四 川 大 学

博 士 学 位 论 文

题 目 仿拓扑群中 $\mathbb{R}$-factorizability 及其相关问题的研究

作 者 谢 利 红 完成日期 2013 年 3 月 25 日

培 养 单 位 四川大学

指 导 教 师 林 寿 教授

专 业 基 础 数 学

研 究 方 向 拓 扑 学

授予学位日期 年 月 日

仿拓扑群中 $\mathbb{R}$-factorizability 及其相关问题的研究

基础数学专业

研究生 谢利红 **指导教师** 林寿

本论文主要研究仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability 及其相关问题.

第一部分 (即第二章) 引入 ω 一致连续函数及 property ω-U 等概念, 并由此给出了 $\mathbb{R}$-, m- 和 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群的刻画. 主要证明了: (1) G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群当且仅当 G 是 ω-narrow 拓扑群且具有 property ω-U (定理 2.3.9); (2) G 是 m-factorizable 拓扑群当且仅当它是 ω-narrow 拓扑群且具有 property strongly ω-U (定理 2.4.9); (3) G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群当且仅当它是 ω-balanced 拓扑群且具有 property strongly ω-U (定理 2.4.12); (4) $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群 G 的每一商群是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群 (定理 2.4.14), 这肯定地回答了 A. V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 提出的一个问题 [12, Open Problem 8.4.4].

第二部分 (即第三章) 主要研究仿拓扑群中基数不变量, 把仿拓扑群中的一些可数性质提升为基数函数, 并把拓扑群中的一些经典的基数函数推广到仿拓扑群中. 主要证明了: (1) 每一仿拓扑群 G 有 $w(G) = ib(G^*) \times \chi(G)$ (定理 3.1.10); (2) 每一 T_1 仿拓扑群 G 都满足不等式 $|G| \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G)}$, 因此有, $|G| \leq 2^{l(G^*)\times\psi(G)}$ 和 $|G| \leq 2^{c(G^*)\times\psi(G)}$ (定理 3.1.20); (3) 每一完全正则的仿拓扑群 G 有 $nw(G) = Nag(G) \times \psi(G)$ (定理 3.1.24). 最后还讨论了仿拓扑群中 ω 拟一致连续实值函数的性质, 这为第四章研究 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群做准备.

第三部分 (即第四章) 主要研究 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 主要证明了: (1) 每一 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群, 因此, $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$- 与 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群是同一类空间 (定理 4.2.8); (2) totally ω-narrow 仿拓扑群 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群当且仅当它具有 property ω-QU (定理 4.2.17); (3) Tychonoff $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 G 的每一商群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 (命题 4.2.20), 此命题在完全正则的仿拓扑群类中肯定地回答了 M. Sanchis 和 M. Tkachenko 的一个问题 (见 [69, Problem 5.2]); (4) Tychonoff 仿拓扑群 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群当且仅当它是 totally ω-narrow 仿拓扑群以及具有 property ω-QU (定理 4.2.21); (5) 满足 T_1 分离公理的 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群 G 的每一子群 H 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 (定理 4.3.8), 此定理肯定地回答

了 M. Sanchis 和 M. Tkachenko 的又一个问题 (见 [69, Problem 5.4]), 而且由此定理得到的推论改进了文献 [69] 中的一些结果.

第四部分 (即第五章) 主要研究拓扑群和仿拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余, 得到了仿拓扑群中紧化剩余的一个二歧性定理. 主要证明了: (1) 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是 G 的紧化剩余, 如果 Y 满足: 对每一 $y \in Y$, 在 Y 中存在包含 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 中的每一可数紧子集是可度量的且是 $U(y)$ 中的 G_δ 集, 那么 G 是可分可度量空间且 Y 是第一可数的 Lindelöf p 空间 (定理 5.1.9), 这部分地回答了 [41, Question 2.15]; (2) 设 G 是非局部紧的拓扑群, 如果 G 的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 具有局部性质 Φ 且性质 Φ 满足 (L), 那么 bG 是可分可度量空间 (定理 5.1.10), 此定理得到的一个推论部分地回答了 [50, Question 14 和 Remark 10]; (3) 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 G 的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 是局部对称空间, 如果 Y 中的每一个单点集是 G_δ 集, 则 bG 是可分可度量空间 (定理 5.1.18), 此定理部分地回答了 [50, Question 6]; (4) 设 G 是非局部紧的仿拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是 G 的紧化剩余, 那么以下条件等价: (a) Y 是 σ 亚紧的 Ohio complete 空间; (b) Y 是亚紧的 Ohio complete 空间; (c) Y 是仿紧的 Ohio complete 空间; (d) Y 是 Lindelöf 空间; (e) G 是可数型空间 (定理 5.2.3), 此定理改进了 A. V. Arhangel'skiĭ [5] 的一些结果; (5) 设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 那么 G 的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 是 p 空间当且仅当 G 要么是 σ 紧的, 要么是 Lindelöf p 空间 (定理 5.2.8), 此定理改进了 A. V. Arhangel'skiĭ [11, Theorem 4.5] 的结果; (6) 设 G 是半拓扑群, 则要么 G 的每一紧化剩余具有 Baire 性质, 要么 G 的每一紧化剩余是 σ 紧空间 (定理 5.3.5), 此定理是仿拓扑群中紧化剩余的一个二歧性定理, 肯定地回答了 [45, Question 3.1].

第五部分 (即第六章) 是本论文的结束章, 主要简单总结了全文以及列举了一些与此课题相关的问题作为以后研究的方向.

关键词: 拓扑群; 仿拓扑群; $\mathbb{R}$-factorizability; Property ω-U; Property ω-QU; Lindelöf Σ 空间; 基数函数; 可度量化; Hausdorff 紧化剩余.

A Study on $\mathbb{R}$-factorizability and Related Questions in Paratopological Groups

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: Xie Li-Hong **Supervisor:** Lin Shou

This thesis is devoted to studying $\mathbb{R}$-factorizability and related fields in paratopological groups.

In the part 1 (Chapter 2), first, we introduce some concepts, for example, ω-uniform continuity, property ω-U and so on. Using those concepts, we get the characterizations of $\mathbb{R}$-, m- and $\mathscr{M}$-factorizable topological groups. The main results are that: (1) G is an $\mathbb{R}$-factorizable topological group if and only if it is an ω-narrow group with property ω-U (Theorem 2.3.9); (2) G is an m-factorizable topological group if and only if it is ω-narrow and has property strongly ω-U (Theorem 2.4.9); (3) G is an $\mathscr{M}$-factorizable topological group if and only if it is ω-balanced and has property strongly ω-U (Theorem 2.4.12); (4) every quotient group of an $\mathscr{M}$-factorizable group is $\mathscr{M}$-factorizable (Theorem 2.4.14), which gives a positive answer to a question posed by A. V. Arhangel'skiĭ and M. Tkachenko [12, Open Problem 8.4.4].

In the second part (Chapter 3), the cardinal invariants in paratopological groups are investigated. We extend countable properties to higher cardinality, and some classical cardinal functions in topological groups are extended to paratopological groups. We mainly obtain that: (1) $w(G) = ib(G^*) \times \chi(G)$ holds for every paratopological group G (Theorem 3.1.10); (2) every T_1 paratopological group G satisfies $|G| \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G)}$, therefore, $|G| \leq 2^{l(G^*)\times\psi(G)}$ and $|G| \leq 2^{c(G^*)\times\psi(G)}$ (Theorem 3.1.20); (3) $nw(G) = Nag(G) \times \psi(G)$ is valid for every completely regular paratopological group G (Theorem 3.1.24). At last, in order to study $\mathbb{R}$-factorizable paratopological groups in the next chapter, we also discuss some properties of the ω-quasi-uniformly continuous real-valved functions on the paratopological groups.

In the third part (Chapter 4), it is devoted to studying $\mathbb{R}$-factorizable paratopological groups. The main results are that: (1) every $\mathbb{R}$-factorizable paratopological group is $\mathbb{R}_3$-factorizable; hence the concepts of $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$- and $\mathbb{R}_3$-factorizability coincide in the class of paratopological groups (Theorem 4.2.8); (2) a totally ω-narrow

paratopological group G is $\mathbb{R}$-factorizable if and only if it has property ω-QU (Theorem 4.2.17); (3) every quotient group of a Tychonoff $\mathbb{R}$-factorizable paratopological group G is $\mathbb{R}$-factorizable (Proposition 4.2.20), which answers to [69, Problem 5.2] in the class of Tychonoff paratopological groups; (4) a Tychonoff paratopological group G is $\mathbb{R}$-factorizable if and only if it is totally ω-narrow and has property ω-QU (Theorem 4.2.21); (5) every subgroup H of a totally Lindelöf Σ-group G satisfying the T_1 separation axiom is $\mathbb{R}$-factorizable (Theorem 4.3.8), which gives an answer to another question of M. Sanchis and M. Tkachenko (see [69, Problem 5.4]). Some corollaries of this theorem improve some results in [69].

In the part 4 (Chapter 5), we mainly study the remainders of the Haussdorff compactifications of topological and paratopological groups. A dichotomy-theorem in the remainders of paratopological groups is given. We mainly show that: (1) let G be a non-locally compact topological group; if $Y = bG \setminus G$ satisfies that: for each point $y \in Y$, there exists an open neighborhood $U(y)$ of y such that every countably compact subset of $U(y)$ is a metrizable G_δ-subset of $U(y)$, then G is separable and metrizable, and Y is a first-countable and Lindelöf p-space (Theorem 5.1.9), which partially answers to [41, Question 2.15]; (2) let G be a non-locally compact topological group, and $Y = bG\setminus G$ have locally a property-Φ satisfying (L), then bG is separable and metrizable (Theorem 5.1.10), of which a corollary partially answers to [50, Question 14 and Remark 10]; (3) let G be a non-locally compact topological group, and $Y = bG \setminus G$ be locally symmetrizable, then bG is separable and metrizable if each singleton of Y is a G_δ-subset in Y (Theorem 5.1.18), which partially answers to [50, Question 6]; (4) let G be a non-locally compact paratopological group and $Y = bG \setminus G$, then the following are equivalent: (a) Y is σ-metacompact and Ohio complete; (b) Y is metacompact and Ohio complete; (c) Y is paracompact and Ohio complete; (d) Y is Lindelöf; (e) G is of countable type (Theorem 5.2.3), which improves some results of A. V. Arhangel'skiǐ [5]; (5) suppose that G is a non-locally compact paratopological group; then the remainder $Y = bG \setminus G$ is a p-space if and only if G is σ-compact or a Lindelöf p-space (Theorem 5.2.8), which improves a result of A. V. Arhangel'skiǐ [11, Theorem 4.5]; (6) let G be a semitopological group, then either every remainder of G has the Baire property, or every remainder of G is σ-compact (Theorem 5.3.5), which is a dichotomy-theorem in the remainders of paratopological groups and answers to [45, Question 3.1].

In the part 5 (Chapter 6), it is a conclusion of this thesis. Some questions related to this topic are listed, which lead us to research in the future.

Key Words: Topological groups; Paratopological groups; $\mathbb{R}$-factorizability; Property ω-U; Property ω-QU; Lindelöf Σ-spaces; Cardinal functions; Metrizabilities; the Remainders of Hausdorff compactifications.

引　言

在 “统一的数学” 思想下, 拓扑与代数的融合已成为现代数学发展趋势之一. 研究拓扑代数的一般思路就是寻求或研究由某种特定连续的代数运算所确定的性质. 一方面, 侧重于在某种拓扑性质下给出研究对象的代数结构的描述. 例如, 对每一紧的布尔拓扑群 G, 存在基数 κ, 使得 G 拓扑同构于 $\mathbb{Z}(2)^\kappa$ (这是 Pontryagin-van Kampen 对偶定理 [37, 57] 的简单推论). 另一方面, 侧重于研究由某种代数结构所确定研究对象的拓扑性质. 例如, 每一紧的阿贝尔扭群是零维空间 [35]. 在 20 世纪, 许多优秀的拓扑代数学家, 如, J. Dieudonné, L.S. Pontryagin, A. Weil 以及 H. Weyl 等, 为拓扑代数的发展做出了卓越的贡献. 尤其是 2008 年, 由 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 合著的 “Topological Groups and Related Structures” [12] 是对前人工作很好地总结, 里面列出大量的公开问题既为研究者指明了方向, 又体现了拓扑代数蓬勃的生命力.

