扑群的推广, 2002 年, S. Romaguera、M. Sanchis 和 M. Tkachenko 引进了任意拓扑空间上的自由仿拓扑群的概念, 并讨论了其几个拓扑性质 [76].

设 X 是仿拓扑群 G 的子空间, 假设集 X 代数生成 G, 即, $\langle X\rangle = G$; 且每一连续映射 $f : X \to H$ 能扩张到连续同态

$$\hat{f} : G \to H,$$

其中 H 是任一仿拓扑群. 那么, G 称为 X 上的 *Markov 自由仿拓扑群* (简称为, *自由仿拓扑群*), 记为 $FP(X)$. 如果上面定义中的所有群是 Abel 群, 则定义了 X 上的 *Markov 自由 Abel 仿拓扑群* (简称为, *自由 Abel 仿拓扑群*), 记为 $AP(X)$. 对每一非负整数 n, $FP_n(X)$ ($AP_n(X)$) 表示 $FP(X)$ ($AP(X)$) 中关于自由基 X 的约简长度 $\leq n$ 的所有元素组成的子空间.

S. Romaguera、M. Sanchis 和 M. Tkachenko 在 [76, 第2页] 和 [82, 第851页] 写到:"自由仿拓扑群在仿拓扑群理论中占有重要位置, 很可能是解决仿拓扑群理论中一些困难问题的工具". 2008 年, A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 在其学术专著 [8] 第七章专门讨论了自由拓扑群后, 本质上又提出下列一类公开问题.

问题 0.0.1 *[8, 问题 7.4.4] 自由拓扑群的哪些结果能够推广到自由仿拓扑群?*

围绕该问题, 一些拓扑代数工作者如 A. Elfard、P. Nickolas、N. Pyrch、O. Ravsky、S. Romaguera、M. Sanchis、M. Tkachenko、F. Lin, C. Liu, S. Lin 和 S. Cobzas 等人做了一些基础性和探索性的重要工作.

例如, J. Mack、S. Morris 和 E. Ordman [55] 证明了完全正则 k_ω 空间在取自由 (Abel) 拓扑群下是稳定的, 即, k_ω 空间上的自由 (Abel) 拓扑群仍是 k_ω 空间. N. Pyrch [71] 研究了自由仿拓群的 k_ω 空间性质, 证明了对一个函数 Hausdorff 空间 X, X 是可数 k_ω 空间当且仅当 X 上的自由 (Abel) 仿拓扑群是 k_ω 空间. A. Arhangel'skiĭ [5] 和 C. Joiner [35] 构造了约简长度为 n 的字关于完全正则空间 X 上自由拓扑群 $F(X)$ (自由 Abel 拓扑群 $A(X)$) 的子空间 $F_n(X)$ ($A_n(X)$) 的邻域基. A. Elfard 和 P. Nickolas [20, 22] 在自由仿拓扑群的邻域基方面做了非常精细的工作, 推广了 A. Arhangel'skiĭ [5] 和 C. Joiner [35] 的上述结果到自由仿拓扑群上, 即构造了约简长度为 n 的字关于拓扑空间 X 上自由仿拓扑群 $FP(X)$ (自由 Abel 仿拓扑群 $AP(X)$) 的子空间 $FP_n(X)$ ($AP_n(X)$) 的邻域基. E. Nummela [64], V. Pestov [69] 和 M. Tkackenko [79] 研究了对一个完全正则空间 Y 的子空间 X, $F(X)$ ($A(X)$) 何时可拓扑嵌入 $F(Y)$ ($A(Y)$). F. Lin [42] 则研究了类似上述的自由 (Abel) 仿拓扑群的嵌入问题. A. Arhangel'skiĭ, O. Okunev 和 V. Pestov [7] 研究了度量空间上的自由 (Abel) 拓扑群的 k 空间性质和可数 tightness 性质. 相应地, F. Lin, C. Liu, S. Lin 和 S. Cobzas [46] 研究了度量空间上的自由 Abel 仿拓扑群的 k 空间性质和可数 tightness 性质. 另外, A. Elfard 和 P. Nickolas [20, 22], N. Pyrch 和 O. Ravsky [72], S. Romaguera、M. Sanchis 和 M. Tkachenko [76] 关于自由 (Abel) 仿拓扑群的分离性公理的研究等等都是关于自由仿拓扑群的较好奠基性工作.

但据作者不完全统计, 涉及自由仿拓扑群研究的文献直到目前仅有十几篇左右问世 [8, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 39, 40, 41, 42, 46, 71, 72, 76, 82], 而包括作者在内的专门从事自由仿拓扑群研究论文仅有十一篇 [12, 13, 21, 22, 23, 41, 42, 46, 71, 72, 76]. 这也从一定侧面反映, 对自由仿拓扑群的研究刚刚兴起，其前景广阔.

本文继续围绕 A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 提出的上述公开问题 0.0.1 开展工作, 研究自由仿拓扑群的若干拓扑性质: σ 空间、半层空间、k^* 可度量空间等几个广义度量空间性质; 局部紧性质; Fréchet 空间性质; 伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等, 一方面对问题 0.0.1 进行部分回答; 另一方面改进和扩充了关于自由仿拓扑群研究的一些文献如 [23, 46, 47, 72] 等中的重要结果.

2014-2015 年, 李招文、林福财和刘川研究了自由拓扑群的一些广义度量性质 [38, 43, 44]. 近来, F. Lin、C. Liu、S. Lin 和 S. Cobzas [46], N. Pyrch 和 O. Ravsky [72] 研究了 (次) 可度量空间上的自由仿拓扑群的一些性质. **本文第一部分 (第二章)** 研究自由仿拓扑群的几个广义度量性质, 建立了次可度量空间上的自由仿拓扑群的一般稳定性定理, 探讨了 k^* 可度量 k 空间和 k 半层 k 空间上的自由仿拓扑群的可数 tightness, 讨论了自由仿拓扑群的第一可数性, 改进和扩充了 F. Lin、N. Pyrch 等人的上述相关结果.

2003 年, P. Nickolas 和 M. Tkachenko 研究了自由拓扑群的局部紧性质 [62]. 近来, F. Lin、C. Liu 和 K. Zhang [47] 研究了自由仿拓扑群的局部紧性, 证明了: 设 X 是 Hausdorff 的 μ 空间, 如果 $FP_2(X)$ 是局部紧空间, 那么 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和. 于是 F. Lin、C. Liu 和 K. Zhang [47] 提出问题: 如果拓扑空间 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间吗? **本文第二部分 (第三章)** 围绕上述问题, 研究自由仿拓扑群的局部紧性质. 首先直接通过拟伪度量构建拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基, 扩充了 A. Elfard 和 P. Nickolas 的一个结果: [23, 定理 3.1]; 然后研究 $FP_2(X)$ 的局部紧性, 证明了: 让 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(Y)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(Y)$ 是局部紧空间. 特别地, 设 X 同胚于一 Hausdorff 紧空间与一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(X)$ 在单位元 e 是局部紧的. 这些结果部分回答了 F. Lin、C. Liu 和 K. Zhang [47] 提出的上述问题.

1968-1969 年, A. Arhangel'skiĭ 建立了自由拓扑群中关于每层子空间 $F_n(X)$ ($A_n(X)$) 的同胚性定理 [4, 5]; 1996 年, K. Eda、H. Ohta 和 K. Yamada 研究了自由拓扑群的质数子空间 (prime subspaces) [19]；1980 年始, E. Ordman 和 B. Smith-Thomas [68], S. Morris 和 H. Thompson [61], T. Nogura、D. Shakhmatov 和 Y. Tanaka [63], K. Yamada [84, 85]、M. Thachenko [81], Z. Cai、S. Lin 和 C. Liu [15] 等人先后研究了自由拓扑群的收敛性质及 Fréchet 性质. **本文第三部分 (第四章)** 研究自由仿拓扑群中一些特殊空间如质数空间、Arens 空间、序列空间等的拷贝, 建立了自由仿拓扑群中的一个同胚定理并探讨了其应用, 推广了 [19, 定理 2.6] 到自由 (Abelian) 仿拓扑群; 刻画了自由仿拓扑群的 Fréchet 性, 推广了 E. Ordman 和 B. Smith-Thomas [68] 关于自由拓扑群的相应结论.

1945 年始, A. Markov [57], M. Graev [29], V. Pestov [70], M. Tkachenko [80], A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko [8] 等人先后研究了自由拓扑群的 M 等价性与 A 等价性, 获得了一系列重要成果. 特别地, 设两个完全正则的拓扑空间 X 和 Y 是 A 等价的 (即 $A(X)$ 和 $A(Y)$ 是拓扑同构的), 如果 X 是伪紧的, 那么 Y 也是伪紧的 [29]. 设 $\mathcal{P}$ 是遗传的、可数可加的拓扑性质, 且 X 和 Y 是 M 等价的完全正则空间 (即 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 是拓扑同构的), 如果 X 具有性质 $\mathcal{P}$, 那么 Y 也具有性质 $\mathcal{P}$ [70]. 自从 2002 年自由仿拓扑群引进以来, 给定两个拓扑同构的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$, 专门探讨其基底 X 和 Y 的拓扑性质之间的联系的研究论文至今仍然没有问世. 自然, 这是一类非常重要的课题. **本文第四部分 (第五章)** 将致力于这课题的研究, 首先证明了两个拓扑同构的自由仿拓扑群使其基底非同胚的存在性; 其次证明了伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等是 MP 不变性质. 这推广了 M. Graev [29] 和 V. Pestov [70] 关于自由拓扑群的相应结论.

另外，本文也提出了一些问题供研究.

目　录

第一章　预备知识

在这章, 我们介绍本文用到的几个关键预备知识, 即自由仿拓扑群的一些基础、拟一致结构及拟伪度量的 Graev 扩张.

§1.1　自由仿拓扑群基础

1941 年, A. Markov [56] 创造性地引进了自由拓扑群的概念. 作为自由拓扑群的推广, 2002 年, S. Romaguera、M. Sanchis 和 M. Tkachenko [76] 引进了任意拓扑空间上的自由仿拓扑群.

定义 1.1.1 *[76] 设 X 是仿拓扑群 G 的子空间. 假设*

(1) 集 X 代数生成 G, 即, $\langle X\rangle = G$; 且

(2) 每一连续映射 $f : X \to H$ 能扩张到连续同态 $\hat{f} : G \to H$, 其中 H 是任一仿拓扑群.

那么, G 称为 X 上的 Markov 自由仿拓扑群 *(简称为,* 自由仿拓扑群*), 记为 $FP(X)$.*

如果上面定义中的所有群是 Abel 群, 那么定义了 X 上的 *Markov 自由 Abel 仿拓扑群* (简称为, *自由 Abel 仿拓扑群*), 记为 $AP(X)$.

本文, $F_a(X)$ ($A_a(X)$) 表示代数学的非空集 X 上的自由群 (自由 Abelian 群), e (0) 是 $F_a(X)$ ($A_a(X)$) 的单位元. 集 X 称为 $F_a(X)$ ($A_a(X)$) 的一个自由基. $F_a(X)$ ($A_a(X)$) 中的元素具有下列性质, 例如, 参见 [8, 75].

每一非单位元 $g \in F_a(X)$ 能表示为 $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$, 其中 $x_1, ..., x_n \in X$ 且 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n = \pm 1$; g 称为约简的, 如果 g 的表达式中不包含 xx^{-1} 或 $x^{-1}x$ 这种形式, 其中 $x \in X$, 在这种情况下, 称 g 的长度 $l(g)$ 等于 n. 每一非单位元 $g \in F_a(X)$ 能唯一地表示为 $g = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$, 其中 $n \geq 1$, $r_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $x_i \in X$ 且对每一 $i = 1, ..., n-1$, $x_i \neq x_{i+1}$, 这种表示称为 g 的正规表示. 类似断言对 $A_a(X)$ 成立.

注 1.1.2 *[76] 拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的拓扑是在集 $F_a(X)$ 上诱导 X 的原始拓扑中最细的仿拓扑群拓扑. 类似断言对 $AP(X)$ 成立.*

对每一非负整数 n, $FP_n(X)$ ($AP_n(X)$) 表示 $FP(X)$ ($AP(X)$) 中关于自由基 X 的约简长度 $\leq n$ 的所有元素组成的子空间. 显然, $FP_0(X) = \{e\}$. $\widetilde{X}$ 表示拓扑和 $X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$. 在非 Abel 的情况, 对每一 $n \geq 1$, 置

$$C_n(X) = FP_n(X) \setminus FP_{n-1}(X),$$

i_n 表示 $\widetilde{X}^n$ 到 $FP_n(X)$ 上的乘积映射, 即, $i_n(y_1, ..., y_n) = y_1 \cdots y_n$, 对每一 $(y_1, ..., y_n) \in \widetilde{X}^n$. 那么, 映射 i_n 是连续的, 记 $C_n^*(X)$ 为 $C_n(X)$ 在映射

$$i_n : \widetilde{X}^n \to FP_n(X)$$

下的逆像. 类似地, 在 Abel 的情况, 置

$$C_n(X) = AP_n(X) \setminus AP_{n-1}(X)$$

且 $C_n^*(X)$ 为 $C_n(X)$ 在乘积映射

$$i_n : \widetilde{X}^n \to AP_n(X)$$

下的逆像.

拓扑空间 X、Y 间的映射 $f : X \to Y$ 是 perfect 的 [83], 如果 f 是连续闭的, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是紧的.

引理 1.1.3 *[46, 命题6.3, 6.4] 让 X 是拓扑空间.*

(1) 在 $FP(X)$ 的情况, $i_n : C_n^*(X) \to C_n(X)$ 是同胚映射.

(2) 在 $AP(X)$ 的情况, $i_n : C_n^*(X) \to C_n(X)$ 是 perfect 映射.

引理 1.1.4 *[22, 72] 对拓扑空间 X, 下列条件等价.*

(1) X 是 T_1 空间;

(2) $FP(X)$ 是 T_1 空间;

(3) X 是 $FP(X)$ 的闭子空间;

(4) X^{-1} 是 $FP(X)$ 的离散子空间;

(5) X^{-1} 是 $FP(X)$ 的闭子空间;

(6) 对每一非负整数 n, $FP(X)$ 的子空间 $FP_n(X)$ 是闭的;

(7) $AP(X)$ 是 T_1 空间;

(8) X *是* $AP(X)$ *的闭子空间;*

(9) $-X$ *是* $AP(X)$ *的离散子空间;*

(10) $-X$ *是* $AP(X)$ *的闭子空间;*

(11) 对每一非负整数 n, $AP(X)$ *的子空间* $AP_n(X)$ *是闭的.*

一个拓扑空间 X 称为函数 *Hausdorff* 的 *(functionally Hausdorff)*, 如果对 X 中的任意两不同点 x 和 y, 存在连续函数

$$f : X \to [0,1]$$

使得 $f(x) = 0$ 且 $f(y) = 1$. 显然, 每一完全正则空间是函数 Hausdorff 的且每一函数 Hausdorff 的空间是 Hausdorff 的.

引理 1.1.5 *[72] 对拓扑空间* X, *下列条件等价.*

(1) X *是函数 Hausdorff 空间;*

(2) $FP(X)$ *是函数 Hausdorff 空间;*

(3) $AP(X)$ *是函数 Hausdorff 空间.*

引理 1.1.6 *[41] 设* X *是完全正则空间且* K *是* $AP(X)$ *的可数紧子集. 那么存在某正整数* n *使得* $K \subset FP_n(X)$. *类似断言对* $AP(X)$ *成立.*

引理 1.1.7 *[22] 设* X *是* T_1 *拓扑空间且* $w = x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n}$ *是* $FP_n(X)$ *中的约简元, 其中对* $i = 1, 2, ..., n$, $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$. *让* $\mathcal{B}$ *表示所有具有形式* $U_1^{\epsilon_1}U_2^{\epsilon_2}\cdots U_n^{\epsilon_n}$ *的集组成的集族, 其中对* $i = 1, 2, ..., n$, *当* $\epsilon_i = 1$, *集* U_i *是* x_i *在* X *中的邻域; 当* $\epsilon_i = -1$, $U_i = \{x_i\}$. *那么* $\mathcal{B}$ *是点* w *在* $FP(X)$ *的子空间* $FP_n(X)$ *中的邻域基.*

引理 1.1.8 *[22] 让* X *是* T_1 *拓扑空间且* $w = \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_n x_n$ *是* $AP_n(X)$ *中的约简字, 其中对* $i = 1, 2, ..., n$, $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$. *记* $\mathcal{B}$ *为所有具有形式* $\epsilon_1 U_1 + \epsilon_2 U_2 + \cdots + \epsilon_n U_n$ *的集组成的集族, 其中对* $i = 1, 2, ..., n$, *当* $\epsilon_i = 1$, *集* U_i *是* x_i *在* X *中的邻域; 当* $\epsilon_i = -1$, $U_i = \{x_i\}$. *那么,* $\mathcal{B}$ *是点* w *在子空间* $AP_n(X)$ *中的邻域基.*

§1.2 拟一致结构与拟伪度量的 Graev 扩张

一致结构和伪度量的 Graev 扩张是研究自由拓扑群的两个重要基础 [8]. 自然, 对自由仿拓扑群的研究, 掌握拟一致结构的基础知识与拟伪度量的 Graev 扩张是十分必要的.

定义 1.2.1 *[24] 设 $\mathcal{F}$ 是集 X 的非空子集族, 称 $\mathcal{F}$ 是一滤子, 如果满足下面条件:*

(FL1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(FL2) 如果 $A \in \mathcal{F}$ 及 $A \subset B$, 那么 $B \in \mathcal{F}$;

(FL3) 如果 $A \in \mathcal{F}$ 及 $B \in \mathcal{F}$, 那么 $A \cap B \in \mathcal{F}$.

定义 1.2.2 *[25, 36] 在一个集 X 上的一个拟一致结构 $\mathcal{U}$ 是 $X \times X$ 上满足下列两个条件的一个滤子.*

(1) $\mathcal{U}$ 的每一元 U 包含 X 的对角线 $\triangle_X = \{(x,x) : x \in X\}$;

(2) 对每一 $U \in \mathcal{U}$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $V \circ V = \{(x,z) \in X \times X :$ 存在 $y \in X$ 使得 $(x,y) \in V$ 且 $(y,z) \in V\} \subset U$.

集 X 上的拟一致结构 $\mathcal{U}$ 的一个子集族 $\mathcal{B}$ 称为 $\mathcal{U}$ 的一个基, 如果 $\mathcal{U}$ 的每一元包含 $\mathcal{B}$ 的一个元.

注 1.2.3 *(1) 设 $\mathcal{U}$ 集 X 上的拟一致结构且 $M \subset X$. 让*

$$\mathcal{U}_M = \{(M \times M) \cap V : V \in \mathcal{U}\}.$$

容易看到 $\mathcal{U}_M$ 是子集 $M \subset X$ 上的拟一致结构.