事实上, 上面提到的两个结果均来自于拓扑群理论, 这是拓扑代数领域中经典方向之一 [20, 21, 22, 35, 58]. 最近, 作为拓扑群的各种推广有半拓扑群, 拟拓扑群, 仿拓扑群等. 其中的仿拓扑群, 在上个世纪 50 年代就有相关的结果. 事实上, 当时考虑了拓扑结构和代数结构之间更弱的关系, 如, K. Numakura [55] 考虑紧半群以及著名的 Ellis 定理: 每一紧的 Hausdorff 右拓扑半群都存在一个幂等元 [24]. 然而, 国际上系统研究仿拓扑群是在距今大约 20 年前 [16, 17, 18, 31, 65]. 如今, 仿拓扑群已从平行于拓扑群理论的思想和结果中脱胎而出, 孕育出具有自己的特色理论和处理技巧, 已经成为充满活力, 不断发展的数学分支之一.

仿拓扑群和拓扑群有着很大的不同. 首先, 仿拓扑群的分离性就不如拓扑群好, 例如, 是否每一正则的仿拓扑群是完全正则空间就是一个久悬未决的公开问题 [2] (已知每一 T_0 的拓扑群是完全正则空间 [12]); 其次, 仿拓扑群中子群取闭包之后不一定是个群 (此结论在拓扑群中显然成立), 甚至对第一可数的阿贝尔仿拓扑群都不成立 [12]; 更令人惊奇的是, Sorgenfrey 直线是第一可数, 遗传正规的仿拓扑群, 然而却是不可度量的. 正因为这些不同, 就使得研究仿拓扑群困难重重, 然而研究仿拓扑群更具有一般意义, 从而国际上一些拓扑或代数学者产生了对仿拓扑群研究的浓厚兴趣. A.V. Arhangel'skiĭ [11], M. Tkachenko [87], I.I. Guran [31] 以及 T. Banakh [13] 等一批优秀的拓扑代数学家在此领域已做出了优秀的成果. 其中任意多个伪紧的仿拓扑群的乘积是伪紧空间 [64] 和每一 σ 紧的 T_2 仿拓扑群的胞腔度可数 [11] 就是其中优秀结果的代表. 如今仿拓扑

群的研究方向众多, 其中主要有: (1) 分离公理 [2, 63]; (2) 什么时候仿拓扑群成为拓扑群 [8, 11, 16, 17, 18, 24, 25, 64, 66, 92]; (3) 仿拓扑群中的基数不变量 [11, 31, 47, 62, 63]; (4) 仿拓扑群的乘积与嵌入 [68, 72, 85]; (5) 自由仿拓扑群 [42, 43, 59, 60, 61, 67], 等.

在国际数学研究的背景下, 国际著名拓扑代数学家 A. V. Arhangel'skiĭ 和 W. W. Comfort 相继来我国讲学, 开启了国内拓扑代数研究之门. 沈荣鑫和林寿在《数学年刊》上发表的 "拓扑群中广义度量性质的一个注记" [76] 是国内学者研究拓扑代数的第一批成果, 刘川和林寿在国际拓扑学期刊《Topology and Its Application》上发表的 "Generalized metric spaces with algebraic structures" [52] 掀起了国内研究拓扑代数的热潮. 之后在四川大学、闽南师范大学等国内高校许多学者纷纷投入到拓扑代数的研究之中. 其中优秀成果不断涌现, 如, 林福财和刘川已构造例子说明具有可数伪特征的 T_2 仿拓扑群未必是次可度量的 [46], 这否定地回答了 [12, Open Problem 3.3.1]; 李丕余等证明了每一第一可数 ω-narrow 仿拓扑群是可分空间 [40], 这肯定地回答了 [12, Open Problem 3.4.1]. 其它优秀成果可见 [42, 43, 47, 56, 90] 等. 值得一提的是, 林福财编著的《拓扑代数与广义度量空间》[44] 既总结了国内学者最近在这方面的优秀成果, 里面列举的大量公开问题又为研究者指明了方向.

$\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是一类特殊的仿拓扑群, 已引起国际许多学者的兴趣, 下面简单介绍一下它的来龙去脉.

国际著名数学家 L. S. Pontryagin [57] 早就发现紧拓扑群 G 上的每一连续实值函数 f, 存在从 G 到第二可数的拓扑群 H 上的连续同态 p, 以及 H 上的连续实值函数 h, 满足 $f = h \circ p$. 之后 W. W. Comfort 和 K. A. Ross [23] 发现伪紧的拓扑群也有此性质. 这就启发 M. Tkachenko [79, 81] 在 1991 年把此性质提炼出来, 称满足此性质的拓扑群为 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 研究表明此类拓扑群出乎意料的广且具有很多有趣的性质 [33, 34, 70, 78, 79, 80, 81, 84], 然而也留有很多公开问题, 如, $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群与 ω-narrow 拓扑群有何关系 [83]? 2010 年 M. Sanchis 和 M. Tkachenko [69] 又把拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability 推广到仿拓扑群中. 由于仿拓扑群的分离性质较差, 这使得本身难以前进的课题更加困难.

基于以上分析, 本论文正是围绕仿拓扑群的 $\mathbb{R}$-factorizability 及其相关问题展开, 部分或完全地回答了A. V. Arhangel'skiĭ, M. Sanchis 和 M. Tkachenko 等提出的几个问题.

目　录

第一章　基本概念与记号

约定: 本论文中所讨论的拓扑空间若未特别说明, 均未预先假设满足任何分离公理. 在全文中映射与函数是同一概念; 完全正则与 Tychonoff 是同一概念.

在本章中介绍一些基本概念. 为了书写方便, 也引进一些记号.

§1.1　一般拓扑空间中的术语与记号

用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集; $\mathbb{R}$ 表示实数空间; ω 表示第一个无限基数; ω_1 表示第一个不可数基数.

设 X 是拓扑空间, $B \subset X$, 用 $|B|$ 表示集合 B 的势; $\overline{B}^X$ 表示 B 在 X 中取闭包, 若意义明确, 则简写成 $\overline{B}$; $\mathrm{Int}B$ 表示 B 在 X 中取内部.

设 X 是集合, A 和 B 是集合 $X \times X$ 上的子集, 即集合 X 上的关系. A 的逆关系用 $-A$ 表示, 而 A 和 B 的复合用 $A+B$ 表示, 因此有

$$-A = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in A\}$$

以及

$$A + B = \{(x, y) \in X \times X : \text{ 存在 } z \in X \text{ 使得 } (x, z) \in A \text{ 且 } (z, y) \in B\}.$$

对集合 X 上的关系 A 和 $n \geq 2$ 的自然数, 归纳定义关系 nA 如下:

$$1A = A \text{ 和 } nA = (n-1)A + A.$$

用 Δ 表示集合 $X \times X$ 上的对角集, 即 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$; $\mathscr{D}_X$ 表示 $X \times X$ 中所有包含对角集的子集族, 即 $\mathscr{D}_X = \{D \subset X \times X : \Delta \subset D\}$.

子族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{D}_X$ 称为集合 X 上的拟一致结构, 若 $\mathcal{U}$ 满足如下条件 (1)-(3):

(1) 如果 $V \in \mathcal{U}$ 以及 $V \subset W$, 那么 $W \in \mathcal{U}$;

(2) 如果 $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, 那么 $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$;

(3) 对每一 $V \in \mathcal{U}$, 存在 $W \in \mathcal{U}$ 使得 $2W \subset V$;

如果 $\mathcal{U}$ 还满足如下条件, 则称 $\mathcal{U}$ 是集合 X 上的一致结构:

(4) 对每一 $V \in \mathcal{U}$, 存在 $W \in \mathcal{U}$ 使得 $-W \subset V$.

设 $\mathcal{U}$ 是集合 X 上的 (拟) 一致结构, 那么称序对 $(X,\mathcal{U})$ 为 (拟) **一致空间** [26, 89], 在意义明确下简写为 X. 设 $(X,\mathcal{U})$ 是 (拟) 一致空间, 对每一 $U \in \mathscr{U}$, 记 $U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}$ 以及 $\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subset X :$ 任给 $x \in O$, 存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $U[x] \subset O\}$, 那么 $\tau_{\mathcal{U}}$ 是集合 X 上的一个拓扑, 称 $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ 是由 X 上的 (拟) 一致结构 $\mathcal{U}$ 诱导出来的拓扑空间.

设 X 是拓扑空间, 用 τ 表示其拓扑, 如果存在 X 上的 (拟) 一致结构 $\mathcal{U}$ 使得 $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$, 则称空间 X *可 (拟) 一致化*, $\mathcal{U}$ 称为空间 X 上的 (拟) 一致结构.

设 X 是集合, 若函数 $d : X \times X \to [0, +\infty)$ 满足下面条件(1)-(3), 则称 d 是 X 上的**伪度量**:

(1) 任给 $x, y \in X$, 有 $d(x,y) = d(y,x)$;

(2) 若 $x = y$, 则 $d(x,y) = 0$;

(3) 任给 $x, y, z \in X$, 有 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$;

若把上面条件 (2) 加强为 (2′), 则称 d 是 X 上的**度量**:

(2′) 任给 $x, y \in X$, 则 $x = y$ 当且仅当 $d(x,y) = 0$.

设 (X,τ) 是拓扑空间, 如果存在 X 的度量 d 满足: 对任意的 $U \in \tau$ 和 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$, 其中 $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$, 则称空间 X **可度量化** [26].

设 X 是集合, d 是 X 上的度量, 对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $V_\varepsilon = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \varepsilon\}$, $\mathcal{V} = \{V_\varepsilon : \varepsilon$ 是正实数$\}$, 以及 $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X :$ 存在 $V_\varepsilon \in \mathcal{V}$ 使得 $V_\varepsilon \subset U\}$, 则称 $\mathcal{U}$ 是由度量 d **诱导的一致结构**.

以下分别用 $c(X)$, $d(X)$, $w(X)$, $nw(X)$, $l(X)$, $k(X)$, $\chi(X)$ 以及 $\psi(X)$ 表示拓扑空间 X 上的胞腔度 (cellularity), 稠密度 (density), 权势 (weight), 网络权势 (network weight), Lindelöf 度 (Lindelöf degree), 紧覆盖数 (compact-covering number), 特征 (character) 以及伪特征 (pseudocharacter), 定义分别如下:

胞腔度: $c(X) = \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 中互不相交的非空开子集族$\} + \omega$;

稠密度: $d(X) = \min\{|S| : S \subset X$ 且 $\overline{S} = X\} + \omega$;

权势: $w(X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 的基$\} + \omega$;

网络权势: $nw(X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ 是 X 的网络[1]$\} + \omega$;

---

[1]设 X 是拓扑空间, $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族, 若对任何的 $x \in X$ 和包含 x 的任意开邻域 U, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $x \in P \subset U$, 那么称 $\mathscr{P}$ 是 X 的网络 *(network)* [29].

Lindelöf 度: $l(X) = \min\{\lambda \in \text{Card}$: 对 X 每一开覆盖 $\mathcal{V}$ 存在子覆盖 $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ 满足 $|\mathcal{U}| \leq \lambda\} + \omega$;

紧覆盖数: $k(X) = \min\{\lambda \in \text{Card} : \mathcal{U}$ 是 X 中的紧子集族满足 $|\mathcal{U}| \leq \lambda$ 且 $\bigcup \mathcal{U} = X\} + \omega$;

特征: $\chi(X) = \sup\{\inf\{|\mathcal{B}_x| : \mathcal{B}_x$ 是 x 处的邻域基$\} + \omega : x \in X\}$;

伪特征: $\psi(X) = \sup\{\inf\{|\mathcal{U}_x| : \mathcal{U}_x$ 是 X 中的开子集族且满足 $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}\} + \omega : x \in X\}$ (此处要求空间 X 满足 T_1 分离公理).

拓扑空间 X 中满足如下条件的非空开子集族 $\mathscr{B}$ 称作空间 X 中点 x 处的 π 基 (π-*base*): 对任意包含 x 的开邻域都至少包含 $\mathscr{B}$ 中的一元.

令 $\pi_\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B}$ 是 x 处的 π 基$\} + \omega$, 那么 $\pi_\chi(X) = \sup\{\pi_\chi(x, X) : x \in X\}$ 称为 X 的 π 特征 (π-*character*)

§1.2 拓扑代数中的术语与记号

设 $(G, \cdot)$ 表示抽象群, 任给 $a, b \in G$, 记 $ab = a \cdot b$ 以及 a^{-1} 为 a 的逆元. 任给 $A, B \subset G$, 则有

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\};\ A^n \text{ 表示 } n \text{ 个 } A \text{ 相乘}$$

以及

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

任给 $g \in G$, 定义 $\lambda_g : G \to G$ 为 $\lambda_g(x) = gx$; $\varrho_g : G \to G$ 为 $\varrho_g(x) = xg$, 那么分别称 λ_g 和 ϱ_g 是群 G 上关于 g 的*左变换*和*右变换*.