(2) 在一集 X 上的每一拟一致结构 $\mathcal{U}$ 诱导一个拓扑 $\tau(\mathcal{U})$ 如下. 对每一 $x \in X$ 及 $U \in \mathcal{U}$, 置

$$U(x) = \{y \in X : (x,y) \in U\}.$$

X 的子集 $G \in \tau(\mathcal{U})$ 当且仅当对每一 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $U(x) \subset G$.

(X,τ) 上的拟一致结构 $\mathcal{U}$ 称为与 τ 相容, 如果 $\tau(\mathcal{U}) = \tau$. 与拓扑空间 X 相容的所有拟一致结构的上确界称为空间 X 的 fine 拟一致结构, 记为 $\mathcal{FN}(X)$.

(3) 让 $\eta(e)$ 表示仿拓扑群 G 中单位元 e 的邻域滤子. 对每一 $U \in \eta(e)$, 置

$$U_L = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\}$$

且

$$U_R = \{(x, y) \in G \times G : yx^{-1} \in U\}.$$

那么 $\{U_L : U \in \eta(e)\}$ 是 G 上相容的某拟一致结构 $\mathcal{U}_L$ 的一个基; $\{U_R : U \in \eta(e)\}$ 是 G 上相容的某拟一致结构 $\mathcal{U}_R$ 的一个基 *[36]*.

现在回忆拟伪度量的 Graev 扩张.

定义 1.2.4 *[25, 36]* 定义在集 $X \times X$ 上的非负实值函数 ρ 称为集 X 上的一个拟伪度量, 如果 ρ 满足下列条件:

(1) 对每一 $x \in X$, $\rho(x, x) = 0$;

(2) 对任意 $x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

集 X 上的一个拟伪度量 ρ 以 1 为界, 如果对任意 $x, y \in X$, $\rho(x, y) \le 1$. 在一群 G 上的一个拟伪度量 ρ 称为两边不变的, 如果对任意 $a, x, y \in G$,

$$\rho(x, y) = \rho(ax, ay) = \rho(xa, ya).$$

如果 ρ 是集 X 上的一个拟伪度量, 对每一 $x \in X$, 定义 $\rho_x : X \to \mathbb{R}$ 使得对任意 $y \in X$, $\rho_x(y) = \rho(x, y)$.

注 1.2.5 让 ρ 是集 X 上的一个拟伪度量, 且对任意 $x, y \in X$,

$$d(x, y) = min\{\rho(x, y), 1\}.$$

那么 d 也集 X 上的一个拟伪度量.

定义 1.2.6 *[8]* 设 $A \subset \mathbb{N}$ 使得 $|A| = 2n$, 对某 $n \ge 1$. A 上的一个图示 *(scheme)* 是指一个满足下列条件的双射:

(S1) 对每一 $i \in A$, $\varphi(i) \ne i$ 且 $\varphi(\varphi(i)) = i$;

(S2) 不存在 $i, j \in A$ 满足 $i < j < \varphi(i) < \varphi(j)$.

让 ρ 是集 X 上的一个拟伪度量且以 1 为界. 现在, 我们概括如何扩张 ρ 到自由群 $F_a(X)$ 上, 例如, 参见 [20, 22, 76].

首先, 扩张 ρ 到 $X \cup \{e\}$ 上的一拟伪度量 ρ^e: 对 $x, y \in X \cup \{e\}$,

$$\rho^e(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = y; \\ \rho(x,y), & \text{若 } x, y \in X; \\ 1, & \text{否则}. \end{cases}$$

其次, 扩张 ρ^e 到 $F_a(X)$ 的子集 $\widetilde{X} = X \cup \{e\} \cup X^{-1}$ 上的一拟伪度量 ρ^*: 对 $x, y \in \widetilde{X}$,

$$\rho^*(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = y; \\ \rho^e(x,y), & \text{若 } x, y \in X \cup \{e\}; \\ \rho^e(y^{-1}, x^{-1}), & \text{若 } x, y \in X^{-1} \cup \{e\}; \\ 2, & \text{否则}. \end{cases}$$

最后, 设 g 是 $F_a(X)$ 的约简元且设 $\mathcal{X} \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2n}}$ 是字母表 $\widetilde{X}$ 中的具有偶数长度 $l(\mathcal{X}) = 2n$ 的字, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_{2n}$ 是互不相同的正整数, 使得在 $\mathcal{X}$ 中所有可能的化简 (包括从 $\mathcal{X}$ 中把 e 的删除) 把 $\mathcal{X}$ 约简成 g (我们记 $[\mathcal{X}] = g$, 如果所有的这些条件满足). 记 $\zeta_{\mathcal{X}}$ 是 $A = \{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\}$ 上所有图示之集. 我们也说每一 $\varphi \in \zeta_{\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个图示. 对每一 $\varphi \in \zeta_{\mathcal{X}}$, 置

$$\varGamma_\rho(\mathcal{X}, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i \in A} \rho^*(x_i^{-1}, x_{\varphi(i)}).$$

定义 $N_\rho(g)$ 如下:

$$N_\rho(g) = \inf\{\varGamma_\rho(\mathcal{X}, \varphi) : l(\mathcal{X}) = 2n \geq l(g), [\mathcal{X}] = g, \varphi \in \zeta_{\mathcal{X}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

定义

$$\hat{\rho} : F_a(X) \times F_a(X) \to [0, +\infty)$$

使得对任意 $g, h \in F_a(X)$,

$$\hat{\rho}(g,h) = N_\rho(g^{-1}h).$$

那么 $\hat{\rho}$ 是 $F_a(X)$ 上两边不变的拟伪度量, 且扩张 ρ 及 ρ^*, $\hat{\rho}$ 称为 ρ 的 Graev 扩张 [20, 22, 76].

关于 ρ 在 $A_a(X)$ 上的 Graev 扩张类似构建 [20, 22, 76].

定义 1.2.7 *[24] 定义在拓扑空间 X 上的一个实值函数 f 称为上半连续的, 如果对每一 $x \in X$ 及每一实数 r, 其中 $f(x) < r$, 存在 x 的开邻域 $U \subset X$ 使得对每一 $x' \in U$, $f(x') < r$.*

事实上, $f : X \to \mathbb{R}$ 是上半连续的当且仅当 $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ 连续, 其中

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

设 X 是拓扑空间. 让 $\mathcal{D}_1(X)$ 是 X 上满足下列条件的所有拟伪度量 ρ 之集:

(1) ρ 以 1 为界;

(2) 对任意 $x \in X$, ρ_x 是上半连续的.

注 1.2.8 *由注记 1.1.2 及 [22, 定理 3.8], 对每一 $\rho \in \mathcal{D}_1(X)$, $\{B_{\hat{\rho}}\ (e, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ 是 $FP(X)$ 中的开集族, 其中*

$$B_{\hat{\rho}}(e, \varepsilon) = \{g \in F_a(X) : \hat{\rho}(e, g) < \varepsilon\}.$$

注 1.2.9 *对一约简元 $g \in F_a(X)$, 如果 $\hat{\rho}(e, g) = N_\rho(g) < 1$, 那么下列成立:*

(1) 通过上面 $\hat{\rho}$ 的构建及 [22, 定理 3.5], g 具有偶数长度, 故, g 能表示成约简形式 $g = v_1 v_2 \cdots v_{2k}$(对某一正整数 k), 其中 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k} \in X \cup X^{-1}$;

(2) 由 [22, 定理 3.5], 存在集 $\{1, 2, \cdots, 2k\}$ 上的图示使得

$$\hat{\rho}(e, g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k} \rho^*(v_i^{-1}, v_{\varphi(i)}).$$

引理 1.2.10 *[76, 定理 3.2], [41, 定理 3.2, 3.3] 设 (X, ϱ) 是度量空间, 其中 ϱ 以 1 为界. 让 $\widehat{\varrho}$ 是 ϱ 到 $F_a(X)$ 的两边不变的 Graev 扩张. 那么集族 $\{B_{\widehat{\varrho}}(e, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ 是自由群 $F_a(X)$ 上某一可度量化仿拓扑群拓扑 $\mathcal{T}_\varrho$ 中单位元 e 的一个基, 且 $\mathcal{T}_\varrho$ 在 X 上的限制与 ϱ 生成的 X 的拓扑一致. 对每一非负整数 n, $FP_n(X)$ 在 $(F_a(X), \mathcal{T}_\varrho)$ 中是闭的. 类似断言对 $A_a(X)$ 成立.*

本文约定 $FP(X)$ 和 $AP(X)$ 的子空间 X 假定是 T_1 的, 未解释的术语, 读者可参考 [8, 24].

第二章　自由仿拓扑群的几个广义度量性质

广义度量空间理论是一般拓扑学中的核心内容之一, 如见 [30, 48, 49] 等. 在拓扑代数领域对广义度量性质的研究已经引起拓扑学工作者的重视, 例如见 [31, 38, 39, 40, 43, 44, 46, 72] 等. 近来, F. Lin, C. Liu, S. Lin 和 S. Cobzas [46], N. Pyrch 和 O. Ravsky [72] 研究了 (次) 可度量空间上的自由仿拓扑群的一些性质, 获得了下列结果. 次可度量性在取自由 (Abel) 仿拓扑群下是稳定的, 即, 次可度量空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群仍是次可度量空间 [72]. 如果可度量空间 X 上的自由 Abel 仿拓扑群 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是可分的 [46]. 对一个正则空间 X, $AP_2(X)$ 是第一可数空间当且仅当 $AP_2(X)$ 是可度量空间当且仅当对每一 $n \in \mathbb{N}$, $AP_n(X)$ 是第一可数空间当且仅当 X 是仅有有限个非孤立点的可度量空间 [46].

在本章, 我们将讨论自由仿拓扑群的几个广义度量性质, 改进和扩充 F. Lin、N. Pyrch 等人的上述结果.

在第一节, 建立次可度量空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群的一般稳定性定理. 证明了: 如果 X 是次可度量空间, 那么 X 是 Ξ 空间当且仅当 $FP(X)$ 是 Ξ 空间 (定理 2.1.6). 作为其应用, 特别地证明了: 让 X 是次可度量空间, 那么 X 是 σ 空间当且仅当 $FP(X)$ 是 σ 空间当且仅当 $AP(X)$ 是 σ 空间 (推论 2.1.7); X 是半层空间当且仅当 $FP(X)$ 是半层空间当且仅当 $AP(X)$ 是半层空间 (推论 2.1.8).

在第二节, 研究 k^* 可度量 k 空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群的可数 tightness. 证明了: 让 X 是 Hausdorff 的 k^* 可度量的 k 空间, 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, 从而 X 是 $\aleph_0'$ 空间 (定理 2.2.9). 这改进了 F. Lin 等人关于可度量空间上的自由 Abel 仿拓扑群的可数 tightness 的相关结果.

在第三节, 研究 k 半层 k 空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群的可数 tightness. 证明了: 让 X 是 Hausdorff 的 k 半层的 k 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的 (定理 2.3.2).

在第四节, 讨论自由仿拓扑群的第一可数性. 证明了下列 (定理 2.4.6).

设 X 是正则空间, 则下述条件等价:

(1) $FP_2(X)$ 是第一可数空间;

(2) $FP_2(X)$ 是可度量空间;

(3) X 是度量空间且 X 的所有非孤立点之集是有限的;

(4) $AP_2(X)$ 是第一可数空间;

(5) $AP_2(X)$ 是可度量空间;

(6) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $AP_n(X)$ 是第一可数空间.

本章内容取材于作者和林寿教授最近发表的论文 "Z. Cai, S. Lin, A few generalized metric properties of free paratopological groups, Topol. Appl. 204 (2016), 90-102", 即参考文献 [13].

本章约定: 闭映射都假定是连续满的.

§2.1　次可度量空间上的自由仿拓扑群的一般稳定性定理

拓扑空间 (X, τ) 是次可度量的 [1], 如果存在 X 上拓扑 τ' 使得 $\tau' \subset \tau$ 且 (X, τ') 是可度量化的.

本节约定, 拓扑性质 三 意指满足下列四个条件:

- 三 关于闭子空间遗传;
- 三 是有限可乘的;
- 每一离散空间具有性质 三; 且
- 可数个具有性质 三 的闭子空间的并仍具有性质 三.

拓扑空间 X 是 三 空间, 如果 X 具有性质 三.

定义 2.1.1 让 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族.

(1) $\mathcal{P}$ 是 X 的网 [3], 如果对每一 $x \in X$ 及 x 的任一邻域 U, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in P \subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ 是局部有限的, 如果对每一 $x \in X$, 存在 x 的邻域 W 使得 W 至多与 $\mathcal{P}$ 的有限多个元相交.

(3) $\mathcal{P}$ 是 σ 局部有限的, 如果 $\mathcal{P}$ 能表示成可数个局部有限集族的并.

定义 2.1.2 让 (X, τ) 是拓扑空间, τ^c 是 (X, τ) 中的所有闭集之族.

(1) X 称为 σ 空间 [65], 如果 X 有 σ 局部有限的网.

(2) X 称为半层空间 [18], 如果存在函数 $F : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 满足: 对每一 $n \in \mathbb{N}$ 及每一开集 $U \subset X$, 指派一闭集 $F(n, U)$ 具有下列性质 (a) 和 (b).

(a) $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(n,U)$;

(b) $V\subset U\Rightarrow F(n,V)\subset F(n,U)$.

如果更设: 若 K *是一开集* U *的紧子集, 则存在* $m\in\mathbb{N}$ *使得* $K\subset F(m,U)$, *那么* X *称为* k *半层空间 [54].*

注 2.1.3 *(1) 容易看到:* σ *空间是* Ξ *空间.*

(2) 半层空间是 Ξ *空间 [66].*

(3) 每一正则的 σ *空间是半层空间 [30, 定理 5.9]. 存在次可度量的正则半层空间不是* σ *空间 [30, 例 9.10].*

现在, 我们证明 Ξ 空间在取次可度量空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群下是稳定的.

下列引理 2.1.4 很可能是已知的.

引理 2.1.4 *让* $f:X\to Y$ *是 perfect 映射. 如果* X *是* σ *空间, 那么* Y *也是* σ *空间.*

证明 让 $\mathcal{A}$ 是 σ 空间 X 的 σ 局部有限网. 因为映射 f 是 perfect 的, 由 [24, 引理 3.10.11], 集族 $\{f(A):A\in\mathcal{A}\}$ 是 Y 的 σ 局部有限网. 从而, Y 是 σ 空间. 证完.

引理 2.1.5 *[18] 让* $f:X\to Y$ *是闭映射. 如果* X *是半层空间, 那么* Y *也是半层空间.*

定理 2.1.6 *让* X *是次可度量空间. 那么* X *是* Ξ *空间当且仅当* $FP(X)$ *是* Ξ *空间.*

证明 充分性. 这是显然的, 因为 Ξ 空间关于闭子空间遗传.

必要性. 假设 (X,τ) 是次可度量的 Ξ 空间. 那么存在拓扑 $\tau'\subset\tau$ 使得 (X,τ') 可度量化. 让 ϱ 是 (X,τ') 上与 τ' 相容的度量且以 1 为界. 令

$$id:(X,\tau)\to(X,\tau')$$

是恒等连续映射, 且 Y 表示空间 (X,τ'). 扩张映射 id 到连续同态

$$\widehat{id}:FP(X)\to FP(Y),$$

那么 $\widehat{id}$ 是自由群 $F_a(X)$ 上的恒等映射. 由引理 1.2.10, ϱ 能扩张到 $F_a(X)$ 上的一个度量 $\widehat{\varrho}$ 使得 $(F_a(X),\widehat{\varrho})$ 是粗于 $FP(Y)$ 的拓扑的可度量化仿拓扑群拓扑. 又, 对每一非负整数 n, $FP_n(X)$ 在 $(F_a(X),\widehat{\varrho})$ 中是闭的, 因为度量空间的每一闭子集是 G_δ 集, 所以

$$FP_n(X)=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}U_{n,j},$$

其中每一 $U_{n,j}$ 在 $(F_a(X),\widehat{\varrho})$ 中是开的. 又 $\widehat{id}$ 是恒等连续同构, 于是每一 $U_{n,j}$ 在 $FP(X)$ 中是开的.

固定 $n\in\mathbb{N}$. 对每一 $j\in\mathbb{N}$, 令

$$V_{n-1,j}=U_{n-1,j}\cap FP_n(X).$$

从而

$$FP_{n-1}(X)=FP_{n-1}(X)\cap FP_n(X)=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}(U_{n-1,j}\cap FP_n(X))=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}V_{n-1,j}$$

且

$$C_n(X)=FP_n(X)\setminus FP_{n-1}(X)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(FP_n(X)\setminus V_{n-1,j}).$$

显然, 对每一 $j\in\mathbb{N}$, $E_{n,j}=FP_n(X)\setminus V_{n-1,j}$ 在 $FP(X)$ 中是闭的. 因为 $i_n^{-1}(E_{n,j})$ 在 $\widetilde{X}^n$ 中是闭的, 由引理 1.1.3(1), 对每一 $n,j\in\mathbb{N}$, $E_{n,j}$ 是 Ξ 空间. 从而,

$$FP(X)=\{e\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n(X)=\{e\}\cup\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}}E_{n,j}$$

是 Ξ-space. 证完.

由定理 2.1.6 及引理 1.1.3(2), 2.1.4, 2.1.5 得下列推论.

推论 2.1.7 让 X 是次可度量空间. 那么下列等价.

(1) X 是 σ 空间;

(2) $FP(X)$ 是 σ 空间;

(3) $AP(X)$ 是 σ 空间.

推论 2.1.8 让 X 是次可度量空间. 那么下列等价.

(1) X 是半层空间;

(2) $FP(X)$ 是半层空间;

(3) $AP(X)$ 是半层空间.

因为每一 Hausdorff 仿紧 σ 空间是次可度量的 [30], 我们有下列成立.

推论 2.1.9 *如果 X 是 Hausdorff 仿紧 σ 空间, 那么 $FP(X)$ 和 $AP(X)$ 都是 σ 空间.*

问题 2.1.10 *σ 空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 或自由 Abel 仿拓扑群 $AP(X)$ 仍是 σ 空间吗?*

§2.2　k^* 可度量 k 空间上的自由仿拓扑群的可数 tightness

映射 $f: X \to Y$ 称为 *subproper* 的 [9], 如果存在 X 的子集 Z 使得 $f(Z) = Y$ 且对任一在 Y 中具有紧闭包的集 K, 集 $Z \cap f^{-1}(K)$ 在 X 中具有紧闭包. *k^* 可度量空间*在 [9] 中作为度量空间的连续 subproper 映像被引进, 并应用到了拓扑代数领域. 最近, k^* 可度量空间也引起了一般拓扑学工作者的兴趣 [31, 50]. 本节研究 k^* 可度量 k 空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群的可数 tightness.

回忆一些相关概念.

让 X 是拓扑空间. X 的子集 P 称为 $x \in X$ 在 X 中的*序列邻域*, 如果任一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P, 即,

$$\{x_n : n \geq k_0\} \cup \{x\} \subset P$$

对某 $k_0 \in \mathbb{N}$. P 称为 X 的*序列开子集*, 如果 P 是 P 中每一点在 X 中的序列邻域.

X 称为*序列空间* [26], 如果 X 的每一序列开子集在 X 中是开的.

X 称为 *k 空间* [28], 如果子集 $A \subset X$ 在 X 中闭当且仅当对 X 的每一紧子集 K, $A \cap K$ 在 K 中闭.

X 具有*可数 tightness* [24], 如果在 X 中 $x \in \overline{A}$, 那么对某一可数 $C \subset A$, $x \in \overline{C}$. 不难验证: 可数 tightness 是遗传的且被商映射保持.

X 是 *ω_1 紧空间* [30], 如果 X 的每一不可数子集有聚点.

让 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族.

$\mathcal{P}$ 称为 X 的 *k 网* [67], 如果 K 是一开集 U 的紧子集, 则存在有限子族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ 使得 $K \subset \cup\mathcal{F} \subset U$.

$\mathcal{P}$ 称为 X 的 *cl_1-osed* k 网 [9], 如果 K 是一开集 U 的紧子集, 则存在有限子族 $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{F}\subset \mathrm{cl}_1(\cup\mathcal{F})\subset U$, 其中 $\mathrm{cl}_1(\cup\mathcal{F})$ 表示由 $\cup\mathcal{F}$ 中的点组成的 X 的收敛序列的所有极限点之集.

$\mathcal{P}$ 是紧有限的, 如果 X 的每一紧子集仅与 $\mathcal{P}$ 的有限个元相交.

$\mathcal{P}$ 是 σ 紧有限的, 如果 $\mathcal{P}$ 能表示成可数个紧有限集族的并.

一个有趣的结果是:

引理 2.2.1 *[9] 一个 Hausdorff 空间 X 是 k^* 可度量空间当且仅当 X 具有 σ 紧有限的 cl_1-osed k 网.*

我们还需要一系列引理.

引理 2.2.2 *ω_1 紧 k 空间中的紧有限集族是可数的.*

证明 让 $\mathcal{P}$ 是 ω_1 紧 k 空间 X 中的紧有限集族. 假设 $\mathcal{P}$ 不可数. 那么存在一子族 $\mathcal{F}=\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathcal{P}$ 及一子集 $A=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset X$ 满足下列:

(1) 对每一 $\alpha<\omega_1$, $x_\alpha\in P_\alpha$;

(2) 对任意两不同的 $\alpha,\beta<\omega_1$, $x_\alpha\neq x_\beta$ 且 $P_\alpha\neq P_\beta$.

因为 X 是 ω_1 紧的, 故, 令 x 是 A 在 X 中的聚点, 从而 $A\setminus\{x\}$ 在 X 中不是闭的. 由于 X 是 k 空间, 存在 X 的紧子集 K 使得 $(A\setminus\{x\})\cap K$ 在 K 中不是闭的. 那么, $(A\setminus\{x\})\cap K$ 是无限的, 这与 $\mathcal{P}$ 在 X 中是紧有限的假设矛盾. 证完.

引理 2.2.3 *[32] 每一具有点可数 k 网的 Hausdorff 的 k 空间是序列空间.*

回忆: S_{ω_1} [48] 是粘合 ω_1 个收敛序列的拓扑和的极限点获得的商空间, 其中这里的每一收敛序列是实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ 的拷贝.

引理 2.2.4 *让 X 是 Hausdorff 的 k^* 可度量的 k 空间. 如果由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 不是 ω_1 紧的, 那么存在闭映射 $f:X\to Y$ 使得 Y 包含 S_{ω_1} 的一个闭拷贝.*

证明 由引理 2.2.1, 让 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 是 X 的 σ 紧有限的 cl_1-osed k 网. 由引理 2.2.3, X 是序列空间. 因为由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 不是 ω_1 紧的, 所以存在一不可数子集 $D=\{x_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ 使得 $D\subset X'$ 且 D 在 X 中没有聚点, 其中 Γ 是一指标集.

断言 1. 对每一 $\alpha\in\Gamma$, 存在由 X 中点组成的收敛于 x_α 的一非平凡序列 $\{x_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $D\cap\{x_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}=\emptyset$.

事实上, 因为 X 是序列空间, 所以对每一 $\alpha\in\Gamma$, $\{x_\alpha\}$ 在 X 中不是序列开的, 从而存在由 X 中点组成的收敛于 x_α 的一非平凡序列 $\{b_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 又, D 在 X 中没有聚点, 所以对每一 $\alpha\in\Gamma$,

$$|D\cap\{b_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}|<\omega.$$

这样, 断言 1 证完.

断言 2. 存在 Γ 的子集 Λ, 其中 $|\Lambda|=\omega_1$, 使得对每一 $\alpha\in\Lambda$, 存在由 X 中点组成的收敛于 x_α 的一非平凡序列 $\{z_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及一 $P_\alpha\in\mathcal{P}$ 满足下列:

(a) $\{z_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}\subset P_\alpha$;

(b) 对任意两不同的 $\alpha,\beta\in\Lambda$, $\{z_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}\cap\{z_n(\beta):n\in\mathbb{N}\}=\emptyset$;

(c) 对某一 $m\in\mathbb{N}$, $\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset\mathcal{P}_m$.

事实上, 由断言 1, 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cl_1-osed k 网, 所以对每一 $\alpha\in\Gamma$, 存在有限子族 $\mathcal{F}_\alpha\subset\mathcal{P}$ 使得

$$\{x_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_\alpha\}\subset\cup\mathcal{F}_\alpha\subset\mathrm{cl}_1(\cup\mathcal{F}_\alpha)\subset X\setminus\{x_\beta:\beta\in\Gamma,\beta\neq\alpha\}.$$

那么, 对每一 $\alpha\in\Gamma$, 存在一 $P_\alpha\in\mathcal{P}$ 及 $\{x_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一子列 $\{x_{n_k}(\alpha)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\{x_{n_k}(\alpha):k\in\mathbb{N}\}\subset P_\alpha\subset\mathrm{cl}_1(P_\alpha)\subset X\setminus\{x_\beta:\beta\in\Gamma,\beta\neq\alpha\}.$$

这样, 对任意两不同的 $\alpha,\beta\in\Gamma$, 有 $x_\beta\notin\mathrm{cl}_1(P_\alpha)$, 从而 $P_\alpha\neq P_\beta$. 进而, 存在某 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{P}_m$ 包含不可数多个 P_α.

因此, 存在 Γ 的子集 Λ, 其中 $|\Lambda|=\omega_1$, 使得对每一 $\alpha\in\Lambda$, 存在由 X 中点组成的收敛于 x_α 的一非平凡序列 $\{y_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及一 $P_\alpha\in\mathcal{P}$ 满足 $\{y_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}\subset P_\alpha$ 且对某一 $m\in\mathbb{N}$, $\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset\mathcal{P}_m$.

因为 $\mathcal{P}_m$ 在 X 中是紧有限的, 所以, 对每一 $\alpha\in\Lambda$,

$$\{y_n(\alpha):n\in\mathbb{N}\}\setminus\bigcup_{\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}}\{y_n(\beta):n\in\mathbb{N}\}$$

是无限的, 并记为 $\{z_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$. 这样, 断言 2 证完.

现在, 让 Y 是从 X 中粘合 $E = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 到一点获得的商空间, 即, $Y = X/E$. 记 $Y = \{\infty\} \cup (X \setminus E)$. 令 $q : X \to Y$ 是自然商映射. 那么映射 q 是闭的 [24, 例 2.4.12], 从而 Y 是 T_1 空间.

断言 3. Y 的子空间 $C = \{\infty\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{z_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_{ω_1} 的闭拷贝.

让 $Z = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (\{z_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\alpha\})$. 因为 X 是序列空间且 $\mathcal{P}_m$ 在 X 中是紧有限的, 所以子空间 Z 在 X 中是闭的, $q|Z : Z \to q(Z)$ 是闭映射且

$$Z = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (\{z_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\alpha\}).$$

因此 Y 的子空间 $C = q(Z)$ 是 S_{ω_1} 的闭拷贝. 证完.

引理 2.2.5 *[33] 让 X 是乘积空间 $S_{\omega_1} \times S_{\omega_1}$. 那么 X 的 tightness 是不可数的.*

文 [46] 证明: 如果 X 是完全正则空间, 那么对每一 $n \in \mathbb{N}$, $AP(X)$ 包含 X^n 的一闭拷贝. 然而, 如果分离性 "完全正则" 减弱为 T_1, 通过引理 1.1.8, 我们仍能在 $AP(X)$ 中, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 构建 X^n 的一闭拷贝.

引理 2.2.6 *让 X 是拓扑空间. 下列成立.*

(1) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $FP(X)$ 包含 X^n 的一拷贝 [22].

(2) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $AP(X)$ 包含 X^n 的一拷贝.

证明　定义映射

$$\Phi : X^n \to AP(X)$$

使得对每一 $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$,

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n.$$

令 $m = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$, 于是

$$\Phi(X^n) \subset AP_m(X).$$

由 $AP(X)$ 乘积运算的连续性, 得 Φ 是连续的. 因为集 X 是 $AP(X)$ 的自由代数基, 所以 Φ 是单射. 现只需证明

$$\Phi : X^n \to \Phi(X^n)$$

是开映射. 设 U 是 X^n 的非空开子集且 $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U$. 那么对每一 $i \le n$, 存在 x_i 在 X 中的邻域 U_i 使得

$$U_1 + 2U_2 + \cdots + 2^{n-1}U_n = \Phi(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \subset \Phi(U).$$

由引理 1.1.8, $U_1 + 2U_2 + \cdots + 2^{n-1}U_n$ 是点 $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ 在 $AP_m(X)$ 中的邻域. 这样, $\Phi(U)$ 是点 $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ 在 $\Phi(X^n)$ 中的邻域且 $\Phi(U)$ 在 $\Phi(X^n)$ 中是开的. 证完.

下列引理 2.2.7 中的 $FP(X)$ 的情况在 [72, 命题 2.10] 中证明. 仔细验证后, 它的方法对 $AP(X)$ 的情况也适用.

引理 2.2.7 *[72] 让 $f : X \to Y$ 是拓扑空间 X 和 Y 之间的商映射. 那么 f 能连续扩张到开同态 $F(f) : FP(X) \to FP(Y)$ 且 $A(f) : AP(X) \to AP(Y)$.*

引理 2.2.8 *让 $f : X \to Y$ 是拓扑空间 X 和 Y 之间的商映射. If $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么 Y 不包含 S_{ω_1} 的闭拷贝.*

证明 假设 Y 包含 S_{ω_1} 的闭拷贝. 由引理 2.2.7, 映射 f 能连续扩张到开同态

$$F(f) : FP(X) \to FP(Y)$$

且

$$A(f) : AP(X) \to AP(Y).$$

因为 $FP(X)$ $(AP(X))$ 有可数 tightness, 所以 $FP(Y)$ $(AP(Y))$ 也有可数 tightness. 由引理 2.2.6, $FP(Y)$ $(AP(Y))$ 包含 Y^2 的一拷贝. 从而 $S_{\omega_1} \times S_{\omega_1}$ 有可数 tightness, 这与引理 2.2.5 矛盾. 证完.

设 X 是正则空间. X 称为 $\aleph_0$ 空间 [59], 如果 X 有可数 k 网. X 称为 $\aleph_0'$ 空间 [60], 如果由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 $\aleph_0$ 空间.

定理 2.2.9 *让 X 是 Hausdorff 的 k^* 可度量的 k 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, 从而 X 是 $\aleph_0'$ 空间.*

证明 假设 X' 不是 ω_1 紧的. 由引理 2.2.4, 存在闭映射 $f : X \to Y$ 使得 Y 包含 S_{ω_1} 的一闭拷贝. 由引理 2.2.8, Y 不包含 S_{ω_1} 的闭拷贝. 矛盾. 再由引理 2.2.2, X 是 $\aleph_0'$ 空间. 证完.

具有 σ 局部有限 k 网的正则空间叫做 $\aleph$ 空间 [67].

推论 2.2.10 让 X 是 k 且 $\aleph$ 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 *tightness*, 那么 X 是 $\aleph_0'$ 空间.

拓扑空间 X 称为 *Lašnev* 空间 [78], 如果它是度量空间的闭映射像. 每一 Lašnev 空间是正规的 k^* 可度量的 k 空间 [9, 52].

推论 2.2.11 让 X 是 *Lašnev* 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 *tightness*, 那么 X 是 $\aleph_0'$ 空间.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为星可数的, 如果对任一 $P \in \mathcal{P}$, 集族

$$\{B \in \mathcal{P} : B \cap P \neq \emptyset\}$$

是可数的.

每一具有星可数 k 网的正则空间是 k^* 可度量的 [53].

推论 2.2.12 让 X 是具有星可数 k 网的正则 k 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 *tightness*, 那么 X 是 $\aleph_0'$ 空间.

注 2.2.13 k 且 $\aleph$ 空间、*Lašnev* 空间及具有星可数 k 网的正则 k 空间三者互不蕴含, 例如, 见 *[48, 53]*.

下列推论的 Abel 情况, 作为 [46] 中的主要结果之一, 由林福财等人获得.

推论 2.2.14 让 X 是度量空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 *tightness*, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, 即, X' 是可分的.

围绕推论 2.2.14, 提出下列问题是自然的.

问题 2.2.15 让 X 是度量空间. 如果由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, $AP(X)$ 有可数 *tightness* 吗?

让 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 是紧可数的, 如果 X 的每一紧子集仅与 $\mathcal{P}$ 的可数个元相交.

问题 2.2.16 定理 *2.2.9* 中的条件 "k^* 可度量的 k 空间" 能减弱为条件 "具有紧可数 k 网的 k 空间" 吗?

§2.3　k 半层 k 空间上的自由仿拓扑群的可数 tightness

k 半层空间是一类重要的广义度量空间类, 在林寿教授的学术专著《广义度量空间与映射 (第二版)》[49] 中专门有一节介绍. 本节转到讨论 k 半层 k 空间上的自由 (Abel) 仿拓扑群的可数 tightness.

引理 2.3.1 *[51] 让 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 Hausdorff 的 k 半层的 k 空间, Y 是拓扑空间. 如果 Y 不包含 S_{ω_1} 的闭拷贝, 那么对每一 $y \in Y$, 集 $Frf^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的.*

定理 2.3.2 *让 X 是 Hausdorff 的 k 半层的 k 空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 有可数 tightness, 那么由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的.*

证明　假设 X' 不是 ω_1 紧的. 那么存在不可数集 D 使得 $D \subset X'$ 且 D 在 X 中没有聚点, 从而 D 是 X 的闭离散子集. 进而, 空间 D 不是 Lindelöf 的. 置 $Y = X/D$. 记 $Y = \{\infty\} \cup (X \setminus D)$. 让 $q: X \to Y$ 是自然商映射. 那么映射 q 是闭的 [24, 例 2.4.12].

断言.　$\mathrm{Int}_X q^{-1}(\infty) = \mathrm{Int}_X D = \emptyset$.

假设 $\mathrm{Int}_X D \neq \emptyset$. 取点 x 及 X 中的开集 V 使得 $x \in V \subset D$. 那么 $V \setminus \{x\} \subset D$ 在 X 中是闭的, 于是 $\{x\} = V \setminus (V \setminus \{x\})$ 在 X 中是开的. 另一方面, $\{x\} \subset X'$ 在 X 中不开. 矛盾.

这样, $\mathrm{Fr}q^{-1}(\infty) = q^{-1}(\infty) \setminus \mathrm{Int}_X q^{-1}(\infty) = D$ 不是 Lindelöf 的. 由引理 2.3.1, Y 包含 S_{ω_1} 的一闭拷贝, 这与引理 2.2.8 矛盾. 证完.

注 2.3.3 *(1) 存在第一可数的 k 半层的正则空间不是 k^* 可度量的 [17, 例 9.2].*

(2) 存在第一可数的具有星可数 k 网的 Hausdorff 空间 (从而, 具有 σ 紧有限的 k 网), 不是 k 半层空间 [48, 例 1.5.8].

§2.4　自由仿拓扑群的第一可数性

第一可数的紧 Hausdorf 空间不必是可度量化的. 在本节, 我们讨论自由仿拓扑群的第一可数性. 证明了: 对一个正则空间 X, 那么 $FP_2(X)$ 是第一可数空

间当且仅当 $FP_2(X)$ 是可度量空间当且仅当 X 是度量空间且 X 的所有非孤立点之集是有限的; 类似断言对 Abel 情况成立 (定理 2.4.6).

引理 2.4.1 *[23] 让 X 是拓扑空间且 $\mathcal{FN}(X)$ 是 X 的 fine 拟一致结构. 那么*

$$\mathcal{B} = \{j_2(U) \cup k_2(U) : U \in \mathcal{FN}(X)\}$$

是单位元 e 在 $FP_2(X)$ 中的邻域基, 其中

$$j_2 : X \times X \to F_a(X)$$

且

$$k_2 : X \times X \to F_a(X)$$

定义如下: 对每一 $(x, y) \in X \times X$,

$$j_2(x, y) = x^{-1}y;$$

$$k_2(x, y) = yx^{-1}.$$

回忆: 拓扑空间 X 的特征 $\chi(X)$ [24] 定义为

$$\chi(X) = \sup_{x \in X} \chi(x, X),$$

其中, 对每一 $x \in X$,

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ 是 } x \text{ 在 } X \text{ 中的邻域基}\}.$$

对拓扑空间 X, 基数函数 $fq(X)$ 定义如下：

$$fq(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ 是 } \mathcal{FN}(X)\text{的基}\}.$$

引理 2.4.2 *让 X 是拓扑空间且 κ 是一无限基数. 那么下列等价.*

(1) $\chi(FP_2(X)) \leq \kappa$;

(2) $fq(X) \leq \kappa$.

证明 (1) ⇒ (2). 由引理 2.4.1,

$$\mathcal{B} = \{j_2(U) \cup k_2(U) : U \in \mathcal{FN}(X)\}$$

是单位元 e 在 $FP_2(X)$ 中的邻域基. 因为

$$\chi(FP_2(X)) \leq \kappa,$$

所以存在 $\mathcal{S} \subset \mathcal{FN}(X)$ 使得 $|\mathcal{S}| \leq \kappa$ 且 $\{j_2(U) \cup k_2(U) : U \in \mathcal{S}\}$ 是单位元 e 在 $FP_2(X)$ 中的邻域基. 我们证明: $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{FN}(X)$ 的基. 事实上, 对每一 $V \in \mathcal{FN}(X)$, 由引理 2.4.1, 存在 $U \in \mathcal{S}$ 使得

$$j_2(U) \cup k_2(U) \subset j_2(V) \cup k_2(V).$$

这样, $U \subset V$ 且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{FN}(X)$ 的基. 从而, $fq(X) \leq \kappa$.