设 $(G, \cdot)$ 是抽象群, τ 是 G 上的拓扑, 那么

(1) 如果 G 上所有的左变换关于拓扑 τ 连续, 则称 $(G, \cdot, \tau)$ 为*左拓扑群* (left topological group);

(2) 如果 G 上所有的右变换关于拓扑 τ 连续, 则称 $(G, \cdot, \tau)$ 为*右拓扑群* (right topological group);

(3) 如果 $(G, \cdot, \tau)$ 既是左拓扑群也是右拓扑群, 则称 $(G, \cdot, \tau)$ 为*半拓扑群* (semitopological group);

(4) 如果半拓扑群 $(G, \cdot, \tau)$ 的逆运算又关于 τ 连续, 则称 $(G, \cdot, \tau)$ 为*拟拓扑群* (quasitopological group);

(5) 如果 $\cdot : G\times G \to G$ 关于拓扑 τ 连续, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 为**仿拓扑群** (paratopological group);

(6) 如果 $(G,\cdot,\tau)$ 既是仿拓扑群又是拟拓扑群, 则称 $(G,\cdot,\tau)$ 为**拓扑群**.

为了方便以后把 $(G,\cdot,\tau)$ 简记为 G. 根据定义显然有:

(1) G 是拓扑群当且仅当 G 是仿拓扑群和拟拓扑群;

(2) 仿拓扑群 $\Rightarrow$ 半拓扑群 $\Rightarrow$ 右 (左) 拓扑群;

(2) 拟拓扑群 $\Rightarrow$ 半拓扑群.

设 X 是拓扑空间, 如果对任意的 $x, y \in X$, 存在同胚 $f : X \to X$ 满足 $f(x) = y$, 则称空间 X 为**齐性空间**. 显然每一左 (右) 拓扑群是齐性空间.

设 G 是半拓扑群以及 τ 是无限基数, 如果对 G 中包含单位元 e 的每一开邻域 U, 存在包含 e 的开邻域族 $\mathcal{U}$ 满足如下条件: (1) 对每一 $x \in G$, 存在 $V \in \mathcal{U}$ 满足 $xVx^{-1} \subseteq U$; (2) $|\mathcal{U}| \le \tau$, 则称 G 是 *τ-balanced* **半拓扑群**; 而 G 的 *invariance number*, 简记为 $inv(G)$, 被定义为最小的无限基数 τ 使得 G 是 τ-balanced 半拓扑群 [12].

设 G 是半拓扑群, 如果对 G 中包含单位元的每一邻域 V, 存在有限子集 $M \subset G$ 满足 $G = MV = VM$, 则称半拓扑群 G 是 *precompact* [12]. 设 τ 是无限基数, 如果对 G 中包含单位元的每一邻域 U, 存在子集 $K \subset G$ 满足 $|K| \le \tau$ 且 $KU = UK = G$, 那么称 G 是 *τ-narrow* 半拓扑群 [12].

在半拓扑群中一个很重要的基数函数是 *index of narrowness*, 记作 $ib(G)$, 被定义为最小无限基数 τ 使得半拓扑群 G 是 τ-narrow 半拓扑群. ω-narrow 半拓扑群也称 *$\aleph_0$-bounded* **半拓扑群** *[30]*.

本文一些未定义的术语见 [26].

第二章　拓扑群中 $\mathbb{R}$-factorizability 与 ω 一致连续性

设 G 是拓扑群, 如果 G 上的每一连续实值函数都是一致连续的, 则称 G 具有 *property* U [39]. 众所周知, 紧空间和离散空间上的每一连续实值函数都是一致连续的, 因此每一紧拓扑群和每一离散拓扑群都具有 property U. 1966 年 W. W. Comfort 和 K. A. Ross [23] 证明了每一伪紧的拓扑群也具有 property U. 受到这些结果的启发, 我们自然就会问: Lindelöf 拓扑群上的连续实值函数有何性质?

在本章中首先把一致空间上的一致连续函数概念加以推广, 我们称之为 ω 一致连续 (ω-uniform continuity). 进而类似于 property U, 在拓扑群中引入 property ω-U, 证明了每一 Lindelöf 拓扑群都具有 property ω-U, 而且利用这些概念给出了 $\mathbb{R}$-, m- 和 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群类的刻画. 进而得到每一 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群的连续开同态像是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群. 这肯定地回答了 A. V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 提出的一个公开问题 [12, Open problem 8.4.4]. 本章主要取材于作者与导师林寿教授合作的文章 "$\mathbb{R}$-factorizability and ω-uniform continuity in topological groups".

本章所有的拓扑空间假设满足 T_2 分离公理且所有的一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 满足 $\bigcap\mathscr{U}=\Delta$.

§2.1　一致空间中的 ω 一致连续性

设 $(X,\mathscr{U})$ 和 $(Y,\mathscr{V})$ 是一致空间以及 $f:X\to Y$ 是函数, 如果对每个 $V\in\mathscr{V}$, 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得当 $(x,x')\in U$ 时有 $(f(x),f(x'))\in V$, 那么称 f 是一致连续函数 (uniformly continuous function) [26]. 称实值函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 是一致连续函数是指把实数空间 $\mathbb{R}$ 当做通常的一致空间时, f 是一致连续函数. 也就是说, 对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得对每一 $x\in X$ 有 $f(U[x])\subset(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$. 在一致空间中作为一致连续函数概念的推广, 下面引入 ω 一致连续函数概念.

定义 2.1.1　*设 $(X,\mathscr{U})$ 和 $(Y,\mathscr{V})$ 是一致空间以及 $f:X\to Y$ 是函数, 如果对每个 $V\in\mathscr{V}$, 存在可数集族 $\mathcal{U}\subset\mathscr{U}$ 满足: 对每一 $x\in X$, 存在 $U_x\in\mathcal{U}$ 使得 $f(U_x[x])\subset(V_{f(x)}[f(x)])$, 那么称 f 是 ω 一致连续函数 (ω-uniformly continuous function).*

当把定义 2.1.1 中的一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 换作实数空间 $\mathbb{R}$ 时, 也就是把 $\mathbb{R}$ 当作由欧氏距离诱导的一致空间时, 可以得到以下定义.

定义 2.1.2 *设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间以及 $f: X\to\mathbb{R}$ 是函数, 如果对任意 $\varepsilon>0$ 可以找到可数集族 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$, 使得对每一 $x\in X$ 都存在 $V_x\in\mathscr{V}$ 有 $f(V_x[x])\subset(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$, 那么称 f 是 ω 一致连续函数 (ω-uniformly continuous function).*

注 2.1.3 *由定义 2.1.2 很容易看出: 一致连续函数 $\Rightarrow$ ω 一致连续函数 $\Rightarrow$ 连续函数, 然而前面所有的逆都不成立, 见注 2.1.8 和定理 2.3.9.*

设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间以及 ρ 是 X 上的伪度量, 如果对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得当 $(x,y)\in V$ 时有 $\rho(x,y)<\varepsilon$, 那么称伪度量 ρ 是关于 $\mathscr{U}$ 一致的 [26].

引理 2.1.4 *[26, Corollary 8.1.11] 设 X 是集合以及 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一致结构, 那么对每一 $V\in\mathscr{U}$, 存在集合 X 上的伪度量 ρ 满足: (1) 伪度量 ρ 是关于 $\mathscr{U}$ 一致的; (2) $\{(x,y)\in X\times X:\rho(x,y)<1\}\subset V$.*

注 2.1.5 *设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间, 对每一 $V\in\mathscr{U}$, 取满足引理 2.1.4 中条件的伪度量 ρ_V. 在集合 X 上定义关系 E_V 如下: xE_Vy 当且仅当 $\rho_V(x,y)=0$. 很容易验证关系 E_V 是集合 X 上的等价关系. 设 X_V 是由等价关系 E_V 所确定的商集, 定义函数 $\overline{\rho}_V: X_V\times X_V\to\mathbb{R}$ 如下: 对任何的 $[x],[y]\in X_V$ 有 $\overline{\rho}_V([x],[y])=\rho_V(x,y)$. 很容易得到函数 $\overline{\rho}_V$ 是集合 X_V 上的度量. 令 $\mathscr{U}_V$ 为集合 X_V 上由度量 $\overline{\rho}_V$ 诱导出来的一致结构, 定义函数 $f_V:(X,\mathscr{U})\to(X_V,\mathscr{U}_V)$ 如下: 对任意的 $x\in X$ 有 $f_V(x)=[x]$, 则由引理 2.1.4 很容易得到 f_V 是一致连续函数.*

设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间, 如果集合 X 上存在度量 ρ 满足: 由度量 ρ 诱导出来的一致结构 $\mathscr{U}_\rho$ 与一致结构 $\mathscr{U}$ 相同, 那么称一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 可度量化 [26]. 众所周知, 一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 可度量化当且仅当一致结构 $\mathscr{U}$ 具有可数基 [26].

定理 2.1.6 *设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间, $f: X\to\mathbb{R}$ 是函数, 则下面条件等价:*

(1) f 是 ω 一致连续函数;

(2) 存在可度量化的一致空间 $(Y,\mathscr{V})$, 一致连续函数 $g: X \to Y$ 和连续函数 $p: Y \to \mathbb{R}$, 使得 $f = p \circ g$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 ω 一致连续函数. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 由定义 2.1.2 可得可数族 $\zeta_n \subset \mathscr{U}$ 满足: 对每一 $x \in X$ 都存在 $V_x \in \zeta_n$ 使得 $f(V_x[x]) \subset (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n})$. 令 $\zeta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n$, 那么显然有 $|\zeta| \leq \omega$. 根据引理 2.1.4, 对每一 $V \in \zeta$, 在集合 X 上存在满足如下条件的伪度量 ρ_V: (a) ρ_V 是关于一致结构 $\mathscr{U}$ 一致的; (b) $\{(x,y) \in X \times X : \rho_V(x,y) < 1\} \subset V$. 根据注 2.1.5 定义可度量化的一致空间 $(X_V, \mathscr{U}_V)$ 和一致连续函数 $g_V : X \to X_V$. 对于函数族 $\{g_V : V \in \zeta\}$ 定义对角积函数如下:

$$g = \Delta_{V\in\zeta} g_V : (X, \mathscr{U}) \to (\prod_{V\in\zeta} X_V, \prod_{V\in\zeta} \mathscr{U}_V).$$

因为对每一 $V \in \zeta$ 有 g_V 是一致连续函数, 所以 $g = \Delta_{V\in\zeta} g_V$ 也是一致连续函数. 显然, 积空间 $(\prod_{V\in\zeta} X_V, \prod_{V\in\zeta} \mathscr{U}_V)$ 是可度量化的一致空间.

断言: 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 如果 $g(x_1) = g(x_2)$, 则有 $f(x_1) = f(x_2)$.

事实上, 若断言不成立, 则存在 $x_1, x_2 \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 满足如下条件:

$$g(x_1) = g(x_2) \text{ 且 } f(x_1) \notin (f(x_2) - \frac{1}{n}, f(x_2) + \frac{1}{n}).$$

根据上面选择的 ζ_n, 对 x_2 我们可以找到 $V \in \zeta_n$ 满足如下条件

$$f(V[x_2]) \subset (f(x_2) - \frac{1}{n}, f(x_2) + \frac{1}{n}).$$

由 $g(x_1) = g(x_2)$ 可得 $g_V(x_1) = g_V(x_2)$, 因此 $\rho_V(x_1, x_2) = 0$, 从而由引理 2.1.4 和注 2.1.5 有

$$(x_2, x_1) \in \{(x,y) \in X \times X : \rho_V(x,y) < 1\} \subset V,$$

故 $x_1 \in V[x_2]$, 这蕴含

$$f(x_1) \in f(V[x_2]) \subset (f(x_2) - \frac{1}{n}, f(x_2) + \frac{1}{n}),$$

与假设矛盾, 从而断言成立.

由以上断言可找到函数 $p : g(X) \to \mathbb{R}$ 满足 $f = p \circ g$. 下面只需证明函数 p 是连续的.

任取 $y \in g(X)$ 和 $\varepsilon > 0$, 选择 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 以及取一点 $x \in X$ 使得 $g(x) = y$. 显然, 对于 x 可以找到 $V \in \zeta_n$ 满足如下条件:

$$f(V[x]) \subset (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}) = (p(y) - \frac{1}{n}, p(y) + \frac{1}{n}) \subset (p(y) - \varepsilon, p(y) + \varepsilon).$$

令

$$B = \{z \in X_V : \overline{\rho}_V(\pi_V(y), z) < 1\},$$

此处的 $\overline{\rho}_V$ 是根据注 2.1.5 所定义的且 $\pi_V : \prod_{V' \in \zeta} X_{V'} \to X_V$ 是自然投射. 再令

$$W = g(X) \cap (\prod_{V' \in \zeta \setminus \{V\}} X_{V'} \times B),$$

显然, W 是包含 y 的开邻域. 下面只需证明 $p(W) \subset (p(y) - \varepsilon, p(y) + \varepsilon)$, 由此可得 p 是连续函数.