(2) ⇒ (1). 假设 $fq(X) \leq \kappa$. 由引理 2.4.1, $\chi(e, FP_2(X)) \leq \kappa$. 由引理 1.1.3(1), $C_2(X) = FP_2(X) \setminus FP_1(X)$ 同胚于 $\widetilde{X}^2$ 的一子空间且 $C_2(X)$ 在 $FP_2(X)$ 中是开的, 所以, 对每一 $g \in C_2(X)$,

$$\chi(g, FP_2(X)) = \chi(g, C_2(X)) \leq \chi(\widetilde{X}^2) = \chi(\widetilde{X}) \leq fq(X) \leq \kappa.$$

让 $\mathbb{Z}$ 是由所有整数组成的离散加法群且 $f : X \to \mathbb{Z}$ 定义为: 对每一 $x \in X$, $f(x) = 1$. 扩张 f 到连续同态

$$\widehat{f} : FP(X) \to \mathbb{Z}.$$

因此,

$$\widehat{f}|_{FP_2(X)} : FP_2(X) \to \mathbb{Z}$$

是连续的. 置

$$\varphi = \widehat{f}|_{FP_2(X)}.$$

那么

$$\varphi^{-1}(\{1\}) = X$$

且

$$\varphi^{-1}(\{-1\}) = X^{-1},$$

从而 $X \cup X^{-1}$ 在 $FP_2(X)$ 中是开的.

于是, 对每一 $h \in X \cup X^{-1}$,

$$\chi(h, FP_2(X)) = \chi(h, X \cup X^{-1}) \le \chi(\widetilde{X}) \le fq(X) \le \kappa.$$

总之, $\chi(FP_2(X)) \le \kappa$. 证完.

引理 2.4.3 *[25] 设 X 是正则空间. 空间 X 的 fine 拟一致结构有可数基当且仅当 X 是仅有有限多个非孤立点的度量空间.*

定义 2.4.4 *[34] 设 X 是拓扑空间.*

(1) X 上的关系 V 称为 X 上的邻域网, 如果对每一 $x \in X$,

$$V(x) = \{y \in X : (x, y) \in V\}$$

是 x 在 X 中的邻域.

(2) X 的邻域网序列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 X 上的正规序列, 如果对每一 $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$$

.

(3) X 的邻域网 V 称为正规的, 如果 V 是 X 的某一正规序列中的一元素.

(4) 拓扑空间 X 称为 z 空间, 如果 X 的每一邻域网是正规的.

已经知道: 每一仅具有有限多个非孤立点的拓扑空间是 z 空间 [25, 命题 6.25].

引理 2.4.5 *[45] 拓扑空间 X 是 z 空间当且仅当 $i_2 : \widetilde{X}^2 \to FP_2(X)$ 是闭映射.*

定理 2.4.6 *对一正则空间 X, 下列等价.*

(1) $FP_2(X)$ 是第一可数空间;

(2) $FP_2(X)$ 是可度量空间;

(3) X 是度量空间且 X 的所有非孤立点之集是有限的;

(4) $AP_2(X)$ 是第一可数空间;

(5) $AP_2(X)$ 是可度量空间;

(6) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $AP_n(X)$ 是第一可数空间.

证明 条件 (3)、(4)、(5) 和 (6) 的等价性在 [46, 定理 5.28] 中建立.

由引理 2.4.2, 2.4.3 知, (1) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2). 再由引理 2.4.2, 2.4.3, $FP_2(X)$ 是第一可数空间. 因为 X 是 z 空间, 由引理 2.4.5, 所以

$$i_2 : \widetilde{X}^2 \to FP_2(X)$$

是闭映射. 根据 Hanai-Morita-Stone 定理 [24, 定理 4.4.17], $FP_2(X)$ 是可度量空间.

显然, (2) $\Rightarrow$ (1). 证完.

下列问题的提出是自然的.

问题 2.4.7 *设 X 是正则空间且 $n \geq 3$. 如果空间 $FP_n(X)$ $(AP_n(X))$ 是第一可数的, 那么 $FP_n(X)$ $(AP_n(X))$ 是可度量化空间吗?*

第三章　拓扑空间 X 上自由仿拓扑群的子空间 $FP_2(X)$ 的局部紧性

2003 年, P. Nickolas 和 M. Tkachenko 研究了自由拓扑群的局部紧性质 [62], 特别地, 证明了: 设 X 是完全正则空间, $F(X)$ 是 X 上的自由拓扑群, 且 $F_2(X)$ 是 $F(X)$ 中关于自由代数基 X 的约简长度不超过 2 的所有元素之集, 那么, $F_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和.

近来, F. Lin, C. Liu 和 K. Zhang [47] 证明了: 设 X 是 Hausdorff 的 μ 空间, 如果 $FP_2(X)$ 是局部紧空间, 那么 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和. 于是 F. Lin, C. Liu 和 K. Zhang [47] 提出如下问题.

问题 3.0.1 [47, 问题 4.18] 如果拓扑空间 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间吗?

本章围绕上述问题, 研究拓扑空间 X 上自由仿拓扑群的子空间 $FP_2(X)$ 的局部紧性.

在第一节, 我们直接通过拟伪度量构建拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基, 一方面, 扩充 A. Elfard 和 P. Nickolas 的一个结果: [23, 定理 3.1], 即本文引理 2.4.1; 另一方面, 也为在第二节讨论 $FP_2(X)$ 的局部紧性质提供应用.

在第二节, 研究拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 的局部紧性, 证明了: 让 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 即 $X = Y \oplus D$, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(Y)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(Y)$ 是局部紧空间 (定理 3.2.2, 推论 3.2.5). 特别地, 设 X 同胚于一 Hausdorff 紧空间与一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(X)$ 在单位元 e 是局部紧的 (推论 3.2.3). 这些结果部分回答了 F. Lin, C. Liu 和 K. Zhang [47] 提出的上述问题.

本章内容取材于作者最近发表的论文 "Z. Cai, On local compactness of the subspace $FP_2(X)$ of $FP(X)$, Topol. Appl. 197(2016), 181-188", 即参考文献 [12].

§3.1 $FP_2(X)$ 在单位元的局部基构造

A. Elfard 和 P. Nickolas 在 [23, 定理 3.1] 中通过 fine 拟一致结构构建了拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基, 即本文引理 2.4.1, 为第二节研究 $FP_2(X)$ 的局部紧性, 本节再直接通过拟伪度量构建拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基.

让 ρ 是集 X 上的拟伪度量且 $\mathcal{U}$ 是 X 上拟一致结构. 我们说 ρ 是关于 $\mathcal{U}$ 拟一致的, 如果对每一 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得当 $(x, y) \in V$, 有 $\rho(x, y) < \varepsilon$.

引理 3.1.1 *如果集 X 上的拟伪度量 ρ 是关于 X 上的拟一致结构 $\mathcal{U}$ 拟一致的, 那么对每一 $x \in X$,*

$$\rho_x : X \to \mathbb{R}$$

是上半连续的, 其中 X 赋予拟一致结构 $\mathcal{U}$ 诱导的拓扑.

证明 设 $y \in X$ 且 $\rho_x(y) < r$. 置 $\varepsilon = r - \rho_x(y)$. 那么 $\varepsilon > 0$. 因为 ρ 是关于 $\mathcal{U}$ 拟一致的, 所以存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得当 $(x, y) \in U$, $\rho(x, y) < \varepsilon$. 因此 $y \in \mathrm{int}U(y)$, 其中

$$U(y) = \{z \in X : (y, z) \in U\}.$$

故, 对每一 $z \in \mathrm{int}U(y)$, 有

$$\rho_x(z) = \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho_x(y) + \rho(y, z) < \rho_x(y) + \varepsilon = r.$$

从而

$$\rho_x : X \to \mathbb{R}$$

是上半连续的. 证完.

引理 3.1.2 *[25, 36] 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是集 X 上自反关系 (reflexive relations) 序列, 且对每一 $n \in \mathbb{N}$,*

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n.$$

那么存在 X 上的拟伪度量 d 使得对每一 $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} \subset \{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_n.$$

定理 3.1.3 设 (X,τ) 是拓扑空间. 对每一 $\rho\in\mathcal{D}_1(X)$, 置

$$U_\rho(e)=\{x^{-1}y:x,y\in X,\rho(x,y)<1\}\cup\{yx^{-1}:x,y\in X,\rho(x,y)<1\}.$$

那么 $\{U_\rho(e):\rho\in\mathcal{D}_1(X)\}$ 是单位元 e 在 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 中的局部基.

证明 显然, 对每一 $\rho\in\mathcal{D}_1(X)$, $U_\rho(e)\subset FP_2(X)$.

首先, 我们证明 $\{U_\rho(e):\rho\in\mathcal{D}_1(X)\ \}$ 是单位元 e 在 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 中的网.

设 $e\in U$ 且 U 在 $G=FP(X)$ 中是开的. 置

$$O=U_L\cap U_R\cap(X\times X)=\{(x,y)\in X\times X:x^{-1}y\in U \text{ 且 } yx^{-1}\in U\}.$$

那么由注记 1.2.3, $O\in\mathcal{FN}(\tau)$. 由定义 1.2.2, 存在由 $\mathcal{FN}(\tau)$ 的元组成的序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $U_1=O$ 且引理 3.1.2 的条件满足. 因此, 存在 X 上的拟伪度量 d 使得对每一 $n\in\mathbb{N}$,

$$U_{n+1}\subset\{(x,y):d(x,y)<\frac{1}{2^n}\}\subset U_n.$$

让

$$\rho(x,y)=\min\{2d(x,y),1\},$$

对任意 $x,y\in X$. 由注记 1.2.5, ρ 是 X 上的拟伪度量. 下面验证: ρ 是关于 $\mathcal{FN}(\tau)$ 拟一致的. 事实上, 对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^m}<\varepsilon$. 令 $V=U_{m+2}\in\mathcal{FN}(\tau)$. 如果 $(x,y)\in V$, 那么

$$\rho(x,y)\le 2d(x,y)<2\times\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2^m}<\varepsilon.$$

从而由引理 3.1.1,

$$\rho_x:X\to\mathbb{R}$$

是上半连续的且 $\rho\in\mathcal{D}_1(X)$. 另外, 我们有

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in X\times X:\rho(x,y)<1\}&=\{(x,y)\in X\times X:2d(x,y)<1\}\\&=\{(x,y)\in X\times X:d(x,y)<\frac{1}{2}\}\\&\subset U_1=O.\end{aligned}$$

断言. $U_\rho(e) \subset U \cap FP_2(X)$.

事实上, 设 $x^{-1}y \in U_\rho(e)$. 那么 $\rho(x,y) < 1, (x,y) \in O$ 且 $x^{-1}y \in U$. 类似地, 设 $yx^{-1} \in U_\rho(e)$. 那么 $\rho(x,y) < 1, (x,y) \in O$ 且 $yx^{-1} \in U$. 从而断言证完.

其次, 我们证明: 对每一 $\rho \in \mathcal{D}_1(X)$, $U_\rho(e)$ 在 $FP_2(X)$ 中是开的.

由注记 1.2.8, 只需证明 $U_\rho(e) = W \cap FP_2(X)$, 其中

$$W = B_{\hat{\rho}}(e,1) = \{h \in FP(X) : \hat{\rho}(e,h) < 1\}$$

在 $FP(X)$ 中是开的.

设 $x^{-1}y \in U_\rho(e)$. 那么, 由 $\hat{\rho}$ 的不变性,

$$\hat{\rho}(e, x^{-1}y) = \hat{\rho}(xe, xx^{-1}y) = \hat{\rho}(x,y) = \rho(x,y) < 1$$

且 $x^{-1}y \in W$.

类似地, 设 $yx^{-1} \in U_\rho(e)$. 那么

$$\hat{\rho}(e, yx^{-1}) = \hat{\rho}(ex, yx^{-1}x) = \hat{\rho}(x,y) = \rho(x,y) < 1$$

且 $yx^{-1} \in W$.

从而, $U_\rho(e) \subset W \cap FP_2(X)$.

另一方面, 设 $h \in W \cap FP_2(X)$. 如果 $h = e$, 显然 $h \in U_\rho(e)$. 假设 $h \neq e$. 因为 $\hat{\rho}(e,h) < 1$, 由注记 1.2.9, 存在两不同的点 $s, t \in X$ 使得 $h = st^{-1}$ 或 $h = s^{-1}t$.

当 $h = st^{-1}$, 有

$$\rho(t,s) = \hat{\rho}(t,s) = \hat{\rho}(tt^{-1}, st^{-1}) = \hat{\rho}(e, st^{-1}) = \hat{\rho}(e,h) < 1$$

且 $h \in U_\rho(e)$.

类似地, 当 $h = s^{-1}t$, 有

$$\rho(s,t) = \hat{\rho}(s,t) = \hat{\rho}(s^{-1}s, s^{-1}t) = \hat{\rho}(e, s^{-1}t) = \hat{\rho}(e,h) < 1$$

且 $h \in U_\rho(e)$.

从而, $W \cap FP_2(X) \subset U_\rho(e)$. 证完.

§3.2 $FP_2(X)$ 的局部紧性

在本节, 我们利用上节中的定理 3.1.3, 对本章开头林福财等提出的问题 3.0.1 进行部分回答. 我们还需要一个引理.

引理 3.2.1 *[41]* 如果 Y 是完全正则空间 X 的闭子空间, 那么由 Y 生成的 $FP(X)$ 的子群 $FP(Y,X)$ 在 $FP(X)$ 中是闭的.

定理 3.2.2 让 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 即 $X = Y \oplus D$. 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(Y)$ 是局部紧空间.

证明 **断言 1**. 由 Y 生成的 $FP(X)$ 的子群 $FP(Y,X)$ 拓扑同构于 Y 上的自由仿拓扑群 $FP(Y)$.

事实上, 因为 $X = Y \oplus D$, 所以 Y 是 X 的收缩核, 即, 存在连续映射

$$r : X \to Y$$

使得对每一 $y \in Y$, $r(y) = y$. 扩张 r 到连续同态

$$\widehat{r} : FP(X) \to FP(Y).$$

因此

$$\widehat{r}|_{FP(Y,X)} : FP(Y,X) \to FP(Y)$$

是连续的. 定义

$$h : Y \to FP(Y,X)$$

使得对于每一 $y \in Y$, $h(y) = y$. 那么映射 h 是连续的. 扩张 h 到连续同构

$$i : FP(Y) \to FP(Y,X).$$

由于

$$i^{-1} = \widehat{r}|_{FP(Y,X)},$$

于是

$$i : FP(Y) \to FP(Y,X)$$

是同胚.

必要性. 由断言 1, 我们把 $FP(Y)$ 和 $FP(X)$ 的子群 $FP(Y,X)$ 看成一致的. 那么

$$FP_2(Y) = FP(Y,X) \cap FP_2(X).$$

根据引理 3.2.1, $FP_2(Y)$ 在 $FP_2(X)$ 中是闭的. 又, 局部紧性是闭遗传的. 因此, $FP_2(X)$ 的局部紧性蕴含 $FP_2(Y)$ 的局部紧性.

充分性. 设 $FP_2(Y)$ 是局部紧的. 因为 Y 在 $FP(Y)$ 中是闭的且 $Y \subset FP_1(Y) \subset FP_2(Y)$, 所以空间 Y 及 $X = Y \oplus D$ 是局部紧的.

断言 2. $FP_2(X)$ 在长度为 2 的每一点是局部紧的.

设 $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2}$ 是 $FP_2(X)$ 中的约简元, 其中对 $i = 1,2$, $x_i \in X$ 且 $\epsilon_i = \pm 1$; 如果 $x_1 = x_2$, 那么 $\epsilon_1 = \epsilon_2$. 因为 X 是局部紧空间, 对 $i = 1,2$, 存在 x_i 在 X 中的紧邻域 K_{x_i}. 由引理 1.1.7, $U_1^{\epsilon_1} U_2^{\epsilon_2}$ 是点 w 在 $FP_2(X)$ 中的邻域, 其中对 $i = 1,2$, 当 $\epsilon_i = 1$, $U_i = K_{x_i}$; 当 $\epsilon_i = -1$, $U_i = \{x_i\}$. 因为 $FP(X)$ 是仿拓扑群, 由仿拓扑群乘积运算的连续性, 所以 $U_1^{\epsilon_1} U_2^{\epsilon_2}$ 是紧的.

断言 3. $FP_2(X)$ 在长度为 1 的每一点是局部紧的.

只需证明 $X \cup X^{-1} = X \oplus X^{-1}$ 是 $FP_2(X)$ 中的开且局部紧的子空间. $X \oplus X^{-1}$ 的局部紧是性显然的, 因为 X^{-1} 是离散空间. 由引理 2.4.2 的证明知道 $X \cup X^{-1} = X \oplus X^{-1}$ 在 $FP_2(X)$ 中是开的.

断言 4. $FP_2(X)$ 在单位元 e 是局部紧的.

通过假设, 存在单位元 e 在 $FP_2(Y)$ 中的开邻域 O 使得 O 在 $FP_2(Y)$ 中的闭包 $\mathrm{cl}_{FP_2(Y)}O$ 是紧的. 根据定理 3.1.3, 存在 Y 上的拟伪度量 d 使得 $d \in \mathcal{D}_1(Y)$ 且

$$U_d(e) = \{x^{-1}y : x,y \in Y, d(x,y) < 1\} \cup \{yx^{-1} : x,y \in Y, d(x,y) < 1\} \subset O.$$

显然, $U_d(e)$ 在 $FP_2(Y)$ 中的闭包 $\mathrm{cl}_{FP_2(Y)}U_d(e)$ 也是紧的. 注意

$$X \times X = (Y \times Y) \oplus (Y \times D) \oplus (D \times Y) \oplus (D \times D).$$

构建 X 上的拟伪度量 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足:

$$\begin{aligned}
&\rho(y_1,y_2) = d(y_1,y_2),\ \text{对任意 } y_1,y_2 \in Y;\\
&\rho(x,y) = \rho(y,x) = 1,\ \text{对任意 } x \in D, y \in Y;\\
&\rho(x_1,x_2) = 1,\ \text{对每对不同的点 } x_1,x_2 \in D.
\end{aligned}$$

那么 $\rho \in \mathcal{D}_1(X)$. 因为

$$FP_2(Y) = FP(Y, X) \cap FP_2(X) \subset FP_2(X),$$

所以

$$U_\rho(e) = \{x^{-1}y : x, y \in X, \rho(x, y) < 1\} \cup \{yx^{-1} : x, y \in X, \rho(x, y) < 1\} = U_d(e).$$

由于

$$\mathrm{cl}_{FP_2(X)} U_d(e) \subset FP_2(Y),$$

于是

$$\mathrm{cl}_{FP_2(X)} U_\rho(e) = \mathrm{cl}_{FP_2(X)} U_d(e) = (\mathrm{cl}_{FP_2(X)} U_d(e)) \cap FP_2(Y) = \mathrm{cl}_{FP_2(Y)} U_d(e).$$

从而空间 $FP_2(X)$ 在 e 也是局部紧的.