事实上, 由引理 2.1.4 和注 2.1.5 可得

$$g^{-1}(W) = g_V^{-1}(B) = \{z \in X | \rho_V(x, z) < 1\} \subset V[x],$$

因此

$$p(W) = f(g^{-1}(W)) \subset f(V[x]) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) = (p(y) - \varepsilon, p(y) + \varepsilon).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). 因为一致空间 $(Y, \mathscr{V})$ 可度量化, 所以一致结构 $\mathscr{V}$ 具有可数基, 不妨设为 μ. 定义 $\psi = (g, g) : X \times X \to Y \times Y$, 令 $\gamma = \{\psi^{-1}(V) : V \in \mu\}$, 那么显然有 $|\gamma| \leq \omega$. 因为 g 是一致连续函数, 所以 $\gamma \subset \mathscr{U}$. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 p 是连续函数, 所以存在 $V \in \mu$ 满足 $p(V[g(x)]) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. 由

$$\psi^{-1}(V) \in \gamma \text{ 和 } f(\psi^{-1}(V)[x]) \subset p(V[g(x)]) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

易得 f 是 ω 一致连续函数. 证毕.

由定理 2.1.6 容易得到以下结果.

推论 2.1.7 *可度量化的一致空间上的每一连续实值函数都是 ω 一致连续的.*

注 2.1.8 *推论 2.1.7 中的 "ω 一致连续" 不能替换成 "一致连续". 例如, 实数空间 $\mathbb{R}$ 赋予通常的一致结构是可度量化的, 但是显然并非 $\mathbb{R}$ 上所有的连续实值函数都是一致连续的, 这也说明 ω 一致连续函数 $\nRightarrow$ 一致连续函数.*

§2.2 拓扑群中的 ω 一致连续性

设 G 是拓扑群, 在这章中接下来用 $\mathscr{N}(G,e)$ 表示群 G 中包含单位元 e 的所有开邻域. 设 $f: G \to \mathbb{R}$ 是函数, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathscr{N}(G,e)$, 使得当 $x^{-1}y \in U$ ($yx^{-1} \in U$) 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 那么称 f 是左 (右) 一致连续数 (left (right) uniformly continuous function); 如果 f 既是左一致连续函数, 也是右一致连续函数, 那么 f 是一致连续函数 (uniformly continuous function) [12]. 在拓扑群中作为一致连续函数概念的推广我们下面引入 ω 一致连续函数的概念.

定义 2.2.1 *设 G 是拓扑群以及 $f: G \to \mathbb{R}$ 是函数, 对任意 $\varepsilon > 0$, 如果存在可数族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{N}(G,e)$ 满足: 对每一 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得当 $x^{-1}y \in U$ ($yx^{-1} \in U$) 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 那么 f 是左 (右) ω 一致连续函数 (left (right) ω-uniformly continuous function).*

定义 2.2.2 *如果拓扑群 G 上的实值函数 f 既是左 ω 一致连续的, 又是右 ω 一致连续的, 那么 f 是 ω 一致连续函数 (ω-uniformly continuous function).*

注 2.2.3 *(1) 设 G 是拓扑群, 那么根据文献 [12] 可知: 在 G 上存在两个自然的一致结构, 分别是左一致结构 $\mathscr{V}_G^l$ 和右一致结构 $\mathscr{V}_G^r$. 于是当把拓扑群 G 看作一致空间 $(G, \mathscr{V}_G^l)$ 或 $(G, \mathscr{V}_G^r)$ 时, 那么定义 2.2.1 与定义 2.1.2 是等价的.*

(2) 因为实数空间 $\mathbb{R}$ 是拓扑群, 所以根据 (1) 和注 2.1.8 易知在拓扑群中有: ω 一致连续函数$\not\Rightarrow$ 一致连续函数.

根据以上定义很容易得到定理 2.2.4 和定理 2.2.5.

定理 2.2.4 *设 f 是拓扑群 G 上的实值函数, 那么*

(1) 如果 f 是左 (右) 一致连续函数, 则 f 是左 (右) ω 一致连续函数;

(2) 如果 f 是一致连续函数, 则 f 是 ω 一致连续函数.

设 X 是拓扑空间, 如果 X 中的每个 G_δ 集 (即可以表示成可数多个开集交的集合) 都是开集, 那么 X 是 P 空间 (P-*space*) [12]. 如果当拓扑群 G 看作拓扑空间时是 P 空间, 那么称 G 是 P 群 (P-*group*) [12].

定理 2.2.5 *设 f 是 P 群上的实值函数, 那么*

(1) f 是左 (右) 一致连续函数当且仅当 f 是左 (右) ω 一致连续函数;

(2) f 是一致连续函数当且仅当 f 是 ω 一致连续函数.

以下定理给出了拓扑群上左 ω 一致连续函数和右 ω 一致连续函数的刻画, 根据定义很容易证明它.

定理 2.2.6 *设 f 是拓扑群 G 上的实值函数, 那么下面条件等价:*

(1) f 是左 (右) ω 一致连续函数;

(2) 存在可数族 $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{N}(G,e)$ 满足: 对每一点 $x \in G$ 和每一 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{U}_f$, 使得当 $x^{-1}y \in U$ $(yx^{-1} \in U)$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

下面定理留给读者作练习.

定理 2.2.7 *设 G 是拓扑群, 则 G 上每一连续的 (有界连续的) 实值函数是左 ω 一致连续函数当且仅当 G 上每一连续的 (有界连续的) 实值函数是右 ω 一致连续函数.*

§2.3　ω 一致连续性与 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群

在此节中我们应用前面引入的 ω 一致连续函数概念来研究 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 设 G 是拓扑群, 如果对 G 上的每一实值连续函数 f, 存在具有可数基的拓扑群 H, 连续同态 $p: G \to H$ 以及 H 上的连续值函数 h, 使得 $f = h \circ p$, 那么称 G 是 *$\mathbb{R}$-factorizable* 拓扑群 [79, 81]. 在给出本节主要结果之前, 我们还要做些准备工作. J. M. Kister 所定义的 property U 已在本章开头给出. 如果拓扑群 G 上的每一有界的连续实值函数都是一致连续函数, 那么 W. W. Comfort 和 K. A. Ross [23] 称 G 具有 *property BU*. 很自然地我们有以下定义.

定义 2.3.1 *如果拓扑群 G 上的每一连续的 (有界连续的) 实值函数都是 ω 一致连续的, 那么称 G 具有 property ω-U (property $B\omega$-U).*

注 2.3.2 根据 *property ω-U* 和 *property Bω-U* 的定义以及定理 *2.2.5* 可知: 每一具有 *property U* (*property BU*) 的拓扑群具有 *property ω-U* (*property Bω-U*).

已知拓扑群 G 具有 property BU 当且仅当 G 具有 property U [23, Theorem 2.8]. 我们有以下类似的结果.

定理 2.3.3 拓扑群 G 具有 *property Bω-U* 当且仅当 G 具有 *property ω-U*.

证明 显然, property ω-U 蕴涵 property $B\omega$-U. 相反, 设 f 是 G 上的连续实值函数, 因为 G 具有 property $B\omega$-U, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有界连续函数 $(-n) \vee f \wedge n$ 一定是 ω 一致连续的. 根据这一事实和定理 2.2.6 很容易验证 f 是 ω 一致连续函数, 故 G 具有 property ω-U. 证毕.

定理 2.3.4 每一 *Lindelöf* 拓扑群具有 *property ω-U*.

证明 设 G 是 Lindelöf 拓扑群, 根据定理 2.2.7 和定义 2.3.1, 只须证明 G 上的每一连续实值函数 f 是左 ω 一致连续的. 因为 G 是 Lindelöf 空间, 所以对每一 $n \in \mathbb{N}$ 我们很容易找到集族 $\mathscr{U}_{f,n} = \{V_j : j \in \omega\} \subset \mathscr{N}(G,e)$ 和子集 $A_{f,n} = \{h_j : j \in \omega\} \subset G$ 满足如下条件:

(i) $G = \bigcup_{j\in\omega} h_j V_j$;

(ii) 对每一 $j \in \omega$ 有 $f(h_j V_j^2) \subset (f(h_j) - \frac{1}{n}, f(h_j) + \frac{1}{n})$.

令 $\mathscr{U}_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_{f,n}$, 下面只要证明 $\mathscr{U}_f$ 满足定理 2.2.6 中的条件 (2), 由此说明 f 是左 ω 一致连续函数. 显然, 有 $|\mathscr{U}_f| \le \omega$ 和 $\mathscr{U}_f \subset \mathscr{N}(G,e)$. 任取 $h \in G$ 和 $\varepsilon > 0$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. 根据上面的条件 (i), 可以找到 $j_0 \in \omega$ 使得 $h \in h_{j_0} V_{j_0}$, 其中 $h_{j_0} \in A_{f,n_0}$ 以及 $V_{j_0} \in \mathscr{U}_{f,n_0} \subset \mathscr{U}_f$. 又根据上面条件 (ii) 可得

$$f(hV_{j_0}) \subset f(h_{j_0} V_{j_0}^2) \subset (f(h_{j_0}) - \frac{1}{n_0}, f(h_{j_0}) + \frac{1}{n_0}) \subset (f(h_{j_0}) - \frac{\varepsilon}{2}, f(h_{j_0}) + \frac{\varepsilon}{2}),$$

也就是说, 当 $h^{-1}y \in V_{j_0}$ 时有

$$|f(h) - f(y)| \le |f(h) - f(h_{j_0})| + |f(h_{j_0}) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

证毕.

由定理 2.3.4 很容易得到如下结果.

推论 2.3.5 *每一具有可数网络的拓扑群的子群具有 property ω-U, 特别地, 每一具有可数基的拓扑群的子群具有 property ω-U.*

注 2.3.6 *定理 2.3.4 和推论 2.3.5 中的 "property ω-U" 不能替换成 "property U". 例如, 实数空间上的加法拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 具有可数基, 但是并不是 $(\mathbb{R},+)$ 上所有的连续实值函数都是一致连续的.*

引理 2.3.7 *[12, Corollary 3.4.19] 设 G 是 ω-narrow 拓扑群, 那么对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 存在具有可数基的拓扑群 H 和连续同态 $\pi : G \to H$, 且 π 满足如下条件: 存在 H 中包含单位元的开邻域 V 满足 $\pi^{-1}(V) \subset U$.*

引理 2.3.8 *设 G 是 ω-narrow 拓扑群以及 $f : G \to \mathbb{R}$ 是函数, 如果 f 是左 ω 一致连续函数或右 ω 一致连续函数, 那么存在具有可数基的拓扑群 K, 以及连续同态 $\pi : G \to K$ 和连续函数 $p : K \to \mathbb{R}$ 满足 $f = p \circ \pi$.*

证明 假设 f 是 G 上的左 ω 一致连续函数. 根据定理 2.2.6, 可以找到可数族 $\mathscr{U}_f \subset \mathscr{N}(G,e)$ 满足如下条件: 对 G 中的每一点 x 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{U}_f$, 使得当 $x^{-1}y \in V$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

因为 G 是 ω-narrow 拓扑群, 所以根据引理 2.3.7, 对每一 $V \in \mathscr{U}_f$ 都存在从 G 到具有可数基的拓扑群 H_V上的连续同态 π_V, 且 π_V 满足如下条件: 存在 H_V 中包含单位元的开邻域 U 满足 $\pi_V^{-1}(U) \subset V$. 定义 $\pi = \Delta_{V\in\mathscr{U}_f}\pi_V$ 为函数族 $\{\pi_V : V \in \mathscr{U}_f\}$ 的对角积.

很显然, G 的同态像 $\pi(G)$ 是具有可数基的拓扑群, 这是因为 $\prod_{V\in\mathscr{U}_f} H_V$ 具有可数基.

断言: 任给 $h_1, h_2 \in G$, 如果 $\pi(h_1) = \pi(h_2)$, 则有 $f(h_1) = f(h_2)$.

事实上, 若断言不成立, 则存在 $h_1, h_2 \in G$ 和 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\pi(h_1) = \pi(h_2) \text{ 且 } f(h_2) \notin (f(h_1) - \varepsilon, f(h_1) + \varepsilon).$$

根据上面 $\mathscr{U}_f$ 的选择, 对 h_1 和 ε 可以找到 $V_{h_1,\varepsilon} \in \mathscr{U}_f$, 使得当 $h_1^{-1}y \in V_{h_1,\varepsilon}$ 时有 $|f(h_1) - f(y)| < \varepsilon$, 这等价于 $f(h_1V_{h_1,\varepsilon}) \subset (f(h_1) - \varepsilon, f(h_1) + \varepsilon)$. 再根据 $\pi_{V_{h_1,\varepsilon}}$ 的性质可以找到拓扑群 $H_{V_{h_1,\varepsilon}}$ 中包含单位元的开邻域 U 满足 $\pi_{V_{h_1,\varepsilon}}^{-1}(U) \subset V_{h_1,\varepsilon}$.