总之, 由断言 2、3、4, $FP_2(X)$ 是局部紧空间. 证完.

根据定理 3.2.2 的证明, 我们立即有下列推论.

推论 3.2.3 *设 X 同胚于一 Hausdorff 紧空间与一离散空间的拓扑和. 那么*

(1) 空间 $FP_2(X)$ 在每一不同于单位元 e 的点是局部紧的.

(2) $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(X)$ 在单位元 e 是局部紧的.

引理 3.2.4 *[47] 让 X 是拓扑空间, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $AP_2(X)$ 是局部紧空间.*

推论 3.2.5 *让 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 即 $X = Y \oplus D$. 那么下列等价.*

(1) $FP_2(X)$ 是局部紧空间;

(2) $FP_2(Y)$ 是局部紧空间;

(3) $AP_2(X)$ 是局部紧空间;

(4) $AP_2(Y)$ 是局部紧空间.

最后, 我们提两个有趣的问题结束本章.

问题 3.2.6 *如果 X 是紧空间, 对每一非负整数 n, 空间 $FP_n(X)$ 是局部紧的吗?*

问题 3.2.7 *设 X 是拓扑空间. 如果 $FP_2(X)$ 是局部紧空间, 空间 $FP_3(X)$ 是局部紧的吗?*

第四章 自由仿拓扑群中一些特殊空间的拷贝

自由拓扑群中一些特殊空间如质数空间、Arens 空间、序列空间等的拷贝被研究 [19, 43, 68]. 特别地, K. Eda、H. Ohta 和 K. Yamada [19, 定理 2.6] 证明了: 设 X 是完全正则空间, P 是稠密自嵌入的质数空间, 且 P 是第一可数的或紧的, 那么 X 上的自由 Abel 拓扑群 $A(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 X 上的自由拓扑群 $F(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 X 包含 P 的一拷贝. E. Ordman 和 B. Smith-Thomas [68] 证明了下列结果: 如果完全正则空间 X 上的自由拓扑群 $F(X)$ 是 Fréchet 的, 那么空间 X 是离散的.

本章讨论自由仿拓扑群中一些特殊空间如稠密自嵌入的质数空间 (densely self-embeddable prime space)、Arens 空间、序列空间等的拷贝, 并刻画自由仿拓扑群的 Fréchet 性, 推广自由拓扑群的相关结论.

在第一节, 建立了自由仿拓扑群中的一个同胚定理, 即证明了: 让 X 是拓扑空间, 那么对每一正整数 n, $AP(X)$ 的子空间 $C_n(X) = AP_n(X) \setminus AP_{n-1}(X)$ 同胚于 n 次对称幂 $(X \oplus -X_d)^n/S_n$ 的一子空间 (定理 4.1.3). 作为定理 4.1.3 的应用, 我们建立了一个完全正则空间上的自由 Abel 仿拓扑群关于稠密自嵌入质数空间 (densely self-embeddable prime space) 的嵌入定理, 即: 让 X 是完全正则空间, 且设 P 是具有 q 点的稠密自嵌入的质数空间, 那么 $AP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 $FP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 X 包含 P 的一拷贝 (推论 4.1.7), 这推广了 [19, 定理 2.6] 到自由 (Abel) 仿拓扑群.

在第二节, 充分利用 Arens 空间 S_2 讨论自由仿拓扑群的序列空间性质及 Fréchet 性, 证明了: 对一拓扑空间 X, 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 是 Fréchet 的, 那么 X 是离散的. 这推广了 E. Ordman 和 B. Smith-Thomas [68] 关于自由拓扑群的相应结论.

本章内容取材于作者、林寿教授和刘川教授最近录用的论文 "Z. Cai, S. Lin, C. Liu, Copies of special spaces in free (Abelian) paratopological groups, Houst. J. Math., Accepted", 即参考文献 [16].

§4.1 自由仿拓扑群中的一个同胚定理及其应用

A. Arhangel'skiĭ 在文 [4, 5] 中证明了下列定理.

定理 4.1.1 *让 $F(X)$ $(A(X))$ 表示完全正则空间 X 上的自由拓扑群 (自由 Abel 拓扑群). 对每一非负整数 n, $F_n(X)$ $(A_n(X))$ 表示 $F(X)$ $(A(X))$ 中关于自由基 X 的约简长度 $\leq n$ 的所有元素组成的子空间. 那么, 对每一正整数 n,*

(1) $A(X)$ 的子空间 $A_n(X)\setminus A_{n-1}(X)$ 同胚于 n 次对称幂 $(X\oplus -X)^n/S_n$ 的一子空间 [4];

(2) $F(X)$ 的子空间 $F_n(X)\setminus F_{n-1}(X)$ 同胚于 $\widetilde{X}^n$ 的一子空间, 其中 $\widetilde{X}$ 是拓扑和 $X\oplus\{e\}\oplus X^{-1}$ [5].

定理 4.1.1(2) 被推广到自由仿拓扑群, 见引理 1.1.3(1).

因此, 自然问定理 4.1.1(1) 能否推广到自由 Abel 仿拓扑群? 在本节, 我们对这一问题给出正面的回答, 即, 证明: 对每一正整数 n, $AP(X)$ 的子空间 $AP_n(X)\setminus AP_{n-1}(X)$ 同胚于 n 次对称幂 $(X\oplus -X_d)^n/S_n$ 的一子空间, 其中 $-X_d$ 表示 $AP(X)$ 的离散子空间 $-X$. 作为其应用, 我们还将证明: 如果 X 是完全正则空间且 P 是具有 q 点的稠密自嵌入的质数空间 (densely self-embeddable prime space), 那么 $AP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 $FP(X)$ 包含 P 的一拷贝当且仅当 X 包含 P 的一拷贝, 这推广了 [19, 定理 2.6] 到自由 (Abel) 仿拓扑群.

首先, 回忆 n 次对称幂 [10] 的定义.

定义 4.1.2 *让 X 是拓扑空间且 S_n 是 $n=\{0,...,n-1\}$ 上所有置换之集, 其中 n 是任一正整数. 定义集 X^n 上的等价关系 $\sim$ 如下:*

对任意 $u=(u(0),...,u(n-1)), v=(v(0),...,v(n-1))\in X^n$, 令 $u\sim v$ 当且仅当存在置换 $\varphi\in S_n$ 使得对每一 $k<n$, $u(k)=v(\varphi(k))$.

让 X^n/S_n 表示 $\sim$ 的所有等价类之集且定义映射

$$q: X^n\to X^n/S_n$$

使得对每一 $u\in X^n$, $q(u)=[u]\in X^n/S_n$. 置

$$\tau=\{O\subset X^n/S_n: q^{-1}(O) \text{ 在 } X^n \text{ 中是开的}\}.$$

商空间 $(X^n/S_n,\tau)$ 叫做 X 的 n 次对称幂.

由上述定义不难验证: 对每一 $[(x_0, ..., x_{n-1})] \in X^n/S_n$,

$$\{[U_0 \times \cdots \times U_{n-1}] : U_i \text{ 是 } x_i \text{ 在 } X \text{ 中的邻域 }, 0 \le i \le n-1\}$$

是点 $[(x_0, ..., x_{n-1})]$ 在空间 X^n/S_n 中的邻域基, 其中

$$[U_0 \times \cdots \times U_{n-1}] = \{[(y_0, ..., y_{n-1})] : y_i \in U_i, 0 \le i \le n-1\}.$$

现在, 我们建立自由 Abel 仿拓扑群的同胚定理来推广定理 4.1.1(1).

定理 4.1.3 *让 X 是拓扑空间. 那么对每一正整数 n, $AP(X)$ 的子空间*

$$C_n(X) = AP_n(X) \setminus AP_{n-1}(X)$$

同胚于 n 次对称幂 $(X \oplus -X_d)^n/S_n$ 的一子空间.

证明 定义

$$f : (X \oplus -X_d)^n/S_n \to AP_n(X)$$

使得对每一 $[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})] \in (X \oplus -X_d)^n/S_n$,

$$f([(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})]) = \epsilon_0 x_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}x_{n-1},$$

其中对 $i = 0, ..., n-1$, $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$. 容易看到 f 被良好定义.

断言 1. 限制映射

$$f|_{f^{-1}(C_n(X))} : f^{-1}(C_n(X)) \to C_n(X)$$

是连续的.

设 $[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})] \in f^{-1}(C_n(X))$ 且 $V \cap C_n(X)$ 是点 $\epsilon_0 x_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}x_{n-1}$ 在 $C_n(X)$ 中的开邻域, 其中 V 在 $AP_n(X)$ 中是开的. 由引理 1.1.8, 对 $i = 0, ..., n-1$, 存在集 $U_i \subset X$ 使得

$$\epsilon_0 U_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}U_{n-1} \subset V,$$

其中当 $\epsilon_i = 1$, U_i 是 x_i 在 X 中的邻域; 当 $\epsilon_i = -1$, $U_i = \{x_i\}$. 这样

$$f([\epsilon_0 U_0 \times \cdots \times \epsilon_{n-1}U_{n-1}] \cap f^{-1}(C_n(X))) \subset V \cap C_n(X).$$

因为 $[\epsilon_0 U_0 \times \cdots \times \epsilon_{n-1}U_{n-1}]$ 是 $[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})]$ 在空间 $(X \oplus -X_d)^n/S_n$ 中的邻域, 所以映射 $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 连续.

断言 2. 限制映射

$$f|_{f^{-1}(C_n(X))} : f^{-1}(C_n(X)) \to C_n(X)$$

是同胚的.

为证明断言 2, 只需验证下列断言 2.1、2.2、2.3.

断言 2.1. $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 是满射.

对任一 $w = \epsilon_0 x_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}x_{n-1} \in C_n(X)$, 显然

$$[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})] \in f^{-1}(C_n(X))$$

且

$$f([(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})]) = w.$$

从而 $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 是满的.

断言 2.2. $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 是单射.

对任意两点

$$[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})], [(\eta_0 y_0, ..., \eta_{n-1}y_{n-1})] \in f^{-1}(C_n(X)),$$

如果

$$f([(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})]) = f([(\eta_0 y_0, ..., \eta_{n-1}y_{n-1})]),$$

那么

$$\epsilon_0 x_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}x_{n-1} = \eta_0 y_0 + \cdots + \eta_{n-1}y_{n-1}.$$

由自由 Abel 仿拓扑群 $AP(X)$ 的定义, 存在置换 $\varphi \in S_n$ 使得对每一 $k < n$,

$$\epsilon_k x_k = \eta_{\varphi(k)} y_{\varphi(k)},$$

$$(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1}) \sim (\eta_0 y_0, ..., \eta_{n-1}y_{n-1}),$$

且

$$[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})] = [(\eta_0 y_0, ..., \eta_{n-1}y_{n-1})].$$

这表明 $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 是单射.

断言 2.3. $f|_{f^{-1}(C_n(X))}$ 是开映射.

设 O 是 $f^{-1}(C_n(X))$ 的任一开子集. 我们证明 $f(O)$ 在 $C_n(X)$ 中是开的. 假设 $[(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})] \in O$. 选取 $(X \oplus -X_d)^n/S_n$ 的开子集 V 使得

$$O = V \cap f^{-1}(C_n(X)).$$

那么

$$f(O) = f(V) \cap C_n(X).$$

对 $i = 0, ..., n-1$, 存在集 $U_i \subset X$ 使得

$$[\epsilon_0 U_0 \times \cdots \times \epsilon_{n-1}U_{n-1}] \subset V,$$

其中当 $\epsilon_i = 1$, U_i 是 x_i 在 X 中的邻域; 当 $\epsilon_i = -1$, $U_i = \{x_i\}$. 因为 X 是 T_1 空间, 不妨假设, 如果 $\epsilon_i = 1$ 且 $\epsilon_j = -1$, 那么 $x_j \notin U_i$. 从而,

$$\epsilon_0 x_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}x_{n-1} \in \epsilon_0 U_0 + \cdots + \epsilon_{n-1}U_{n-1} \subset f(O).$$

由引理 1.1.8, $f(O)$ 是 $f([(\epsilon_0 x_0, ..., \epsilon_{n-1}x_{n-1})])$ 在 $C_n(X)$ 中的邻域, 即, $f(O)$ 在 $C_n(X)$ 中是开的. 证完.

作为定理 4.1.3 的应用, 我们可以建立一个完全正则空间上的自由 Abel 仿拓扑群关于稠密自嵌入质数空间 (densely self-embeddable prime space) 的嵌入定理. 回忆几个相关的概念.

定义 4.1.4 *[8] 拓扑空间 X 称为稠密自嵌入的 (densely self-embeddable), 如果 X 的每一非空开集包含 X 的一拷贝.*

显然, 如果拓扑空间 X 至少含有两个点且是稠密自嵌入的, 那么 X 没有孤立点.

定义 4.1.5 *[8] 拓扑空间 P 称为质数空间 (prime space), 如果对任意拓扑空间 X 和 Y, $X \times Y$ 包含 P 的一拷贝, 那么或者 X 或者 Y 包含 P 的一拷贝.*

引理 4.1.6 *[19, 命题 2.1] 让 X 是完全正则空间. 设 P 是稠密自嵌入的质数空间且某 n 次对称幂 X^n/S_n 包含 P 的一拷贝, 其中 $n \geq 1$. 那么空间 X 本身包含 P 的一拷贝.*

拓扑空间 X 的一点 x 称为 q 点 [58], 如果 x 有一开邻域序列 $\{U_m\}_{m<\omega}$ 具有性质: 若对每一 $m<\omega$, $x_m \in U_m$, 那么 $\{x_m : m<\omega\}$ 包含于 X 的某一可数紧子集. 这样的序列 $\{U_m\}_{m<\omega}$ 称为 q 点 x 的 q 序列. 显然, 每一第一可数空间或可数紧空间具有 q 点.

下列推论 4.1.7 推广了 [19, 定理2.6] 到自由 (Abel) 仿拓扑群.

推论 4.1.7 *让 X 是完全正则空间. 设 P 是具有 q 点的稠密自嵌入的质数空间. 那么下列等价.*

(1) $AP(X)$ 包含 P 的一拷贝;

(2) $FP(X)$ 包含 P 的一拷贝;

(3) X 包含 P 的一拷贝.

证明 $(3) \Rightarrow (1),(2)$. 这是显然的.

$(1) \Rightarrow (3)$. 设 $AP(X)$ 包含 P 的一拷贝. 不失一般性, 假设 P 至少含有两个点且是 $AP(X)$ 的子空间. 让 $\{U_m\}_{m<\omega}$ 是一 q 点在空间 P 的 q 序列. 那么存在 $m_0, n_0 < \omega$ 使得 $U_{m_0} \subset AP_{n_0}(X)$. 否则, 对任意 $m, n < \omega$, 有 $U_m \not\subset AP_n(X)$. 特别地, 对每一 $m<\omega$, 选取 $x_m \in U_m \setminus AP_m(X)$. 这样 $\{x_m : m<\omega\}$ 包含于 P 的某一可数紧子集. 由引理 1.1.6, $\{x_m : m<\omega\} \subset AP_k(X)$, 对某一正整数 k. 矛盾. 因为空间 P 是稠密自嵌入的, 所以 U_{m_0} 包含 P 的一拷贝, 从而 $AP_{n_0}(X)$ 包含 P 的一拷贝.

现在, 令 n 是使得 $AP_n(X)$ 包含 P 的一拷贝的最小正整数. 因为 $AP_{n-1}(X)$ 在 $AP(X)$ 中是闭的且 P 是稠密自嵌入的, 由 n 的选择, 所以 $AP_n(X) \setminus AP_{n-1}(X)$ 包含 P 的一拷贝. 根据定理 4.1.3, $(X \oplus -X_d)^n / S_n$ 包含 P 的一拷贝. 由引理 4.1.6, $X \oplus -X_d$ 包含 P 的一拷贝. 因为空间 P 没有孤立点, 所以 X 包含 P 的一拷贝.

$(2) \Rightarrow (3)$. 由引理 1.1.3(1), 其证明与 "$(1) \Rightarrow (3)$" 类似. 证完.

已经知道, 例如参考 [8, 19], 空间 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$、$\beta\omega \setminus \omega$、$2^\kappa$ 都是稠密自嵌入的质数空间, 且 $\beta\omega \setminus \omega$ 包含 $\beta\omega$ 的一拷贝, 其中它们均赋予通常拓扑且 κ 是任一无限基数.

推论 4.1.8 *让 X 是完全正则空间且 P 是这些空间 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$、$\beta\omega \setminus \omega$、$2^\kappa$、$\beta\omega$ 的任意一个. 那么下列等价.*

(1) $AP(X)$ *包含* P *的一拷贝;*

(2) $FP(X)$ *包含* P *的一拷贝;*

(3) X *包含* P *的一拷贝.*

§4.2 自由仿拓扑群的 Fréchet 性

拓扑空间 X 称为 *Fréchet* 空间 [26], 如果对每一 $A \subset X$ 及每一 $x \in \overline{A}$, 存在由 A 中的点组成的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 显然, 每一 Fréchet 空间是序列空间.

定义 4.2.1 *[2] 让*

$$X = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2.$$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 函数之集. 对每一 $n, m, k \in \mathbb{N}$, 置

$$V(n,m) = \{n\} \cup \{(n,k) : k \geq m\}.$$

对每一 $x \in \mathbb{N}^2$, 置

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}.$$

对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathcal{B}(n) = \{V(n,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

让

$$\mathcal{B}(0) = \{\{0\} \cup \bigcup_{n\geq i} V(n, f(n)) : i \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}.$$

由邻域系 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 生成的拓扑空间 X 称为 Arens 空间并记为 S_2.

不难验证 S_2 是序列空间, 但不是 Fréchet 空间.

引理 4.2.2 *设 X 是完全正则空间.*

(1) 让 $L = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $FP(X)$ 中的收敛于单位元 e 的非平凡序列. 那么对每一 $p \in \mathbb{N}$, 存在 $q \in \mathbb{N}$、$y \in X \cup X^{-1}$ 及 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{y^q x_{n_k} y^{-q}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e, 且对每一 $k \in \mathbb{N}$, 有 $l(y^q x_{n_k} y^{-q}) > p$.

(2) 让 $L = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $AP(X)$ 中的收敛于单位元 0 的非平凡序列. 那么对每一 $p \in \mathbb{N}$, 存在收敛于单位元 0 的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对每一 $n \in \mathbb{N}$, 有 $l(y_n) > p$.