取拓扑群 $H_{V_{h_1,\varepsilon}}$ 中包含单位元的开邻域 W 使得 $W^2 \subset U$. 令 $g = \pi_{V_{h_1,\varepsilon}}(h_1)$. 因为 $\pi(h_1) = \pi(h_2)$, 所以 $g = \pi_{V_{h_1,\varepsilon}}(h_2)$, 进而有

$$\begin{aligned}h_2 \in \pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(gW) &= \pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(g)\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(W)\\ &= h_1\pi^{-1}_{V^{h_1,\varepsilon}}(e)\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(W) \subset h_1\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(W)\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(W)\\ &= h_1\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(W^2) \subset h_1\pi^{-1}_{V_{h_1,\varepsilon}}(U) \subset h_1 V_{h_1,\varepsilon},\end{aligned}$$

从而

$$f(h_2) \in f(h_1 V_{h_1,\varepsilon}) \subset (f(h_1) - \varepsilon, f(h_1) + \varepsilon),$$

故由此矛盾可得到断言的证明.

根据以上断言可以找到唯一的函数 $p : \pi(G) \to \mathbb{R}$ 满足 $f = p \circ \pi$. 下面只须证明 p 是连续的.

任取 $\varepsilon > 0$ 和 $g \in \pi(G)$, 取一点 $h \in G$ 使得 $g = \pi(h)$. 因为 $f = p \circ \pi$ 以及根据上面选择的 $\mathscr{U}_f$, 所以存在 $V_{h,\varepsilon} \in \mathscr{U}_f$ 满足

$$f(hV_{h,\varepsilon}) \subset (f(h) - \varepsilon, f(h) + \varepsilon) = (p(g) - \varepsilon, p(g) + \varepsilon).$$

再由 $\pi_{V_{h,\varepsilon}}$ 的性质, 可以找到群 $H_{V_{h,\varepsilon}}$ 中包含单位元的开邻域 U 使得 $\pi^{-1}_{V_{h,\varepsilon}}(U) \subset V_{h,\varepsilon}$. 再选择群 $H_{V_{h,\varepsilon}}$ 中包含单位元的开邻域 W 满足 $W^2 \subset U$. 令

$$O = \pi(G) \cap (W \times \prod_{V \in \mathscr{U}_f \setminus \{V_{h,\varepsilon}\}} H_V).$$

我们断言有 $p(gO) \subset (p(g) - \varepsilon, p(g) + \varepsilon)$, 从而说明 p 是连续函数.

事实上, 因为 $g_{V_{h,\varepsilon}} = \pi_{V_{h,\varepsilon}}(h)$, 从而

$$\begin{aligned}p(gO) &\subset f(\pi^{-1}(gO))\\ &= f(\pi^{-1}(\pi(G) \cap (g_{V_{h,\varepsilon}}W \times \prod_{V \in \mathscr{U}_f \setminus \{V_{h,\varepsilon}\}} H_V)))\\ &= f(\pi^{-1}_{V_{h,\varepsilon}}(g_{V_{h,\varepsilon}}W)) \subset f(h\pi^{-1}_{V_{h,\varepsilon}}(U)) \subset f(hV_{h,\varepsilon})\\ &\subset (f(h) - \varepsilon, f(h) + \varepsilon) = (p(g) - \varepsilon, p(g) + \varepsilon).\end{aligned}$$

这就完成了当 f 是左 ω 一致连续函数时的证明.

当 f 是右 ω 一致连续函数时同理可证. 证毕.

接下来给出 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群的一个刻画.

定理 2.3.9 *G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群当且仅当 G 是 ω-narrow 拓扑群且具有 property ω-U.*

证明 充分性直接由引理 2.3.8 可得. 反之, 假设 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 那么 G 是 ω-narrow 拓扑群 [81, Lemma 2.2], 因此只需证明 G 具有 property ω-U. 任取 G 上的连续实值函数 f, 因为 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 所以存在具有可数基的拓扑群 K, 连续同态 $\pi: G \to K$ 以及连续函数 $p: K \to \mathbb{R}$ 满足 $f = p \circ \pi$. 设 $\mathscr{B}$ 是群 K 中单位元的可数局部基. 令 $\mathscr{U}_f = \{\pi^{-1}(U) : U \in \mathscr{B}\}$. 我们很容易验证 $\mathscr{U}_f$ 是群 G 中包含单位元的可数开邻域族且满足如下条件: 对每一点 $x \in G$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_{x,\varepsilon} \in \mathcal{U}_f$ 使得当 $x^{-1}y \in U_{x,\varepsilon}$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 从而根据定理 2.2.6 可得 f 是左 ω 一致连续函数. 再由定理 2.2.7 易得 G 具有 property ω-U. 证毕.

因为存在 ω-narrow 拓扑群 G 但不是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群 [12, Example 8.2.1], 所以根据定理 2.3.9 存在 G 上的某一连续实值函数不是 ω 一致连续的.

推论 2.3.10 *[12, 8.1.b] 如果 G 是 ω-narrow 拓扑群且具有 property U, 那么 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.*

因为每一 Lindelöf 拓扑群是 ω-narrow 拓扑群 [12, Proposition 3.4.6], 所以根据定理 2.3.4 和定理 2.3.9 可得以下结果.

推论 2.3.11 *[82, Theorem 5.5] 每一 Lindelöf 拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.*

因为每一 precompact 拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable [81, Corollary 1.14], 所以根据定理 2.3.9 有以下结果.

推论 2.3.12 *每一 precompact 拓扑群具有 property ω-U.*

注 2.3.13 *推论 2.3.12 中 "property ω-U" 不能替换成 "property U", 因为每一 precompact 拓扑群且具有 property U 是伪紧空间 [23, Theorem 2.7].*

设 X 是拓扑空间, 如果 X 中的每一局部有限 (等价于离散) 开集族都是可数的, 那么 X 是伪 ω_1 紧空间 (*pseudo-ω_1-compact* space) [12]. 显然, 每一伪紧空间是伪 ω_1 紧空间.

推论 2.3.14 设 G 是具有 *property* U 的拓扑群, 则

(1) G *是伪* ω_1 *紧空间当且仅当* G *是* $\mathbb{R}$-*factorizable* *拓扑群;*

(2) *如果* G *是* ω-*narrow* *拓扑群, 那么* G *的每一连续同态像是* $\mathbb{R}$-*factorizable* *拓扑群.*

证明 (1) 因为当拓扑群 G 是 P 空间时, G 是伪 ω_1 紧空间当且仅当 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群 [84, Theorem 4.16], 所以不仿假设 G 不是 P 群但具有 property U.

充分性. 因为若拓扑群具有 property U, 那么它要么是 precompact 拓扑群, 要么是 P 群 [23, Theorem 2.2], 因此 G 是 precompact 拓扑群. 又因为每一 precompact 且具有 property U 的拓扑群是伪紧空间 [23, Theorem 2.7], 所以 G 是伪 ω_1 紧空间.

必要性. 假设 G 是伪 ω_1 紧的拓扑群且具有 property U. 根据 [12, Proposition 3.4.31] 和注 2.3.2 可得 G 是 ω-narrow 拓扑群且具有 property ω-U, 因此由定理 2.3.9 可得 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.

(2) 假设 G 是 ω-narrow 拓扑群且具有 property U, 因此由定理 2.3.9 可得 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 因为已经知道 $\mathbb{R}$-factorizable P 群的每一连续同态像是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群 [84, Corollary 5.9], 因此只需证明当 G 不是 P 群时, G 的连续同态像是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.

事实上, 当 G 不是 P 群但具有 property U 时, 在 (1) 的充分性证明中我们已经证明 G 是伪紧空间. 又因为伪紧性被连续映射所保持且 ω-narrow 性质被连续同态所保持 [12, Proposition 3.4.2], 而且每一伪紧拓扑群都具有 property U [23, Theorem 1.5], 所以由注 2.3.2 和定理 2.3.9 可得 G 的连续同态像是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 证毕.

推论 2.3.15 *[79, Theorem 3.8] 局部连通的* $\mathbb{R}$-*factorizable* *拓扑群* G *中的每一局部有限开集族是可数的.*

证明 假设在 G 中存在不可数的局部有限开集族, 则在 G 中可以找到不可数多个离散的非空开集族 $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ [75, Lemma 1]. 众所周知, 每一 Haudsorff 拓扑群都是完全正则的, 因此对每一 $\alpha < \omega_1$ 选择一点 $x_\alpha \in O_\alpha$, 可以定义连续函

数 $f_\alpha : G \to [0,1]$ 满足 $f_\alpha(x_\alpha) = 1$ 且 $f_\alpha(G \setminus O_\alpha) = \{0\}$, 那么函数 $f = \sum_{\alpha<\omega_1} f_\alpha$ 是连续的. 因为 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 所以由定理 2.3.9 可得 f 是 ω 一致连续函数. 又因为 G 是局部连通的, 所以可以找到群 G 中包含单位元的连通开邻域可数族 $\mathcal{V}$ 满足如下条件: 对每一点 $x \in G$ 都存在 $V \in \mathcal{V}$, 使得当 $y \in xV$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < 1$, 从而对每一 $\beta < \omega_1$, 存在 $V_\beta \in \mathcal{V}$ 满足 $x_\beta V_\beta \subset \bigcup_{\alpha<\omega_1} O_\alpha$. 又因为 $x_\beta V_\beta$ 是连通的以及 $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是离散的, 所以有 $x_\beta V_\beta \subset O_\beta$. 因为 $\mathcal{V}$ 是可数的, 所以存在 $V_0 \in \mathcal{V}$ 以及不可数子集 $A \subset \omega_1$ 使得对每一 $\alpha \in A$ 满足 $x_\alpha V_0 \subset O_\alpha$, 从而当 α, $\beta \in A$ 且 $\alpha \neq \beta$ 时有 $x_\alpha V_0 \cap x_\beta V_0 = \emptyset$. 设 W 是群 G 中包含单位元的对称开邻域且满足 $W^2 \subset V_0$, 由定理 2.3.9 可得 G 是 ω-narrow 拓扑群, 因此存在可数子集 $K \subset G$ 满足 $G = WK$. 又因为 A 是不可数集, 所以我们可以找到一点 $x \in K$ 以及不同的 $\alpha, \beta \in A$ 满足 $\{x_\alpha, x_\beta\} \subset Wx$, 故 $x_\beta^{-1} x_\alpha \in W^2 \subset V_0$, 也就是说, $x_\alpha \in x_\beta V_0$, 这与 $x_\alpha V_0 \cap x_\beta V_0 = \emptyset$ 矛盾. 证毕.

定理 2.3.16 *设 G 是拓扑群且具有 property ω-U (property $B\omega$-U), 如果 N 是 G 中闭的不变子群, 那么商群 G/N 具有 property ω-U (property $B\omega$-U).*

证明 设 $p : G \to G/N$ 是商同态, 那么 p 是开的连续同态 [12, Theorem 1.5.1]. 任取 G/N 上连续 (有界连续) 实值函数 f, 那么 $f \circ p$ 是 G 上的连续 (有界连续) 实值函数. 因为 G 具有 property ω-U (property $B\omega$-U), 所以由定义 2.3.1 可得 $f \circ p$ 是 ω 一致连续函数. 根据定理 2.2.6, 我们可以找到可数族 $\mathcal{U}_{f \circ p} \subset \mathscr{N}(G, e)$ 满足如下条件: 对每一 $x \in G$ 以及每一 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_{x,\varepsilon} \in \mathcal{U}_{f \circ p}$, 使得当 $x^{-1} y \in U_{x,\varepsilon}$ 时, 有 $|f \circ p(x) - f \circ p(y)| < \varepsilon$. 令 $\mathscr{U}_f = \{p(U) : U \in \mathscr{U}_{f \circ p}\}$, 因为 p 是开连续同态, 所以我们很容易验证 $\mathscr{U}_f$ 满足定理 2.2.6 中条件 (2), 这就说明 f 是 (左) ω 一致连续函数, 因此由定理 2.2.7 可得商群 G/N 具有 property ω-U (property $B\omega$-U). 证毕.

因为连续同态保持 ω-narrow 性质 [12, Proposition 3.4.2], 所以由定理 2.3.9 和定理 2.3.16 很容易得到以下结果.

推论 2.3.17 *[79, Theorem 3.10] $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群的每一开连续同态像是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.*

§2.4 ω 一致连续性与 m-factorizable 拓扑群

设 G 是拓扑群, M 是任意可度量化空间, 如果对每一连续函数 $f: G \to M$, 存在具有可数基 (第一可数) 的拓扑群 K, 连续同态 $p: G \to K$ 和连续函数 $g: K \to M$, 满足 $f = g \circ p$, 那么称 G 是 *m-factorizable* 拓扑群 [12] ($\mathscr{M}$-*factorizable* 拓扑群 [12]). 显然, 每一 m-factorizable 拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 但是, 是否每一 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群是 m-factorizable 拓扑群, 仍然是一公开问题 [12, Open Problem 8.5.1].