证明 (1) 由引理 1.1.6, $L \subset FP_m(X)$, 对某 $m \in \mathbb{N}$. 不失一般性, 我们假设, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $l(x_n) = s$ 对某 $s \leq m$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 记 $x_n = x_{n,1} \cdots x_{n,s}$, 其中 $x_{n,1}, ..., x_{n,s} \in X \cup X^{-1}$. 容易看到: 或者

$$|\{n : x_{n,1} \in X\}| = \omega$$

或者

$$|\{n : x_{n,1} \in X^{-1}\}| = \omega.$$

不失一般性, 假设对每一 $n \in \mathbb{N}$, $x_{n,1} \in X$. 如果对某一 $x_0 \in X \cup X^{-1}$,

$$|\{n : x_{n,s} = x_0, n \in \mathbb{N}\}| = \omega,$$

选取 $y \in X$ 使得若 $x_0 \in X$, $y \neq x_0$; 若 $x_0 \in X^{-1}$, $y = x_0^{-1}$. 令 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 L 的子序列满足对每一 $k \in \mathbb{N}$, 有 $x_{n_k,s} = x_0$. 选取 $q > p$, 那么 $\{y^q x_{n_k} y^{-q}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e 且对每一 $k \in \mathbb{N}$, 有 $l(y^q x_{n_k} y^{-q}) = 2q + s > p$. 否则, 存在 L 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得若 $i \neq j$, 则 $x_{n_i,s} \neq x_{n_j,s}$. 若 $x_{n_1,s} \in X$, 令 $y = x_{n_1,s}$; 若 $x_{n_1,s} \in X^{-1}$, 令 $y = x_{n_1,s}^{-1}$. 选取 $q > p$, 那么存在 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{y^q x_{n_{k_j}} y^{-q}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e 且对每一 $j \in \mathbb{N}$, 有 $l(y^q x_{n_{k_j}} y^{-q}) = 2q + s > p$. 证完.

(2) 由引理 1.1.6, $L \subset AP_m(X)$, 对某 $m \in \mathbb{N}$. 不失一般性, 我们假设, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $l(x_n) = s$ 对某 $s \leq m$. 给定 $p \in \mathbb{N}$, 选取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $k \times s > p$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 让 $y_n = kx_n$, 那么 $l(y_n) > p$. 由 $AP(X)$ 中乘积运算的连续性, 序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于单位元 0. 证完.

引理 4.2.3 *[41, 定理 3.11]* 设 X 是完全正则空间且 C 是 $FP(X)$ 的任意子集. 如果对每一 $n \in \mathbb{N}$, $C \cap FP_n(X)$ 是有限的, 那么 C 是 $FP(X)$ 的闭离散子集. 类似断言对 $AP(X)$ 成立.

定理 4.2.4 设 X 是完全正则空间. 如果 $FP(X)$ 包含一非平凡的收敛序列, 那么 $FP(X)$ 包含 S_2 的一闭拷贝. 类似断言对 $AP(X)$ 成立.

证明 如果 $FP(X)$ 包含一非平凡的收敛序列, 那么存在一非平凡的收敛于单位元 e 的序列 $L = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由引理 1.1.6, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $L \subset FP_{n_0}(X)$, 这蕴含对每一 $n \in \mathbb{N}$, $l(x_n) \leq n_0$. 由引理 4.2.2, 存在收敛于单位元 e 的序

列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得每一 t_k 的长度大于 $2n_0$. 这样 $\{x_1t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_1, 且对每一 $k\in\mathbb{N}$, $l(x_1t_k)>n_0$. 对每一 $k\in\mathbb{N}$, 让 $y_{1,k}=x_1t_k$. 置 $L_1=\{y_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 再次由引理 1.1.6, 选取 $n_1\in\mathbb{N}$ 使得 L_1 中每一元的长度小于 n_1. 通过归纳, 选取序列 $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 及序列 $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中 $n_1<n_2<...$, $L_i=\{y_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_i 且对任意 $i,k\in\mathbb{N}$, $n_{i-1}<l(y_{i,k})<n_i$. 置

$$S=\{e\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{y_{n,k}:n,k\in\mathbb{N}\}.$$

断言. S 在 $FP(X)$ 中是闭的且同胚于 S_2.

令 $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 由引理 4.2.3, 集 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{y_{n,k}:k<f(n)\}$ 在 $FP(X)$ 中是闭离散的. 那么对每一 $i\in\mathbb{N}$, 集

$$\{e\}\cup\bigcup_{n\geq i}\{x_n\}\cup\{y_{n,k}:k\geq f(n)\}$$

是 e 在 S 中的开邻域. 容易看到: 对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\{x_n\}\cup\{y_{n,k}:k\geq f(n)\}$ 在 S 中是开的且对任意 $n,k\in\mathbb{N}$, $\{y_{n,k}\}$ 在 S 中是开的. 从而空间 S 同胚于 S_2.

现在我们证明 S 在 $FP(X)$ 中是闭的. 假设 $p\notin S$. 因为 X 是完全正则的, 由引理 1.1.5, $FP(X)$ 是 Hausdorff 空间. 由于 $\{e\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是紧的, 存在 $FP(X)$ 的开集 U 及 V 使得

$$p\in U,\{e\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset V \text{ 且 } U\cap V=\emptyset.$$

从而存在 $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 使得

$$\{e\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\cup\{y_{n,k}:k\geq f(n)\}\subset V.$$

让

$$W=U\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{y_{n,k}:k<f(n)\}.$$

由引理 4.2.3, 集 W 是 p 在 $FP(X)$ 中的开邻域且 $W\cap S=\emptyset$, 进而 S 在 $FP(X)$ 中是闭的.

关于 $AP(X)$ 的情况, 证明类似. 证完.

推论 4.2.5 设 X 是完全正则空间. 如果 $FP(X)$ 是序列空间, 那么或者 X 离散或者 $FP(X)$ 包含 S_2 的一闭拷贝. 类似断言对 $AP(X)$ 成立.

证明 如果 X 不离散, 那么 $FP(X)$ 也不是离散的. 因为 $FP(X)$ 是序列空间, 所以 $FP(X)$ 包含一非平凡的收敛序列. 通过定理 4.2.4, $FP(X)$ 包含 S_2 的一闭拷贝.

关于 $AP(X)$ 的情况, 证明类似. 证完.

推论 4.2.6 *设 X 是完全正则空间. 如果 $FP(X)$ 或 $AP(X)$ 是 Fréchet 空间, 那么空间 X 是离散的.*

最后, 我们提一个问题结束本章.

问题 4.2.7 *设 X 是完全正则空间. 固定 $n \in \mathbb{N}$. 如何刻画拓扑空间 X 使得 $FP_n(X)$ ($AP_n(X)$) 是 Fréchet 空间?*

第五章　自由仿拓扑群的 MP 等价性

1945 年, 自由拓扑群的 M 等价性被引进. 两个完全正则的拓扑空间 X 和 Y 称为 M 等价的 [57], 如果 X 上的自由拓扑群 $F(X)$ 和 Y 上的自由拓扑群 $F(Y)$ 是拓扑同构的. 两个完全正则的拓扑空间 X 和 Y 称为 A 等价的 [57], 如果 X 上的自由 Abel 拓扑群 $A(X)$ 和 Y 上的自由 Abel 拓扑群 $A(Y)$ 是拓扑同构的. 1945 年始, A. Markov [57], M. Graev [29], V. Pestov [70], M. Tkachenko [80], A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko [8] 等人先后研究了自由拓扑群的 M 等价性和 A 等价性, 获得了一系列重要成果. 特别地, 设两个完全正则的拓扑空间 X 和 Y 是 A 等价的, 如果 X 是伪紧的, 那么 Y 也是伪紧的 [29]. 设 $\mathcal{P}$ 是遗传的、可数可加的拓扑性质, 且 X 和 Y 是 M 等价的完全正则空间, 如果 X 具有性质 $\mathcal{P}$, 那么 Y 也具有性质 $\mathcal{P}$ [70].

自从 2002 年自由仿拓扑群引进以来, 给定两个拓扑同构的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$, 专门探讨其基底 X 和 Y 的拓扑性质之间的联系的研究论文至今仍然没有问世. 自然, 这是一类非常重要的课题. 本章将致力于这课题的研究.

在第一节, 通过构造一例子, 我们首先证明两个拓扑同构的自由仿拓扑群使其基底非同胚的存在性 (定理 5.1.11).

在第二节, 讨论在给定两个拓扑同构的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$ 的条件下, 基底 X 和 Y 的拓扑性质的保持性. 证明了伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等是 MP 不变性质. 即, 设两个完全正则空间 X 和 Y 是 AP 等价的, 更一般地, MP 等价的, 如果 Y 是伪紧的, 那么 X 也是伪紧的 (定理 5.2.6), 这推广了 M. Graev [29] 关于自由拓扑群的相应结论. 让 X 和 Y 是 MP 等价的拓扑空间, 如果 X 是遗传 Lindelöf 空间, 那么 Y 也是遗传 Lindelöf 空间; 如果 X 是遗传可分空间, 那么 Y 也是遗传可分空间; 如果 X 是 cosmic 空间, 那么 Y 也是 cosmic 空间 (推论 5.2.12), 这拓展了 V. Pestov [70] 关于自由拓扑群的相关结果.

本章内容取材于作者和林寿教授最近完成的论文 "Z. Cai, S. Lin, MP-equivalence of free paratopological groups, submitted", 即参考文献 [14].

§5.1　两个拓扑同构的自由仿拓扑群使其基底非同胚的存在性

为叙述的简便, 先引进几个概念.

定义 5.1.1 *两个拓扑空间 X 和 Y 称为 MP 等价的, 如果 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$ 是拓扑同构的.*

定义 5.1.2 *两个拓扑空间 X 和 Y 称为 AP 等价的, 如果 $AP(X)$ 和 $AP(Y)$ 是拓扑同构的.*

定义 5.1.3 *让 $\mathcal{P}$ 是拓扑性质. 设拓扑空间 X 具有性质 $\mathcal{P}$, 如果与空间 X 是 MP 等价的 (AP 等价的) 每一拓扑空间 Y 仍具有性质 $\mathcal{P}$, 那么称 $\mathcal{P}$ 是 MP 不变的 (AP 不变的).*

显然, 两个同胚的拓扑空间是 MP 等价的, 本节的主要任务是将证明其逆不成立 (见定理 5.1.11).

让我们回忆几个相关概念.

让 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的覆盖. 空间 X 由 $\mathcal{P}$ 决定 [32], 或者空间 X 由 $\mathcal{P}$ 生成 [8], 如果 $U \subset X$ 在 X 中是开的 (闭的) 当且仅当对每一 $P \in \mathcal{P}$, $U \cap P$ 在 P 中是开的 (闭的). 如果拓扑空间 X 能表示为递增的紧集列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的并, 且由 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 决定, 那么 X 称为 k_ω 空间 [27] 且称 $X = \cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的 k_ω 分解. 如果 X 和 Y 都是 Hausdorff 的 k_ω 空间, 那么 $X \times Y$ 也是 k_ω 空间 [48]. 不难验证: 如果 $\cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是拓扑空间 X 的 k_ω 分解且 K 是 X 的紧子集, 那么存在某 n 使得 $K \subset X_n$.

我们需要几个引理.

引理 5.1.4 *让 $\cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是函数 Hausdorff 的可数 k_ω 空间 X 的 k_ω 分解. 那么 $FP(X)$ 由 $\{FP(X_n, X) : n \in \mathbb{N}\}$ 决定, 其中每一 $FP(X_n, X)$ 表示由 X_n 生成的 $FP(X)$ 的子群.*

证明　记 $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 让

$$H_n = \{x_i : i \leq n\}$$

且

$$E_n = \{x_i^{-1} : i \le n\}.$$

显然, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m_n \in \mathbb{N}$ 使得 $H_n \subset X_{m_n}$. 不失一般性, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 假设 $m_i < m_{i+1}$. 置

$$Y = X \cup X^{-1}$$

且对每一 $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = E_n \cup X_{m_n}.$$

由引理 1.1.4, 空间 X^{-1} 是离散的, 所以空间 Y 由 $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 决定. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$K_n = t_n((Y_n \cup \{e\})^n),$$

其中 t_n 表示从 $(FP(X))^n$ 到 $FP(X)$ 的乘积映射, 于是通过 Y_n 的紧性及映射 t_n 的连续性, 得 K_n 是紧的. 显然,

$$FP(X) = \cup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

断言. 空间 $FP(X)$ 由 $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ 决定.

令 τ 是 $FP(X)$ 的原始拓扑. 在集 $F_a(X)$ 上定义新拓扑 τ^* 如下. $F_a(X)$ 的子集 $O \in \tau^*$ 当且仅当对每一 $n \in \mathbb{N}$, $O \cap K_n$ 在 K_n 中是开的, 其中每一 K_n 赋予 $(FP(X), \tau)$ 的子空间拓扑. 显然, $\tau \subset \tau^*$ 且对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\tau|_{K_n} = \tau^*|_{K_n}$. 我们将证明 $(F_a(X), \tau^*)$ 是仿拓扑群, 即, 乘积映射

$$op_2 : (F_a(X), \tau^*) \times (F_a(X), \tau^*) \to (F_a(X), \tau^*)$$

是连续的. 事实上, 假设 C 是 $(F_a(X), \tau^*) \times (F_a(X), \tau^*)$ 的任一紧子集. 那么 $C \subset C_1 \times C_1$, 其中 C_1 是 $(F_a(X), \tau^*)$ 的某一紧子集. 因为 $(F_a(X), \tau^*)$ 是 k_ω 空间, 所以 $C_1 \subset K_{n_0}$ 对某 n_0, 从而

$$op_2(C) \subset op_2(C_1 \times C_1) \subset op_2(K_{n_0} \times K_{n_0}) \subset K_{2n_0}.$$

又 $(F_a(X), \tau)$ 是仿拓扑群, 所以

$$op_2|_{(C, \tau\times\tau|_C)} : (C, \tau \times \tau|_C) \to (K_{2n_0}, \tau|_{K_{2n_0}})$$

是连续的. 根据等式

$$\tau \times \tau|_C = \tau^* \times \tau^*|_C$$

且

$$\tau|_{K_{2n_0}} = \tau^*|_{K_{2n_0}},$$

映射

$$op_2|_{(C,\tau^*\times\tau^*|_C)} : (C, \tau^* \times \tau^*|_C) \to (K_{2n_0}, \tau^*|_{K_{2n_0}})$$

连续. 因为 X 是函数 Hausdorff 的, $(FP(X), \tau)$ 是 Hausdorff (引理 1.1.5). 这样 $(F_a(X), \tau^*) \times (F_a(X), \tau^*)$ 是 Hausdorff k_ω 空间. 由 [24, 定理 3.3.21],

$$op_2 : (F_a(X), \tau^*) \times (F_a(X), \tau^*) \to (F_a(X), \tau^*)$$

连续.

现在, 设 $A \subset Y$ 且 $A \in \tau^*|_Y$. 那么存在 $(F_a(X), \tau^*)$ 的开子集 O 使得 $A = O \cap Y$, 从而对每一 $n \in \mathbb{N}$, 由 $Y_n \subset K_n$, 得

$$A \cap Y_n = O \cap Y \cap Y_n = O \cap Y_n \in \tau^*|_{Y_n} = \tau|_{Y_n}.$$

因此 $A \in \tau|_Y$ 且 $\tau^*|_Y = \tau|_Y$, 于是 $\tau^*|_X = \tau|_X$. 由注记 1.1.2, $FP(X)$ 的拓扑 τ 是 $F_a(X)$ 上诱导 X 的原始拓扑的最细的仿拓扑群拓扑, 那么 $\tau^* = \tau$. 断言证完.

显然, 对每一 $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \subset FP(X_{m_n}, X),$$

由断言, 故 $FP(X)$ 由 $\{FP(X_{m_n}, X) : n \in \mathbb{N}\}$ 决定, 等价地, $FP(X)$ 由 $\{FP(X_n, X) : n \in \mathbb{N}\}$ 决定. 证完.

注 5.1.5 *引理 5.1.4 改进了 N. Pyrch 的一个主要结果 [71, 定理 2]: 如果 X 是函数 Hausdorff 的可数 k_ω 空间, 那么 $FP(X)$ 是 k_ω 空间.*

容易验证下列两个引理.

引理 5.1.6 *设 (G, τ_1) 与 (G, τ_2) 都是仿拓扑群, $Y \subset G$ 且 $\tau_1|_Y = \tau_2|_Y$. 那么对每一 $a \in G$, 有 $\tau_1|_{aY} = \tau_2|_{aY}$.*

引理 5.1.7 *让 φ 是群 G 到群 H 的满同态. 如果 (G, τ) 是仿拓扑群, 那么 (H, σ) 是仿拓扑群, 其中 $\sigma = \{\varphi(V) : V \in \tau\}$.*

我们引进自由仿拓扑群的拓扑基的概念, 它是讨论自由仿拓扑群 MP 等价性非常有用的工具.

拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 Y 称为 $FP(X)$ 的*拓扑基*, 如果 Y 是 $FP(X)$ 的自由代数基[1] 且自由群 $F_a(X)$ 上的诱导 Y 的原始拓扑的最细的仿拓扑群拓扑与 $FP(X)$ 的拓扑一致. Abel 情况的拓扑基类似定义. 特别地, 由注记 1.1.2, $FP(X)$ $(AP(X))$ 的子空间 X 是 $FP(X)$ $(AP(X))$ 的拓扑基.

引理 5.1.8 *如果 Y 是拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的拓扑基, 那么 X 和 Y 是 MP 等价是的. 类似断言对 Abel 情况成立.*

证明 令

$$i : Y \to FP(X)$$

是恒等连续映射. 扩张映射 i 到连续同态

$$\hat{i} : FP(Y) \to FP(X).$$

因为 Y 是 $FP(X)$ 的自由代数基, 所以 $\hat{i} : FP(Y) \to FP(X)$ 是同构. 让 τ 和 $\mathcal{T}$ 各自表示 $FP(Y)$ 和 $FP(X)$ 的原始拓扑. 在 $F_a(X)$ 上定义新拓扑

$$\sigma = \{\hat{i}(U) : U \in \tau\}.$$

由引理 5.1.7, $(F_a(X), \sigma)$ 是仿拓扑群. 容易看到:

$$\hat{i} : (FP(Y), \tau) \to (F_a(X), \sigma)$$

是同胚. 进而, $\tau|_Y = \sigma|_Y$, 即, σ 诱导 Y 上的原始拓扑. 因为 Y 是 $FP(X)$ 的拓扑基, 所以 $\mathcal{T} \supset \sigma$, 从而

$$\hat{i} : (FP(Y), \tau) \to (FP(X), \mathcal{T})$$

是开映射. 故,

$$\hat{i} : (FP(Y), \tau) \to (FP(X), \mathcal{T})$$

是拓扑同构, 即, X 和 Y 是 MP 等价的.