以下问题是 A. V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 在 2008 年提出来的. 此节中我们将给出此问题的正面回答.

问题 2.4.1 *[12, Open Problem 8.4.4] $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群的商群仍是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群吗?*

在回答问题 2.4.1 之前, 首先我们得把定义 2.2.1 和定义 2.2.2 推广到度量空间上.

定义 2.4.2 *设 G 是拓扑群, (M,ρ) 是度量空间以及 $f: G \to M$ 是函数, 如果对每一 $\varepsilon > 0$, 存在可数族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{N}(G,e)$ 满足如下条件: 对每一点 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得当 $x^{-1}y \in U$ $(yx^{-1} \in U)$ 时有 $\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon$, 那么 f 是左 (右) ω 一致连续函数 (left (right) ω-uniformly continuous function).*

定义 2.4.3 *设 G 是拓扑群, (M,ρ) 是度量空间以及 $f: G \to M$ 是函数, 如果 f 既是左 ω 一致连续函数, 又是右 ω 一致连续函数, 那么 f 是 ω 一致连续函数 (ω-uniformly continuous function).*

注 2.4.4 *事实上, 当把定义 2.2.1 和定义 2.2.2 中实数空间看做通常的欧氏度量空间时, 他们的本质就与定义 2.4.2 和定义 2.4.3 一样.*

引理 2.4.5 *[12, Theorem 3.4.18] 设 G 是 ω-balanced 拓扑群, 那么, 对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 存在可度量的拓扑群 H, 连续同态 $\pi: G \to H$ 以及 H 中包含单位元的邻域 V 满足 $\pi^{-1}(V) \subset U$.*

众所周知, 拓扑群 G 是可度量化的当且仅当 G 是第一可数的 [35, Theorem 3.3.12]. 从引理 2.3.8 的证明中可以看出, 其证明只用到实数空间 $\mathbb{R}$ 的度量性质, 而没有用到它的序结构性质, 因此只要对其证明做少许改动, 再由引理 2.3.7 和引理 2.4.5 就能得到以下引理.

引理 2.4.6 设 G 是 *ω-narrow (ω-balanced)* 拓扑群, (M,ρ) 是度量空间以及 $f:G\to M$ 是函数, 如果 f 是左 ω 一致连续函数或右 ω 一致连续函数, 那么存在第二可数 (第一可数) 的拓扑群 K, 连续同态 $p:G\to K$ 和连续函数 $h:K\to M$, 使得 $f=h\circ p$.

以下结果留给读者作练习.

引理 2.4.7 设 G 是拓扑群以及 (M,ρ) 是度量空间, 那么每一从 G 到 M 上的连续函数是左 ω 一致连续的当且仅当每一从 G 到 M 上的连续函数是右 ω 一致连续的.

定义 2.4.8 设 G 是拓扑群, 任给度量空间 (M,ρ), 如果每一连续函数 $f:G\to M$ 是 ω 一致连续的, 那么称 G 具有 *property strongly ω-U*.

每一 m-factorizable 拓扑群都是 ω-narrow 拓扑群 [12]. 根据引理 2.4.6 以及引理 2.4.7, 我们只要对定理 2.3.9 的证明做少许改动就可以得到以下结果.

定理 2.4.9 拓扑群 G 是 *m-factorizable* 拓扑群当且仅当它是 *ω-narrow* 拓扑群且具有 *property strongly ω-U*.

引理 2.4.10 *[12, Theorem 3.4.22]* 拓扑群 G 是 *ω-balanced* 拓扑群当且仅当它拓扑同构一族可度量化拓扑群的积空间的某个子群.

引理 2.4.11 每一 $\mathscr{M}$*-factorizable* 拓扑群是 *ω-balanced* 拓扑群.

证明 设 G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群. 要证明 G 是 ω-balanced 拓扑群, 根据引理 2.4.10, 只需证明拓扑群 G 拓扑同构一族可度量化拓扑群的积空间的某个子群.

因为 G 满足 Hausdorff 分离公里, 所以 G 是完全正则的. 用 $\gamma=\{f_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 表示 G 上所有的连续实值函数, 那么 γ 能分离 G 中的每一点和不包含此

点的闭集. 又因为 G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群, 所以对每一 $f_\alpha \in \gamma$ 存在第一可数的拓扑群 K_α, 连续同态 $p_\alpha : G \to K_\alpha$ 以及连续函数 $g_\alpha : K_\alpha \to \mathbb{R}$, 满足 $f_\alpha = g_\alpha \circ p_\alpha$. 因为每一第一可数的拓扑群是可度量化的, 所以每一拓扑群 K_α 是可度量化的. 令 $\delta = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 我们将证明函数族 δ 能分离 G 中的每一点和不包含此点的闭集. 取 G 中任意一点 x 和任意闭集 F 且满足 $x \notin F$, 那么存在 $f_\alpha \in \gamma$ 使得 $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$. 下面证明 $p_\alpha(x) \notin \overline{p_\alpha(F)}$, 这就说明 δ 能分离 G 中的点和不包含此点的闭集. 事实上, 假设不成立, 那么 $p_\alpha(x) \in \overline{p_\alpha(F)}$, 再根据 $f_\alpha = g_\alpha \circ p_\alpha$ 以及 g_α 的连续性可得

$$f_\alpha(x) = g_\alpha(p_\alpha(x)) \in g_\alpha(\overline{p_\alpha(F)}) \subset \overline{g_\alpha(p_\alpha(F))} = \overline{f_\alpha(F)},$$

故矛盾, 从而 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha : G \to \prod_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$ 是拓扑同构嵌入映射, 其中 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha$ 是函数族 δ 的对角积. 证毕.

根据引理 2.4.6, 引理 2.4.7 和 引理 2.4.11, 对定理 2.3.9 的证明做少许改动就很容易得到以下定理.

定理 2.4.12 *拓扑群 G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群当且仅当它是 ω-balanced 拓扑群且具有 property strongly ω-U.*

下面的结果是显然的.

引理 2.4.13 *ω-balanced 拓扑群的每一连续开同态像是 ω-balanced 拓扑群.*

以下定理正面回答了问题 2.4.1.

定理 2.4.14 *$\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群的每一商群是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群.*

证明 设 G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群以及 $p : G \to K$ 是商同态, 其中 K 是拓扑群. 根据 [12, Theorem 1.5.1] 可得 p 是开同态, 因此由引理 2.4.11 和引理 2.4.13 可得 K 是 ω-balanced 拓扑群. 任给度量空间 (M, ρ), 根据引理 2.4.7 和定理 2.4.12, 只需证明每一从 K 到 (M, ρ) 上的连续函数都是左 ω 一致连续函数. 因为 G 是 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群, 所以由定理 2.4.12 可得 $f \circ p$ 是 ω 一致连续函数. 任给 $\varepsilon > 0$, 由定义 2.4.2 可以找到可数族 $\mu \subset \mathscr{N}(G, e)$ 满足如下条件: 对每一点 $x \in G$, 存在 $U \in \mu$, 使得当 $x^{-1}y \in U$ 时有 $\rho(f(p(x)), f(p(y))) < \varepsilon$.

令 $\gamma = \{p(U) : U \in \mu\}$, 那么显然 γ 是拓扑群 K 中包含单位元且对称的可数开邻域族. 对每一点 $x \in K$, 取一点 $z \in G$ 满足 $x = p(z)$, 则存在 $U \in \mu$, 使得当 $z^{-1}y \in U$ 时有 $\rho(f(p(z)), f(p(y))) < \varepsilon$, 也就是说, 存在 $p(U) \in \gamma$ 使得当 $x^{-1}x' \in p(U)$ 时有$\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$, 这就证明了 f 是左 ω 一致连续函数. 证毕.

第三章　仿拓扑群中的基数不变量与 ω 拟一致连续性

本章中首先研究仿拓扑群中的基数不变量, 把拓扑群中一些经典的基数函数推广到仿拓扑群中, 以及在仿拓扑群中建立起基数函数之间的一些新的联系, 这些结果改进了 A. V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 的一些结果. 最后还研究了仿拓扑群上的连续实值函数, 作为拟一致连续函数的推广, 在仿拓扑群中我们引入 ω 拟一致连续实值函数且研究了它的一些性质. 事实表明, ω 拟一致连续函数在接下来的一章中用来刻画 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群起着重要作用. 本章主要取材于作者与导师林寿教授合作的文章 "Cardinal invariants and $\mathbb{R}$-factorizability in paratopological groups".

§3.1　仿拓扑群中的基数不变量

在此节中, 主要研究仿拓扑群中的基数不变量, 首先介绍一些概念.

设 G 是仿拓扑群, 用 τ 表示 G 上的拓扑. 令 $\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}$, 那么称拓扑 τ^{-1} 为 G 上的**共轭拓扑** (*conjugate topology*) [68]. 显然 $G' = (G, \tau^{-1})$ 也是仿拓扑群且逆运算 $x \to x^{-1}$ 是从 G 到 G' 的同胚. 取上确界拓扑 $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$, 则 τ^* 是 G 上的群拓扑, 且称拓扑群 $G^* = (G, \tau^*)$ 为 G 的**相伴拓扑群** (*topological group associated to G*) [68]. 很容易可以得到集族 $\{U \cap U^{-1} : e \in U \in \tau\}$ 是拓扑群 G^* 中单位元 e 处局部基. 这些符号在接下来的章节中都沿用. 显然, (1) 对每一 T_0 仿拓扑群 G, 则相伴拓扑群 G^* 满足 Hausdorff 分离公理; (2) 恒等映射 $i : G^* \to G$ 是连续的; (3) 对每一拓扑群 H 有 $H = H^*$.

设 $\mathcal{P}$ 是拓扑性质, G 是仿拓扑群, 如果 G 的相伴拓扑群 G^* 具有性质 $\mathcal{P}$, 那么称 G 是 *totally* $\mathcal{P}$ 仿拓扑群 [68, Definition 3.1].

命题 3.1.1 描述了仿拓扑群 G 和它的相伴拓扑群 G^* 之间的关系, 它是 [68, Corollary 3.3] 的一般形式.

命题 3.1.1　*设 $\mathcal{P}$ 是有限乘积保持且关于闭子空间遗传的拓扑性质, 如果 T_1 仿拓扑群 G 具有性质 $\mathcal{P}$, 则它的相伴拓扑群 G^* 也具有性质 $\mathcal{P}$.*

证明　定义函数 $f : G \times G' \to G$ 如下: $f(x, y) = xy^{-1}$. 因为 G 是仿拓扑群, 所以很容易验证 f 是连续函数. 又因为 G 满足 T_1分离公理, 所以 $G \times G'$ 的对角线

$\Delta = \{(x,x) : x \in G\} = f^{-1}(e)$ 在 $G \times G'$ 中是闭集, 其中 e 是 G 中单位元. 根据 [69, Lemma 3.2], 可得 Δ 是满足 Hausdorff 分离公理的拓扑群且拓扑同构于 G^*. 又因为性质 $\mathcal{P}$ 有限乘积保持且关于闭子空间遗传, 从而此命题成立. 证毕.

根据命题 3.1.1 很容易得到以下结果.

推论 3.1.2 *设 $\mathcal{P}$ 是有限乘积保持, 关于闭子空间遗传且被连续映射保持的拓扑性质, 那么仿拓扑群 G 具有性质 $\mathcal{P}$ 当且仅当它的相伴拓扑群 G^* 具有性质 $\mathcal{P}$.*

设 G 是满足 Hausdorff 分离公理的仿拓扑群以及 e 是 G 的单位元. G 的 *Hausdorff number* [85], 简记为 $Hs(G)$, 是满足如下条件的最小基数 κ: 对包含 e 的每一邻域 U, 存在包含 e 的邻域族 γ 满足 $\bigcap_{V\in\gamma} VV^{-1} \subset U$ 以及 $|\gamma| \leq \kappa$. 类似地, 若 G 满足正则分离公理, 那么 G 的 *index of regularity* [85], 简记为 $Ir(G)$, 是满足如下条件的最小基数 κ: 对包含 e 的每一邻域 U, 可以找到包含 e 的邻域 V 和邻域族 γ 满足 $\bigcap_{W\in\gamma} VW^{-1} \subset U$ 以及 $|\gamma| \leq \kappa$. 显然, 每一 T_0 拓扑群有 $Hs(G) = 1$ 以及 $Ir(G) = 1$, 且每一第一可数的且满足 Hausdorff (正则) 分离公理的仿拓扑群 G 有 $Hs(G) \leq \omega$ ($Ir(G) \leq \omega$).