Abel 情况类似证明. 证完.

[1] Y 是 $FP(X)$ 的自由代数基, 如果 Y 代数生成 $F_a(X)$ 且在 $F_a(X)$ 中, 集 Y 的元素之间没有代数关系.

注 5.1.9 一个拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的每一拓扑基 Y 在 $FP(X)$ 中是闭的. 类似断言对 *Abel* 情况成立.

事实上, 由引理 *5.1.8*, 恒等连续映射

$$i : Y \to FP(X)$$

能扩张到拓扑同构

$$\hat{i} : FP(Y) \to FP(X).$$

由引理 *1.1.4*, Y 在 $FP(Y)$ 中是闭的, 从而 $\hat{i}(Y) = Y$ 在 $FP(X)$ 中是闭的. *Abel* 情况类似证明.

定义 5.1.10 *[6]* 让

$$X = \{0\} \cup \mathbb{N}^2.$$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的所有函数之集. 对任意 $n, m, k \in \mathbb{N}$, 置

$$W(n, m) = \{(n, k) : k \geq m\}.$$

对每一 $x \in \mathbb{N}^2$, 置

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}.$$

让

$$\mathcal{B}(0) = \{\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W(n, f(n)) : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}.$$

由邻域系 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ 生成的拓扑空间 X, 称为可数扇空间并记为 S_ω.

定理 5.1.11 让 $\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是互不相交的收敛序列组成的可数族, 其中每一

$$C_i = \{x_i\} \cup \{x_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}$$

同胚于实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, 且 $\{x_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ 收敛于 x_i. 那么拓扑和空间 $X = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ 与可数扇空间 S_ω 是 MP 等价的.

证明 空间 X 是具有 k_ω 分解 $X = \cup\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的可度量化的可数 k_ω 空间, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \bigcup_{i \leq n} C_i$. 由引理 5.1.4, $FP(X)$ 由 $\{FP(D_n, X) : n \in \mathbb{N}\}$ 决定. 置

$$Y = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_1 x_i^{-1} C_i.$$

显然, Y 也是 $FP(X)$ 的自由代数基, 因为 X 是 $FP(X)$ 的自由代数基. 我们将证明: Y 是 $FP(X)$ 的拓扑基. 让 τ' 是自由群 $F_a(X)$ 上诱导 Y 的原始拓扑的最细仿拓扑群拓扑. 显然, τ' 细于 $FP(X)$ 的拓扑 τ 且 $\tau'|_Y = \tau|_Y$. 由引理 5.1.6, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, $\tau'|_{C_i} = \tau|_{C_i}$. 因为 $X = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} C_i$, 所以

$$id_X : (X, \tau|_X) \to (X, \tau'|_X)$$

连续, 进而 $\tau'|_X = \tau|_X$. 由注记 1.1.2, $\tau' = \tau$, 即, Y 是 $FP(X)$ 的拓扑基. 由引理 5.1.8, X 和 Y 是 MP 等价的. 剩下验证: Y 同胚于空间 S_ω.

对每一 $i \in \mathbb{N}$, 令 $L_i = x_1 x_i^{-1} C_i$. 置

$$Y_0 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i.$$

因为 $FP(X)$ 是仿拓扑群, 所以对每一 $i \in \mathbb{N}$, L_i 收敛于 x_1. 显然, 对任意不同的 $i, j \in \mathbb{N}$, 有

$$L_i \cap L_j = \{x_1\}.$$

因为 X 是函数 Hausdorff 的, $FP(X)$ 是 Hausdorff 的 (引理 1.1.5). 因此对每一 $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_0 \cap FP(D_n, X) = \bigcup_{i\le n} L_i$$

是 $FP(X)$ 的紧闭集. 那么 Y_0 在 $FP(X)$ 中是闭的, 因为 $FP(X)$ 由 $\{FP(D_n, X) : n \in \mathbb{N}\}$ 决定. 从而 Y_0 由 $\{\bigcup_{i\le n} L_i : n \in \mathbb{N}\}$ 决定. 故, Y_0 同胚于 S_ω.

由引理 1.1.4, $(X \setminus \{x_{1,j} : j \in \mathbb{N}\}) \cap Y = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 在 Y 中是闭的. 显然,

$$Y_0 \cap \{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \{x_1\}.$$

因为 X 的子空间 $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是离散空间, 所以

$$Y = Y_0 \oplus \{x_i : i \ge 2\}.$$

进而, 空间 Y 同胚于 S_ω. 证完.

注 5.1.12 *容易验证: 空间 S_ω 既不是局部紧也不是第一可数的. 因此, MP 等价性不保持局部紧性, 第一可数性或可度量性.*

§5.2 自由仿拓扑群的 MP 不变性

在本节, 我们主要研究拓扑性质如伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等的 MP 不变性.

首先, 我们证明 MP 等价的拓扑空间总是 AP 等价的.

引理 5.2.1 *[8, 命题 1.5.12] 令 G 和 H 都是仿拓扑群,*

$$p : G \to H$$

是拓扑同构. 如果 G_0 是 G 的不变子群且 $H_0 = p(G_0)$, 那么商群 G/G_0 和 H/H_0 是拓扑同构的.

引理 5.2.2 *[8, 定理 1.5.13] 令 G 和 H 都是仿拓扑群,*

$$p : G \to H$$

是开的连续满同态且 N 是同态 p 的核. 那么映射

$$\phi : G/N \to H$$

是拓扑同构, 其中对每一 $x \in G$, $\phi(xN) = p(x)$.

定理 5.2.3 *MP 等价的拓扑空间 X 和 Y 总是 AP 等价的.*

证明 假设存在拓扑同构

$$h : FP(X) \to FP(Y).$$

K_X 和 K_Y 各自表示 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$ 的导出子群[2]. 显然, $h(K_X) = K_Y$. 由引理 5.2.1, 商群 $FP(X)/K_X$ 是 $FP(Y)/K_Y$ 拓扑同构的. 为证明该定理, 现只需证明下列断言.

断言. $AP(X)$ 拓扑同构于 $FP(X)/K_X$.

事实上, 令

$$id_X : X \to X$$

[2]一个群 G 的导出子群 *(derived subgroup)* G' [75] 是由所有换位子 $x^{-1}y^{-1}xy$ 生成的 G 的子群, 其中 $x, y \in G$. G 的导出子群 G' 是 G 的不变子群.

是恒等连续映射, 扩张映射 id_X 到连续满同态

$$\varphi : FP(X) \to AP(X).$$

显然, 同态 φ 的核等于 K_X. 我们将证明 φ 是开映射. 根据引理 5.1.7, 在集 $A_a(X)$ 上, 定义新的仿拓扑群拓扑

$$\sigma = \{\varphi(U) : U \text{ 在 } FP(X) \text{ 中是开的}\}.$$

因为

$$\varphi : FP(X) \to AP(X)$$

是连续的, 所以 σ 细于 $AP(X)$ 的原始拓扑 τ. 让 U 是 $FP(X)$ 的开子集且设 $x \in \varphi(U) \cap X$. 选取 $z \in U$ 使得 $\varphi(z) = x$. 那么 $W = X \cap xz^{-1}U$ 是 x 在 X 中的开邻域且 $W = \varphi(W) \subset \varphi(U) \cap X$. 因此, $\varphi(U) \cap X$ 在 X 中是开的, 于是 σ 诱导 X 上的原始拓扑. 进而, 由注记 1.1.2, $\sigma = \tau$, 那么 φ 是开映射. 于是, 根据引理 5.2.2, 商群 $FP(X)/K_X$ 拓扑同构于 $AP(X)$. 证完.

然而, 我们不知道下列问题的答案.

问题 5.2.4 *AP 等价性不蕴含 MP 等价性是真的吗?*

下面, 我们证明伪紧性是 AP 不变性质, 从而更是 MP 不变性质.

根据拓扑基的定义容易验证下列引理.

引理 5.2.5 *让 X 和 Y 是拓扑空间. 如果*

$$\varphi : FP(X) \to FP(Y)$$

是拓扑同构, 那么 $\varphi^{-1}(Y)$ 是 $FP(X)$ 的拓扑基. 类似断言对 Abel 情况成立.

回忆: 一个完全正则空间 X 称为伪紧的 [24], 如果 X 上的每一连续实值函数是有界的.

定理 5.2.6 *设两个完全正则空间 X 和 Y 是 AP 等价的, 更一般地, MP 等价的. 如果 Y 是伪紧的, 那么 X 也是伪紧的.*

证明 令

$$\varphi : AP(X) \to AP(Y)$$

是拓扑同构. 那么由引理 5.2.5, $\varphi^{-1}(Y)$ 是 $AP(X)$ 的拓扑基. 为简洁, 不失一般性, 设 Y 是 $AP(X)$ 的拓扑基. 假设 X 不是伪紧空间. 那么容易验证: 空间 X 中存在一由 X 的非空开子集组成的离散族 $\{U_i : i \in \omega\}$. 对每一 $i \in \omega$, 选取 $x_i \in U_i$.

对 $g \in AP(X)$ 及 $x \in X$, 让 $c(x, g)$ 表示在关于自由基 X 的 g 的正规表示式中位于 x 处的系数 k. 换句话说, 如果

$$g = kx + k_1x_1 + \cdots + k_nx_n,$$

其中 $x, x_1, \cdots, x_n$ 是 X 中互相不同的元且 $k, k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$, 那么 $c(x, g) = k$. 特别地, $c(x, g) = 0$ 当且仅当 x 在 g 的正规表示式中不出现.

因为 Y 是 $AP(X)$ 的自由代数基, 所以对每一 $i \in \omega$, 存在 $y_i \in Y$ 使得 $c(x_i, y_i) \neq 0$. 令 $t_{i,1}, \cdots, t_{i,n_i} \in X$ 是出现在 y_i 的正规表示式中所有不同于 x_i 的字 (可能 $n_i = 0$). 不失一般性, 假设当 $i < j$, 有 $c(x_j, y_i) = 0$.

通过在 $n \in \omega$ 上归纳, 定义 X 上连续实值函数 f_n 如下. 置 $f_0 \equiv 0$. 假设对某 $n \geq 1$, 我们已定义函数 $f_0, \cdots, f_{n-1}$. 置 $g_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i$. 令

$$F_n = (X \setminus U_n) \cup \{t_{i,j} : i \leq n, j \leq n_i, t_{i,j} \in U_n\}.$$

显然, F_n 在 X 中是闭的; 且 $x_n \notin F_n$, 因为当 $i < j$, 有 $c(x_j, y_i) = 0$. 因为 X 是完全正则空间, 所以存在 X 上连续实值函数 f_n 使得 $f_n(F_n) \subset \{0\}$ 且

$$f_n(x_n) = n + \sum_{j \in \{j:\, t_{n,j} \in U_0 \cup \cdots \cup U_{n-1}\}} |c(t_{n,j}, y_n) g_n(t_{n,j})|.$$

这完成了 $f_n (n \in \omega)$ 的构造. 因为 $\{U_i : i \in \omega\}$ 在 X 中是离散的, 所以由 [24, 推论 2.1.12], $f = \sum_{n \in \omega} f_n$ 连续. 容易验证下列.

(1) 对每一 $n \in \omega$, $f(x_n) = f_n(x_n)$.

(2) 对每一 $i \geq 1$ 及 $j \leq n_i$, 当 $t_{i,j} \notin U_0 \cup \cdots \cup U_{i-1}$, 有 $f(t_{i,j}) = 0$.

(3) 对每一 $i \geq 1$ 及 $j \leq n_i$, 当 $t_{i,j} \in U_0 \cup \cdots \cup U_{i-1}$, 有 $f(t_{i,j}) = g_i(t_{i,j})$.

现在, 扩张 f 到连续同态

$$\psi : AP(X) \to \mathbb{R}.$$

对每一 $i \geq 1$, 因为

$$y_i = c(x_i, y_i)x_i + c(t_{i,1}, y_i)t_{i,1} + \cdots + c(t_{i,n_i}, y_i)t_{i,n_i},$$

所以

$$\begin{aligned}|\psi(y_i)| &= |c(x_i, y_i)f(x_i) + c(t_{i,1}, y_i)f(t_{i,1}) + \cdots + c(t_{i,n_i}, y_i)f(t_{i,n_i})|\\ &= |c(x_i, y_i)(i + \sum_{j\in\{j:\, t_{i,j}\in U_0\cup\cdots\cup U_{i-1}\}} |r_{i,j}|) + \sum_{j\in\{j:\, t_{i,j}\in U_0\cup\cdots\cup U_{i-1}\}} r_{i,j}|\\ &\geq i,\end{aligned}$$

其中

$$r_{i,j} = c(t_{i,j}, y_i)g_i(t_{i,j}).$$

因为 $\{y_i : i \geq 1\} \subset Y$, 所以空间 Y 不是伪紧的. 矛盾. 证完.

由我们的讨论, 下列问题的提出是自然的.

问题 5.2.7 *设两个完全正则的空间 X 和 Y 是 AP 等价或 MP 等价的. 如果 X 是紧空间, 那么 Y 紧吗?*

问题 5.2.8 *设两个完全正则的空间 X 和 Y 是 AP 等价或 MP 等价的. 如果 X 是可数紧空间, 那么 Y 可数紧吗?*

然而, 我们将证明另一个覆盖性质也就是遗传 Lindelöf 性是 MP 不变的. 实际上, 我们还能获得一个更一般性的定理.

下列关于一般拓扑学的事实是显然的.

引理 5.2.9 *让 $f : X_1 \to Y_1$ 与 $g : Y_2 \to X_2$ 都是拓扑空间之间的连续映射, 其中 $X_1 \subset X_2$ 且 $Y_1 \subset Y_2$. 如果*

$$F = \{x \in X_1 : g(f(x)) = x\} \neq \emptyset,$$

那么 $f|_F : F \to f(F)$ 是同胚.

引理 5.2.10 *设 X 和 Y 是 MP 等价的拓扑空间, 那么 Y 能表示成可数多个子空间的并 $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, 其中每一 Y_n 同胚于 X 的一子空间.*

证明 令

$$\varphi : FP(X) \to FP(Y)$$

是拓扑同构. 那么由引理 5.2.5, $\varphi^{-1}(Y)$ 是 $FP(X)$ 的拓扑基. 为简洁, 不失一般性, 设 Y 是 $FP(X)$ 的拓扑基. 对 $g \in FP(X)$, 令 $l_Y(g)$ 表示 g 的关于自由代数基 Y 的约简长度. 对 $n \in \mathbb{N}$ 及 $\nu = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, 置

$$C_n(Y) = \{g \in FP(X) : l_Y(g) = n\},$$

且

$$Y_\nu = Y \cap C_n(X) \cap ((\tilde{X} \cap C_{m_1}(Y)) \cdots (\tilde{X} \cap C_{m_n}(Y))),$$

其中

$$\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$$

且

$$C_n(X) = FP_n(X) \setminus FP_{n-1}(X).$$

显然,

$$Y = \bigcup_{\nu \in \Theta} Y_\nu,$$

其中 $\Theta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$.

让 $n \in \mathbb{N}$ 及 $\nu = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ 是任意的. 对每一 $i = 1, ..., n$, 令

$$\varphi_i : Y_\nu \to X$$

使得对每一 $g \in Y_\nu$, $\varphi_i(g)$ 是 g 关于自由代数基 X 的约简表达式中第 i 个位置的点. 类似地, 对每一 $j = 1, ..., m_i$, 令

$$\psi_{i,j} : C_{m_i}(Y) \to Y$$

使得对每一 $h \in C_{m_i}(Y)$, $\psi_{i,j}(h)$ 是 h 关于自由代数基 Y 的约简表达式中第 j 个位置的点. 由引理 1.1.3(1), 映射 φ_i 和 $\psi_{i,j}$ 都是连续的. 让

$$F^\nu_{i,j} = \{w \in Y_\nu : \psi_{i,j}(\varphi_i(w)) = w\}.$$

那么引理 5.2.9 蕴涵每一 $F^\nu_{i,j}$ 同胚于 X 的一子空间. 剩下验证:

$$Y = \cup\{F^\nu_{i,j} : \nu = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m_i\}.$$

事实上, 设 $y \in Y_\nu$, 其中 $\nu = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$. 记

$$y = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n},$$

且对每一 $i = 1, ..., n$,

$$x_i = y_{i,1}^{\delta_{i,1}} \cdots y_{i,m_i}^{\delta_{i,m_i}},$$

其中 $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $y_{i,j} \in Y$ 且 $\delta_{i,j} = \pm 1$. 因此,

$$y = (y_{1,1}^{\delta_{1,1}} \cdots y_{1,m_1}^{\delta_{1,m_1}})^{\varepsilon_1} \cdots (y_{n,1}^{\delta_{n,1}} \cdots y_{n,m_n}^{\delta_{n,m_n}})^{\varepsilon_n}.$$

因为 Y 是 $FP(X)$ 的自由代数基, 所以存在某 i 及 j 使得 $y = y_{i,j}$. 这蕴涵

$$\psi_{i,j}(\varphi_i(y)) = \psi_{i,j}(x_i) = y_{i,j} = y,$$

于是 $y \in F_{i,j}^{\nu}$. 证完.

拓扑性质 $\mathcal{P}$ 称为*可数可加的*, 如果拓扑空间 X 能表示成可数个具有性质 $\mathcal{P}$ 的子空间之并, 那么 X 具有性质 $\mathcal{P}$. 引理 5.2.10 立即蕴涵下列定理.

定理 5.2.11 *设 $\mathcal{P}$ 是遗传的、可数可加的拓扑性质. 让 X 和 Y 是 MP 等价的拓扑空间. 如果 X 具有性质 $\mathcal{P}$, 那么 Y 也具有性质 $\mathcal{P}$. 即, $\mathcal{P}$ 是 MP 不变的.*

拓扑空间 X 称为 *cosmic* 空间 [59], 如果 X 有可数网. 定理 5.2.11 导出下列推论.

推论 5.2.12 *让 X 和 Y 是 MP 等价的拓扑空间. 那么下列成立.*

(1) 如果 X 是遗传 Lindelöf 空间, 那么 Y 也是遗传 Lindelöf 空间.

(2) 如果 X 是遗传可分空间, 那么 Y 也是遗传可分空间.

(3) 如果 X 是 cosmic 空间, 那么 Y 也是 cosmic 空间.