从 [85, Theorem 2.7, Theorem 3.6] 的证明中很容易得到以下引理. 此引理在这章中起着重要作用.

引理 3.1.3 *设 G 是 Hausdorff (正则) ω-balanced 仿拓扑群且满足 $Hs(G) \leq \omega$ ($Ir(G) \leq \omega$), 那么对 G 中包含单位元 e 的每一开邻域 U, 存在 Hausdorff (正则) 第一可数的仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi : G \to H$ 以及 H 中包含单位元的某一邻域 V, 使得 $\pi^{-1}(V) \subset U$.*

定理 3.1.4 *设 G 是 Hausdorff, ω-balanced 仿拓扑群且满足 $Hs(G) \leq \omega$, 如果 G 的每一满足第一可数的连续同态像是 τ-narrow 仿拓扑群, 那么 G 也是 τ-narrow 仿拓扑群.*

证明 设 U 是 G 中包含单位元的开邻域, 取 G 中包含单位元的开邻域 V 满足 $V^2 \subset U$, 那么由引理 3.1.3, 存在 Hausdorff 第一可数的仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi : G \to H$ 满足如下条件: 存在 H 中包含单位元的邻域 W 使得 $\pi^{-1}(W) \subset V$. 根据假设有 H 是 τ-narrow 仿拓扑群, 因此对开邻域 W 可选择子集 $K \subset H$ 满足 $|K| \leq \tau$ 且 $KW = WK = H$. 取 G 中子集 F 满足 $|F| \leq \tau$ 且 $\pi(F) = K$, 我们

断言 $UF = FU = G$. 事实上, 取任意 $x \in G$, 那么存在 $b \in K$ 使得 $\pi(x) \in bW$. 选择一元 $a \in F$ 使得 $\pi(a) = b$. 显然, $\pi(x) \in bW = \pi(a)W \subset \pi(aV)$, 从而

$$x \in \pi^{-1}(\pi(aV)) = aV\pi^{-1}(e) \subset aV\pi^{-1}(W) \subset aVV \subset aU \subset FU.$$

这就证明了 $FU = G$. 同理, 很容易证明 $UF = G$, 故 G 是 τ-narrow 仿拓扑群. 证毕.

显然, 每一阿贝尔拓扑群是 ω-balanced 拓扑群, 因此很容易得到以下结果.

推论 3.1.5 *[12, Proposition 5.1.13] 设 G 是阿贝尔拓扑群, 如果 G 的每一满足第一可数的连续同态像是 τ-narrow 拓扑群, 那么 G 是 τ-narrow 拓扑群.*

定理 3.1.6 *每一 totally τ-narrow 仿拓扑群是 τ-balanced 仿拓扑群.*

证明 设 G 是 totally τ-narrow 仿拓扑群, e 是 G 的单位元. 任取包含 e 的开邻域 U, 选择包含 e 的开邻域 V 满足 $V^3 \subset U$. 因为 G 的相伴拓扑群 G^* 是 τ-narrow 拓扑群, 所以对 G^* 中包含单位元的开邻域 $O = V \cap V^{-1}$, 存在子集 $C \subset G^*$ 满足 $CO = OC = G^*$ 且 $|C| \leq \tau$. 显然, $O \subset V$ 以及 $O \subset V^{-1}$. 因为 G 中的乘法运算联合连续, 所以对每一 $x \in C$ 可以找到 G 中包含单位元的开邻域 W_x, 使得 $xW_xx^{-1} \subset V$. 我们断言集族 $\gamma = \{W_x : x \in C\}$ 从属于 U, 也就是说, 对任意的 $x \in G$, 存在 $W \in \gamma$, 使得 $xWx^{-1} \subset U$.

事实上, 取任意 $y \in G$, 则存在 $x \in C$ 满足 $y \in Ox$, 因此

$$yW_xy^{-1} \subset OxW_xx^{-1}O^{-1} \subset V(xW_xx^{-1})V \subset V^3 \subset U.$$

这就证明了 $inv(G) \leq \tau$, 即 G 是 τ-balanced 仿拓扑群. 证毕.

推论 3.1.7 *[68, Proposition 3.8] 每一 totally ω-narrow 仿拓扑群 G 是 ω-balanced 仿拓扑群, 即 $inv(G) \leq \omega$.*

设 G 是仿拓扑群, B 是 G 的子集, 如果对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 存在子集 $F \subset G$ 满足 $|F| \leq \tau$ 且 $B \subset FU \cap UF$, 那么称 B 是 G 中 *τ-narrow 子集* [12]. 显然, G 是 τ-narrow 仿拓扑群当且仅当 G 在自身中是 τ-narrow 子集. 每一 τ-narrow 仿拓扑的任意子集在此群中是 τ-narrow 子集.

定理 3.1.8 *设 G 是仿拓扑群, 则 G 中满足下面条件之一的任意子集都是 G 中的 τ-narrow 子集:*

(1) $l(B) \le \tau$;

(2) $c(B^*) \le \tau$, 其中 B^* 是看作子集 B 被赋予 G 的相伴拓扑群 G^* 的子空间拓扑.

证明 对于 (1) 几乎是显然的. 事实上, 若 U 是 G 中包含单位元的任意开邻域, 那么显然 $\{xU : x \in G\}$ 和 $\{Ux : x \in G\}$ 是 G 的两个开覆盖. 因为 $l(B) \le \tau$, 所以存在 G 中的两个子集 C_1 和 C_2 且满足 $|C_i| \le \tau$ $(i = 1, 2)$ 以及集族 $\{xU : x \in C_1\}$ 和集族 $\{Ux : x \in C_2\}$ 都覆盖 B, 等价于 $B \subset C_1U \cap UC_2$, 故 B 是 G 中的 τ-narrow 子集.

对于 (2), 若 U 是 G 中包含单位元的任意开邻域, 那么显然 U 也是 G^* 中的开邻域. 因为 $c(B^*) \le \tau$, 所以根据 [12, Proposition 5.1.3] 我们可以找到子集 $C \subset G^* = G$ (看作集合时) 满足 $B \subset CU \cap UC$ 且 $|C| \le \tau$, 这就说明 B 也是 G 中的 τ-narrow 子集. 证毕.

推论 3.1.9 *每一仿拓扑群 G 都满足不等式 $ib(G) \le l(G)$ 和 $ib(G) \le c(G^*)$.*

接下来研究仿拓扑群中基数不变量之间新的联系.

定理 3.1.10 *每一仿拓扑群 G 有 $w(G) = ib(G^*) \times \chi(G)$.*

证明 显然, 根据命题 3.1.1 有 $\chi(G^*) \le \chi(G) \times \chi(G) = \chi(G)$. 因为每一拓扑群 H 有 $w(H) = ib(H) \times \chi(H)$ [12, Proposition 5.2.3], 再加上 G 是它的相伴拓扑群 G^* 的连续像, 所以有 $nw(G) \le w(G^*) \le ib(G^*) \times \chi(G)$. 令 $nw(G) = \delta$, $ib(G^*) = \kappa$, 以及 $\chi(G) = \gamma$. 任取 G 中单位元处的邻域基 $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ 以及 G 中的一网络 $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \delta\}$. 我们断言集族 $\{U_\beta V_\alpha : (\beta, \alpha) \in \delta \times \gamma\}$ 是 G 的一个基. 这就说明 $w(G) \le \delta \times \gamma = nw(G) \times \chi(G) \le ib(G^*) \times \chi(G) \times \chi(G) = ib(G^*) \times \chi(G)$.

事实上, 任取 G 中非空开集 U 以及任意点 $x \in U$, 根据 G 的乘法运算是联合连续, 可以找到 G 中的两个开集 V_α 和 W 满足 $V_\alpha \in \mathcal{V}$, $x \in W$ 以及 $WV_\alpha \subset U$. 因为集族 $\mathcal{U}$ 是 G 的网络, 所以存在 $U_\beta \in \mathcal{U}$ 使得 $x \in U_\beta \subset W$, 从而 $x \in U_\beta V_\alpha \subset WV_\alpha \subset U$.

下面证明 $ib(G^*)\times\chi(G)\le w(G)$. 显然, $\chi(G)\le w(G)$, 故只要证明 $ib(G^*)\le w(G)$ 就足够了. 事实上, 根据命题 3.1.1 和推论 3.1.9 很容易得到 $ib(G^*)\le l(G^*)\le w(G^*)\le w(G)\times w(G)=w(G)$. 证毕.

注 3.1.11 *在定理 3.1.10 中 "$ib(G^*)$" 不能用 "$ib(G)$" 代替, 也就是说, 等式 $w(G)=ib(G)\times\chi(G)$ 未必对所有的仿拓扑群 G 都成立. 事实上, Sorgenfrey 直线 $\mathbb{S}$ 是第一可数的且 Lindelöf 仿拓扑群, 故由推论 3.1.9 可得 $ib(\mathbb{S})\le\omega$ 以及 $\chi(\mathbb{S})\le\omega$, 但显然有 $w(\mathbb{S})>\omega=\omega\times\omega\ge ib(\mathbb{S})\times\chi(\mathbb{S})$.*

根据定理 3.1.10, 很容易得到推论 3.1.12 和推论 3.1.13.

推论 3.1.12 *每一 totally ω-narrow 仿拓扑群 G 有 $w(G)=\chi(G)$.*

推论 3.1.13 *[68, Proposition 3.5] 每一第一可数的 totally ω-narrow 仿拓扑群具有可数基.*

推论 3.1.14 *每一仿拓扑群 G 有 $w(G)=nw(G)\times\chi(G)$.*

证明 显然, $nw(G)\times\chi(G)\le w(G)$. 由命题 3.1.1 和推论 3.1.9 可得 $ib(G^*)\le l(G^*)\le nw(G^*)\le nw(G)$, 因此再根据定理 3.1.10 有 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\le nw(G)\times\chi(G)$. 证毕.

推论 3.1.15 *[11, Proposition 2.13] 每一第一可数且具有可数网络的仿拓扑群具有可数基.*

证明 直接由推论 3.1.14 可得. 证毕.

设 G 是 T_1 仿拓扑群, 如果对 G 上的每一实值连续函数 f, 存在 T_1 第二可数的仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi:G\to H$ 和连续函数 $h:H\to\mathbb{R}$, 满足 $f=h\circ\pi$, 那么称 G 是 $\mathbb{R}_1$-*factorizable* 仿拓扑群 [69]. 因为每一完全正则的 $\mathbb{R}_1$-factorizable 仿拓扑群都是 totally ω-narrow 仿拓扑群 [69, Proposition 3.5], 所以很容易得到以下结果.

推论 3.1.16 *[69, Proposition 3.4] 每一完全正则的 $\mathbb{R}_1$-factorizable 仿拓扑群 G 满足等式 $w(G)=\chi(G)$.*

推论 3.1.17 *每一 T_1 仿拓扑群 G 都有下面等式和不等式成立:*

(1) $w(G)=d(G^*)\times\chi(G)$;

(2) $w(G)=c(G^*)\times\chi(G)$;

(3) $w(G)=l(G^*)\times\chi(G)$;

(4) $w(G)=w(G^*)\times\chi(G)$;

(5) $w(G)\leq k(G^*)\times\chi(G)\leq k(G)\times\chi(G)$.

证明 (1) 因为每一拓扑群 H 有 $ib(H)\leq c(H)\leq d(H)$ [12], 所以根据定理 3.1.10 可得到不等式 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\leq d(G^*)\times\chi(G)$ 对仿拓扑群 G 成立. 显然, $\chi(G)\leq w(G)$. 再根据命题 3.1.1, 很容易得到 $w(G^*)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$, 这就说明 $d(G^*)\leq w(G^*)\leq w(G)$, 从而 $d(G^*)\times\chi(G)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$.

(2) 根据推论 3.1.9 有 $ib(G^*)\leq c(G^*)$. 再根据定理 3.1.10 可得 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\leq c(G^*)\times\chi(G)$. 由命题 3.1.1 显然有 $\chi(G)\leq w(G)$ 和 $c(G^*)\leq w(G^*)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$, 从而 $c(G^*)\times\chi(G)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$.

(3) 根据推论 3.1.9 有 $ib(G)\leq l(G)$. 由定理 3.1.10 可得 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\leq l(G^*)\times\chi(G)$. 再根据命题 3.1.1 显然有 $l(G^*)\leq w(G^*)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$ 以及 $\chi(G)\leq w(G)$, 从而 $l(G^*)\times\chi(G)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$.

(4) 由命题 3.1.1 可得 $w(G^*)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$, 从而 $w(G^*)\times\chi(G)\leq w(G)\times w(G)=w(G)$. 显然, $ib(G^*)\leq w(G^*)$. 再根据定理 3.1.10 可得 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\leq w(G^*)\times\chi(G)$.