问题 5.2.13 *推论 5.2.12 对 AP 等价情况成立吗?*

问题 5.2.14 *Lindelöf 性质是 MP 不变的 (AP 不变的) 吗?*

问题 5.2.15 *可分性是 MP 不变的 (AP 不变的) 吗?*

第六章　结束语

§6.1　小结

1941年, 自由拓扑群被引进, 关于其成果也相当丰富 [8]. 2002年, 自由仿拓扑群被引进, 拓扑代数工作者对其研究起步相对较晚. 引言中拓扑学家 A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 提出的问题 0.0.1 (即, 自由拓扑群的哪些结果能够推广到自由仿拓扑群?)是一类公开问题. 拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 X^{-1} 是离散空间 (引理 1.1.4), 显然, 关于自由拓扑群的结果不能全都推广到自由仿拓扑群, 可参见 [46, 71]. 再举一简单例子: 由 [8, 推论 7.1.18]知, 完全正则空间 X 上的自由拓扑群 $F(X)$ 是 Lindelöf 空间当且仅当对每一 $n \in \mathbb{N}$, X^n 是 Lindelöf 空间, 从而实数空间 $\mathbb{R}$ 上的自由拓扑群 $F(\mathbb{R})$ 是 Lindelöf 空间; 但自由仿拓扑群 $FP(\mathbb{R})$ 不是 Lindelöf 空间. 本节就本文对问题 0.0.1的部分回答情况以及关于自由仿拓扑群文献已有结果的改进情况进行小结.

本文围绕拓扑性质如次可度量的 σ 空间、次可度量的半层空间、k^* 可度量空间等几个广义度量空间性质; 局部紧性质; 序列空间性质、Fréchet 空间性质; 伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等, 分四章 (第二章、第三章、第四章、第五章) 开展工作.

第二章建立了次可度量空间上的自由仿拓扑群的一般稳定性定理, 探讨了 k^* 可度量 k 空间以及 k 半层 k 空间上的自由仿拓扑群的可数 tightness, 讨论了自由仿拓扑群的第一可数性, 改进和扩充了文 [46, 72] 中关于自由仿拓扑群的相关结果.

第三章通过拟伪度量构建拓扑空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 的子空间 $FP_2(X)$ 在单位元 e 的一个局部基, 一方面扩充了 A. Elfard 和 P. Nickolas 的一个结果: [23, 定理 3.1]; 另一方面应用其证明了: 设 X 是完全正则空间 Y 与离散空间 D 的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间当且仅当 $FP_2(Y)$ 是局部紧空间, 这部分回答了 [47, 问题 4.18].

第四章建立了自由仿拓扑群中的一个同胚定理, 获得了完全正则空间上的自由仿拓扑群关于稠密自嵌入质数空间的嵌入定理, 刻画了自由仿拓扑群的 Fréchet 性, 这推广了文 [19, 68] 中关于自由拓扑群的相应结果到自由仿拓扑群.

第五章首先证明了两个拓扑同构的自由仿拓扑群使其基底非同胚的存在性, 其次证明了伪紧性、遗传 Lindelöf 性、遗传可分性、cosmic 空间性质等是 MP 不变性质, 这推广了文 [29, 70] 中关于自由拓扑群的相应结果到自由仿拓扑群.

正如引言中所说, 关于自由仿拓扑群的研究刚刚兴起, 其成果远不如自由拓扑群的研究成果那样庞大. 本文仅就上述一些拓扑性质对 A. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 提出的问题 0.0.1 进行了部分回答, 其他的拓扑性质并未探讨, 同时本文也提出了一些问题, 显然这些都是今后从事自由仿拓扑群研究的一个大方向.

§6.2 自由仿拓扑群的一些尚未解决的问题

本节将本文提出的一些尚未解决的问题集中, 供进一步研究.

问题 6.2.1 *(问题 2.1.10) σ 空间 X 上的自由仿拓扑群 $FP(X)$ 或自由 Abel 仿拓扑群 $AP(X)$ 仍是 σ 空间吗?*

问题 6.2.2 *(问题 2.2.15) 让 X 是度量空间. 如果由 X 中所有非孤立点组成的子空间 X' 是 ω_1 紧的, $AP(X)$ 有可数 tightness 吗?*

问题 6.2.3 *(问题 2.2.16) 定理 2.2.9 中的条件"k^* 可度量的 k 空间"能减弱为条件"具有紧可数 k 网的 k 空间"吗?*

问题 6.2.4 *(问题 2.4.7) 设 X 是正则空间且 $n \geq 3$. 如果空间 $FP_n(X)$ $(AP_n(X))$ 是第一可数的, 那么 $FP_n(X)$ $(AP_n(X))$ 是可度量化空间吗?*

问题 6.2.5 *[47, 问题 4.18] 如果拓扑空间 X 同胚于一紧空间和一离散空间的拓扑和, 那么 $FP_2(X)$ 是局部紧空间吗?*

问题 6.2.6 *(问题 3.2.6) 如果 X 是紧空间, 对每一非负整数 n, 空间 $FP_n(X)$ 是局部紧吗?*

问题 6.2.7 *(问题 3.2.7) 设 X 是拓扑空间. 如果 $FP_2(X)$ 是局部紧空间, 空间 $FP_3(X)$ 是局部紧吗?*

问题 6.2.8 *(问题 4.2.7)* 设 X 是完全正则空间. 固定 $n \in \mathbb{N}$. 如何刻画拓扑空间 X 使得 $FP_n(X)$ $(AP_n(X))$ 是 *Fréchet* 空间?

问题 6.2.9 *(问题 5.2.4)* AP 等价性不蕴含 MP 等价性是真的吗?

问题 6.2.10 *(问题 5.2.7)* 设两个完全正则的空间 X 和 Y 是 AP 等价或 MP 等价的. 如果 X 是紧空间, 那么 Y 紧吗?

问题 6.2.11 *(问题 5.2.8)* 设两个完全正则的空间 X 和 Y 是 AP 等价或 MP 等价的. 如果 X 是可数紧空间, 那么 Y 可数紧吗?

问题 6.2.12 *(问题 5.2.13)* 推论 *5.2.12* 对 AP 等价情况成立吗?

问题 6.2.13 *(问题 5.2.14)* *Lindelöf* 性质是 MP 不变的 $(AP$ 不变的$)$吗?

问题 6.2.14 *(问题 5.2.15)* 可分性是 MP 不变的 $(AP$ 不变的$)$吗?

参考文献

[1] B. Anderson. Topologies comparable to metric topologies [J]. Proc. Arizona State Univ. Topological Conf., 1967, 1969.

[2] R. Arens. Note on convergence in topology [J]. Math. Mag., 1950, 23: 229-234.

[3] A. Arhangel'skiĭ. An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1959, 126 (2): 239-241 (in Russian).

[4] A. Arhangel'skiĭ. Mappings connected with topological groups [J]. Soviet Math. Dokl., 1968, 9: 1011-1015.

[5] A. Arhangel'skiĭ. Topological spaces and continuous mappings; Notes on topological groups [J]. Moscow State Univ., 1969 (in Russian).

[6] A. Arhangel'skiĭ, S. Franklin. Ordinal invariants for topological spaces [J]. Michi. Math. J., 1968, 15: 313-320.

[7] A. Arhangel'skiĭ, O. Okunev, V. Pestov. Free topological groups over metrizable spaces [J]. Topol. Appl., 1989, 33: 63-76.

[8] A. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko. Topological Groups and Related Structures [M]. Atlantis Press and World Scientific, 2008.

[9] T. Banakh, V. Bogachev, A. Kolesnikov. k^*-metrizable spaces and their applications [J]. J. Math. Sci., 2008, 155 (4): 475-522.

[10] K. Borsuk, S. Ulam. On symmetric products of topological spaces [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1931, 37: 875-882.

[11] N. Bourbaki. General Topology [M]. Hermann, Paris, 1966.

[12] Z. Cai. On local compactness of the subspace $FP_2(X)$ of $FP(X)$ [J]. Topol. Appl., 2016, 197: 181-188.

[13] Z. Cai, S. Lin. A few generalized metric properties of free paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2016, 204: 90-102.

[14] Z. Cai, S. Lin. MP-equivalence of free paratopological groups [J]. submitted.

[15] Z. Cai, S. Lin, C. Liu. S_2 and the Fréchet property of free topological groups [J]. Topol. Appl., 2016, 204: 103-111.

[16] Z. Cai, S. Lin, C. Liu. Copies of special spaces in free (Abelian) paratopological groups [J]. Houst. J. Math., accepted.

[17] J. Ceder. Some generalizations of metric spaces [J]. Pac. J. Math., 1961, 11: 105-125.

[18] G. Creede. Concerning semi-stratifiable spaces [J]. Pac. J. Math. 1970, 32: 47-54.

[19] K. Eda, H. Ohta, K. Yamada. Prime subspaces in free topological groups [J]. Topol. Appl., 1995, 62: 163-171.

[20] A. Elfard. Free paratopological groups. PhD Thesis, University of Wollongong, Australia, 2012.

[21] A. Elfard. Free paratpological groups. II [J]. Topol. Proc., 2014, 43: 331-339.

[22] A. Elfard, P. Nickolas. On the topology of free paratopological groups [J]. Bull. Lond. Math. Soc., 2012, 44 (6): 1103-1115.

[23] A. Elfard, P. Nickolas. On the topology of free paratopological groups II [J]. Topol. Appl., 2013, 160: 220-229.

[24] R. Engelking. General Topology [M]. Heldermann Verlag, Berlin, 1989 (revised and completed edition).

[25] P. Fletcher, W. Lindgren. Quasi-uniform spaces [M]. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York, vol. 77, 1982.

[26] S. Franklin. Spaces in which sequences suffice [J]. Fund. Math., 1965, 57: 107-115.

[27] S. Franklin, B. Thomas. A survey of k_ω-spaces [J]. Topol. Proc., 1977, 2: 111-124.

[28] D. Gale. Compact sets of functions and function rings [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1950, 1: 303-308.

[29] M. Graev. Free topological groups [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1948, 12: 279-324 (in Russian).

[30] G. Gruenhage. Generalized metric spaces, in: K. Kunen and J.E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology [M]. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 423-501.

[31] G. Gruenhage. Generalized metrizable spaces, In: K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon (Eds.), Recent Progress in General Topology III [M]. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 2014, pp. 803-859.

[32] G. Gruenhage, E. A. Michael, Y. Tanaka. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pac. J. Math., 1984, 113 (2): 303-332.

[33] G. Gruenhage, Y. Tanaka. Products of k-spaces and spaces of countable tightness [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1982, 273: 299-308.

[34] T. Hicks, P. Sharma. Properties of z-spaces [J]. Topol. Proc., 1979, 4: 109-113.

[35] C. Joiner. Free topological groups and dimension [J]. Trans. Am. Math. Soc., 1976, 220: 401-418.

[36] H. Künzi. An introduction to Quasi-uniform Spaces [M]. Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., 2008, pp. 501-566.

[37] F. Leja. Sur la notion du groupe abstrait topologique [J]. Fund. Math., 1927, 9: 37-44.

[38] Z. Li, F. Lin, C. Liu. Networks on free topological groups [J]. Topol. Appl., 2015, 180: 186-198.

[39] 林福财. 仿拓扑群与 rectifiable 空间的研究 [博士学位论文], 成都: 四川大学, 2011.

[40] 林福财. 拓扑代数与广义度量空间 [M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2012.

[41] F. Lin. A note on free paratopological groups [J]. Topol. Appl., 2012, 159: 3596-3604.

[42] F. Lin. Topological monomorphisms between free paratopological groups [J]. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2012, 19: 507-521.

[43] F. Lin, C. Liu. S_ω and S_2 on free topological groups [J]. Topol. Appl., 2014, 176: 10-21.

[44] F. Lin, C. Liu. An addendum to "S_ω and S_2 on free topological groups" [J]. Topol. Appl., 2015, 191: 199-201.

[45] F. Lin, C. Liu. The mapping i_2 on the free topological groups [J]. Publ. L'Inst. Math., 2016, in press.

[46] F. Lin, C. Liu, S. Lin, S. Cobzas. Free Abelian paratopological groups over metric spaces [J]. Topol Appl., 2015, 183: 90-109.

[47] F. Lin, C. Liu, K. Zhang. The countable type properties in free paratopological groups [J]. submitted.

[48] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[49] 林寿. 广义度量空间与映射 (第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[50] S. Lin, Z. Cai. Closed mappings, boundary-compact mappings and sequence-covering mappings [J]. submitted.

[51] S. Lin, Z. Cai, C. Liu. The closed mappings on k-semistratifiable spaces [J]. Houst. J. Math., 2009, 35 (1): 139-147.

[52] C. Liu. Spaces with a σ-compact finite k-network [J]. Quest. Answ. Gen. Topol., 1992, 10: 81-87.

[53] C. Liu, Y. Tanaka. Spaces with a star-countable k-network, and related results [J]. Topol. Appl., 1996, 74: 25-38.

[54] D. Lutzer. Semimetrizable and stratifiable spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 43-48.

[55] J. Mack, S. Morris, E. Ordman. Free topological groups and the projective dimension of a locally compact Abelian group [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1973, 40 (1): 303-308.

[56] A. Markov. On free topological groups [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1941, 31: 299-301 (in Russian).

[57] A. Markov. On free topological groups [J]. Izv. Akad. Nauk SSSR, 1945, 9: 3-64 (in Russian).

[58] E. Michael. A note on closed maps and compact sets [J]. Israel J. Math., 1964, 2: 173-176.

[59] E. Michael. $\aleph_0$-spaces [J]. J. Math. Mech., 1966, 15: 983-1002.

[60] E. Michael. $\aleph_0'$-spaces and a function space theorem of R. Pol [J]. Indiana Univ. Math. J., 1977, 26 (2): 299-306.

[61] S. Morris, H. Thompson. Metrizability of subgrups of free topological groups [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1986, 33: 103-112.

[62] P. Nickolas, M. Tkachenko. Local compactness in free topological groups [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 2003, 68: 243-265.

[63] T. Nogura, D. Shakhmatov, Y. Tanaka. α_4-property versus A-property in topological spaces and groups [J]. Studia Sci. Math. Hungar., 1997, 33: 351-362.

[64] E. Nummela. Uniform free topological groups and Samuel compactifications [J]. Topol. Appl., 1982, 13: 77-83.

[65] A. Okuyama. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces [J]. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 1968, A9: 236-254.

[66] A. Okuyama. A survey of the theory of σ-spaces [J]. Gen. Topol. Appl., 1971, 1: 57-63.

[67] P. O'Meara. On paracompactness in function spaces with the compact-open topology [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1971, 29 (1): 183-189.

[68] E. Ordman, B. Smith-Thomas. Sequential conditions and free topological groups [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1980, 79 (2): 319-326.

[69] V. Pestov. Some properties of free topological groups [J]. Moscow Univ. Math. Bull., 1982, 37: 46-49.

[70] V. Pestov. Some topological properties preserved by the relation of M-equivalence [J]. Russian Math. surveys, 1984, 39: 223-224.

[71] N. Pyrch. Free paratopological groups and free products of paratopological groups [J]. J. Math. Sci., 2011, 174: 190-195.

[72] N. Pyrch, O. Ravsky. On free paratopological groups [J]. Mat. Stud., 2006, 25: 115-125.

[73] O. Ravsky. Paratopological groups I [J]. Mat. Stud., 2001, 16: 37-48.

[74] O. Ravsky. Paratopological groups II [J]. Mat. Stud., 2002, 17: 93-101.

[75] D. Robinson. A Course in the Theory of Groups [M]. Springer-Verlag New York Inc., 1982.

[76] S. Romaguera, M. Sanchis, M. Tkachenko. Free paratopological groups [J]. Topol. Proc., 2002, 27: 1-28.

[77] O. Schreier. Abstrakte kontinuerliche Gruppen [J]. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1925, 4: 15-32.

[78] Jr. Slaughter. The closed image of a metrizable space is M_1 [J]. Proc. Am. Math. Soc., 1973, 37: 309-314.

[79] M. Tkackenko. On the completeness of free Abelian topological groups [J]. Soviet Math. Dokl., 1983, 27: 341-345.

[80] M. Tkachenko. Generalization of a theorem of Comfort and Ross I [J]. Ukrain. Mat. Zh., 1989, 41 (3): 377-382 (in Russian).

[81] M. Tkachenko. More on convergent sequences in free topological groups [J]. Topol. Appl., 2013, 160: 1206-1213.

[82] M. Tkachenko. Paratopological and semitopological groups vs topological groups, In: K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon eds., Recent Progress in General Topology III [M]. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 2014, pp. 803-859.

[83] I. Vaiĭnšteĭn. On closed mappings of metric spaces [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1947, 57: 319-321 (in Russian).

[84] K. Yamada. Fréchet-Urysohn spaces in free topological groups [J]. Proc. Am. Math. Soc., 2002, 130 (8): 2461-2469.

[85] K. Yamada. Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups [J]. in press.

作者在读期间科研成果简介

1 . Zhangyong Cai (蔡长勇), Shou Lin, *Sequentially compact spaces with a point-countable k-network*, Topol. Appl. **193** (2015), 162-166. (SCI)

2 . Zhangyong Cai (蔡长勇), *On local compactness of the subspace $FP_2(X)$ of $FP(X)$*, Topol. Appl. **197** (2016), 181-188. (SCI)

3 . Zhangyong Cai (蔡长勇), Shou Lin, *A few generalized metric properties of free paratopological groups*, Topol. Appl. **204** (2016), 90-102. (SCI)

4 . Zhangyong Cai (蔡长勇), Shou Lin, Chuan Liu, *S_2 and the Fréchet property of free topological groups*, Topol. Appl. **204** (2016), 103-111. (SCI)

5 . Zhangyong Cai (蔡长勇), Shou Lin, Chuan Liu, *Copies of special spaces in free (Abelian) paratopological groups*, Houst. J. Math. Accepted. (SCI)

6 . Zhangyong Cai (蔡长勇), Shou Lin, *MP-equivalence of free paratopological groups*, submitted.

7 . Shou Lin, Zhangyong Cai (蔡长勇), *Closed mappings, boundary-compact mappings and sequence-covering mappings*, submitted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师＿＿＿＿＿＿＿＿

作者＿＿＿＿＿＿＿＿

二零一六年三月二十五日

致　谢

本博士论文是在导师林寿教授的精心指导下完成的. 林老师在科研工作方面高瞻远瞩，引领我从事拓扑代数这一分支的学习与研究. 非常感谢林老师十多年来尤其是作者读博这三年期间给予的指导、支持.

感谢张德学教授、张树果教授讲授学位课程及指导，感谢刘应明院士、罗懋康教授、寇辉教授、徐晓泉教授等的指导与关心.

感谢美国俄亥俄大学曾斯维尔分校 (Ohio University Zanesville Campus) 刘川教授的指导、帮助及合作.

作者在福建调研期间，感谢闽南师范大学李进金教授、李克典教授的指导及在学习、住宿等方面提供的帮助.

感谢北京工业大学彭良雪教授、首都师范大学牟磊博士、新西兰奥克兰理工大学 (Auckland University of Technology) 曹继岭教授等的指导及在科研资料方面提供的帮助.

感谢沈荣鑫博士、林福财博士、谢利红博士、张静博士、阮小军同学等与作者进行的有益的学术交流.

感谢我的师母长期以来的关心与扶持，感谢我的父母及妻子等家人的支持.