(5) 由命题 3.1.1 易得 $k(G^*)\leq k(G)\times k(G)=k(G)$. 因为每一拓扑群 H 有 $ib(H)\leq l(H)\leq k(H)$, 所以 $ib(G^*)\leq k(G^*)\leq k(G)$, 进而根据定理 3.1.10 可得 $w(G)=ib(G^*)\times\chi(G)\leq k(G^*)\times\chi(G)\leq k(G)\times\chi(G)$. 证毕.

注 3.1.18 *(1) 在推论 3.1.17 中 $d(G^*)$, $c(G^*)$ 和 $l(G^*)$ 不能分别被 $d(G)$, $c(G)$ 和 $l(G)$ 所代替. 事实上, 设 $\mathbb{S}$ 是 Sorgenfrey 直线, 则 $\mathbb{S}$ 是仿拓扑群. 显然, $c(\mathbb{S})=d(\mathbb{S})=l(\mathbb{S})=\omega$ 以及 $\chi(\mathbb{S})=\omega$, 然而, $w(\mathbb{S})>\omega=d(\mathbb{S})\times\chi(\mathbb{S})=l(\mathbb{S})\times\chi(\mathbb{S})=c(\mathbb{S})\times\chi(\mathbb{S})$.*

(2) 事实上, 在推论 3.1.17 中 (1), (2) 和 (4) 不需要要求仿拓扑群满足 T_1 分离公理.

推论 3.1.19 每一 σ 紧的 T_1 仿拓扑群 G 有 $w(G) = \chi(G)$.

证明 显然, $w(G) \geq \chi(G)$. 因为 $k(G) \leq \omega$, 所以由推论 3.1.17 中的 (5) 直接可得结论. 证毕.

定理 3.1.20 每一 T_1 仿拓扑群 G 满足不等式 $|G| \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G)}$, 特别地, $|G| \leq 2^{l(G^*)\times\psi(G)}$ 以及 $|G| \leq 2^{c(G^*)\times\psi(G)}$.

证明 由命题 3.1.1 易得 $\psi(G^*) \leq \psi(G) \times \psi(G) = \psi(G)$. 再根据 $|G^*| \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G^*)}$ [12, Theorem 5.2.15], 可得 $|G| = |G^*| \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G^*)} \leq 2^{ib(G^*)\times\psi(G)}$, 剩下的只需应用推论 3.1.9 即可. 证毕.

推论 3.1.21 每一 *totally* ω*-narrow*, T_1 仿拓扑群 G 满足 $|G| \leq 2^{\psi(G)}$.

定理 3.1.22 设 G 是 T_1 仿拓扑群, 则有 $nw(G) \leq k(G) \times \psi(G)$.

证明 由命题 3.1.1 易得 $k(G^*) \leq k(G) \times k(G) = k(G)$ 以及 $\psi(G^*) \leq \psi(G) \times \psi(G) = \psi(G)$. 因为 G 是它的相伴拓扑群 G^* 的连续像, 所以再根据 $nw(G^*) \leq k(G^*)\times\psi(G^*)$ [12, Proposition 5.2.17], 可得 $nw(G) \leq nw(G^*) \leq k(G^*)\times\psi(G^*) \leq k(G) \times \psi(G)$. 证毕.

推论 3.1.23 每一 *Hausdorff*, σ 紧的仿拓扑群 G 有 $nw(G) = \psi(G)$.

证明 由定理 3.1.22, 只需证明不等式 $\psi(G) \leq nw(G)$ 成立. 取 G 中的网络 $\{V_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ 且满足 $\gamma = nw(G)$, 因为 G 满足 Hausdorff 分离公理, 所以对每一 $y \in G \setminus \{e\}$ 都可以找到 $\alpha \in \gamma$ 满足 $y \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset G \setminus \{e\}$, 其中 e 是 G 中单位元. 再因为 G 是齐性空间, 所以可得 $\psi(G) \leq nw(G)$. 证毕.

设 X 是 Y 的非空子集以及 γ 是 Y 的子集族, 若对每一 $x \in X$ 以及每一 $y \in Y \setminus X$, 存在 $F \in \gamma$ 使得 $x \in F$ 且 $y \notin F$, 那么称集族 γ **分离集合** X 和集合 $Y \setminus X$.

设 βX 是 Tychonoff 空间 X 的 Čech-Stone 紧化以及 $\mathscr{F}$ 是 βX 中所有的非空闭子集族. 称空间 X 的 *Nagami number* [12], 记为 $Nag(X)$, 为如下基数函数:

$$Nag(X) = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \subset \mathscr{F} \text{ 且 } \mathscr{P} \text{ 分离 } X \text{ 和 } \beta X \setminus X\} + \omega.$$

定理 3.1.24 *每一完全正则的仿拓扑群 G 有 $nw(G)=Nag(G)\times\psi(G)$.*

证明 因为 $Nag(X)\leq nw(X)$ [12, Prosition 5.3.3] 以及显然每一完全正则空间 X 有 $\psi(X)\leq nw(X)$, 所以 $nw(G)=nw(G)\times nw(G)\geq Nag(G)\times\psi(G)$. 剩下只需证明 $nw(G)\leq Nag(G)\times\psi(G)$. 事实上, 因为不等式 $Nag(Y)\leq Nag(X)$ 对完全正则空间 X 的每一闭子空间 Y 都成立 [12, Corollary 5.3.2], 所以根据 [12, Proposition 5.3.9] 可得 $Nag(G^*)\leq Nag(G)\times Nag(G)=Nag(G)$. 再根据命题 3.1.1 很容易得到 $\psi(G^*)\leq\psi(G)\times\psi(G)=\psi(G)$, 从而, 根据 [12, Corollary 5.3.25] 可得 $nw(G^*)=Nag(G^*)\times\psi(G^*)$. 又因为 G 是它的相伴拓扑群 G^* 的连续像, 故 $nw(G)\leq nw(G^*)=Nag(G^*)\times\psi(G^*)\leq Nag(G)\times\psi(G)$. 证毕.

在完全正则空间类中, 如果空间 X 满足 $Nag(X)\leq\omega$, 那么称 X 是 *Lindelöf* Σ 空间 [12]. 事实上, 在正则 Lindelöf 空间类中, Nagami 定义的 Σ 空间 [54] 正是此处的 Lindelöf Σ 空间. 众所周知, 每一正则 Lindelöf 空间满足完全正则分离公理, 所以由定理 3.1.24 可得以下结果.

推论 3.1.25 *每一正则的Lindelöf Σ 仿拓扑群 G 有 $nw(G)=\psi(G)$.*

§3.2 仿拓扑群中的 ω 拟一致连续性

在此节中, 我们把仿拓扑群中的拟一致连续函数概念加以推广, 称之为 ω 拟一致连续函数. 主要研究 ω 拟一致连续函数的一些性质, 这些结果将会在下一章用来研究 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.

设 G 是仿拓扑群, 在此节中用 $\mathscr{N}(G)$ 表示 G 中包含单位元的所有开邻域. 根据文献 [27], 在 G 上存在两个自然的拟一致结构, 即左拟一致结构和右拟一致结构. 对每一 $U\in\mathscr{N}(G)$ 令 $U_L=\{(x,y)\in G\times G: x^{-1}y\in U\}$, $U_R=\{(x,y)\in G\times G: yx^{-1}\in U\}$, 那么以 $\{U_L: U\in\mathscr{N}(G)\}$ 为基的拟一致结构 $\mathcal{U}_L$ 被称作是 G 上的*左拟一致结构 (left quasi-uniformility)*; 以 $\{U_R: U\in\mathscr{N}(G)\}$ 为基的拟一致结构 $\mathcal{U}_R$ 被称作是 G 上的*右拟一致结构 (right quasi-uniformility)*.

设 G 是仿拓扑群, $f: G\to\mathbb{R}$ 是函数, 当把 G 看作左 (右) 拟一致空间时, f 是拟一致连续函数 [28], 则称 f 是*左 (右) 拟一致连续 (left (right) quasi-uniformly continuous function)*, 即等价于说, 对任意的 $\varepsilon>0$, 如果存在 $V\in\mathscr{N}(G)$, 使得

对任意的 $x \in G$ 当 $x^{-1}y \in V$ $(yx^{-1} \in V)$ 时有 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. 如果 f 既是左拟一致连续又是右拟一致连续的, 那么 f 是拟一致连续 *(quasi-uniformly continuous function)*.

下面在仿拓扑群中引入 ω 拟一致连续函数的概念.

定义 3.2.1 *设 G 是仿拓扑群, f 是 G 上的实值函数, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 如果存在可数族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{N}(G)$ 满足如下性质: 对每一 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得当 $x^{-1}y \in U$ $(yx^{-1} \in U)$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 那么 f 是左 (右) ω 拟一致连续函数 (left (right) ω-quasi-uniformly continuous function).*

定义 3.2.2 *设 G 是仿拓扑群, f 是 G 上的实值函数, 如果 f 既是左 ω 拟一致连续的, 又是右 ω 拟一致连续的, 那么 f 是 ω 拟一致连续函数 (ω-quasi-uniformly continuous function).*

注 3.2.3 *(1) 由定义 3.2.1 很容易得到第一可数的仿拓扑群上的每一连续的实值函数都是 ω 拟一致连续的;*

(2) 很显然, 仿拓扑群上的每一左 (右) 拟一致连续函数是左 (右) ω 拟一致连续函数;

(3) 很显然, 在仿拓扑群中, 拟一致连续函数 $\Rightarrow$ ω 拟一致连续函数 $\Rightarrow$ 连续函数. 因为拓扑群就是仿拓扑群, 所以定义 3.2.1, 定义 3.2.2 和定义 2.2.1, 定义 2.2.2 本质分别是一样的, 从而根据注 2.1.3 可知上面的逆均不成立.

以下命题给出了仿拓扑群上的左 ω 拟一致连续和右 ω 拟一致连续函数的刻画. 由定义很容易证之.

命题 3.2.4 *设 f 是仿拓扑群 G 上的实值函数, 那么以下条件等价:*

(1) f 是左 (右) ω 拟一致连续的;

(1) 存在可数族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{N}(G)$ 满足如下条件: 对每一点 $x \in G$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得当 $x^{-1}y \in U$ $(yx^{-1} \in U)$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

命题 3.2.5 *设 G 是 ω-balanced 仿拓扑群, f 是 G 上的实值函数, 那么 f 是左 ω 拟一致连续函数当且仅当它是右 ω 拟一致连续函数.*

证明 *必要性*. 因为 f 是左 ω 拟一致连续的, 所以根据定义 3.2.1, 对每一 $\varepsilon > 0$, 存在可数族 $\gamma \subset \mathscr{N}(G)$ 满足如下条件: 对每一 $x \in G$, 存在 $U \in \gamma$ 使得当 $x^{-1}y \in U$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 又因为 G 是 ω-balanced 仿拓扑群, 所以对每一 $U \in \gamma$ 我们可以找到可数族 $\delta_U \subset \mathscr{N}(G)$ 满足: 对每一 $x \in G$, 存在 $V \in \delta_U$ 使得 $xVx^{-1} \subset U$. 令 $\delta = \bigcup_{U\in\gamma} \delta_U$. 任取 $x \in G$, 根据我们选择的 δ_U, 可以找到 $V \in \delta_U \subset \delta$ 使得 $x^{-1}Vx \subset U$, 故对任意的 $v \in V$ 有 $u \in U$ 使得 $vx = xu$, 从而 $|f(x) - f(vx)| = |f(x) - f(xu)| < \varepsilon$, 这就说明 f 是右 ω 拟一致连续的.

充分性. 同理于必要性的证明. 证毕.

推论 3.2.6 *ω-balanced 仿拓扑群 G 上的每一连续 (有界且连续) 实值函数是左 ω 拟一致连续的当且仅当它上的每一连续 (有界且连续) 实值函数是右 ω 拟一致连续的.*

类似于拓扑群中的 property ω-U 和 property $B\omega$-U [90], 我们在仿拓扑群中引入以下概念. 此概念在下一章中关于 $\mathbb{R}$-facterizble 仿拓扑群的分解定理中扮演重要的角色.

定义 3.2.7 *设 G 是仿拓扑群, 如果 G 上的每一连续 (连续且有界) 实值函数是 ω 拟一致连续的, 那么称仿拓扑群 G 具有 property ω-QU (property $B\omega$-QU).*

注 3.2.8 *(1) 由注 3.2.3 中的 (1) 可知每一第一可数的仿拓扑群都具有 property ω-QU.*

(2) 因为每一 totally precompact 仿拓扑群是 precompact 拓扑群 [11, Theorem 1.8] 以及每一 precompact 拓扑群具有 property ω-U [90, Corollary 4.12], 所以每一 totally precompact 仿拓扑群具有 property ω-QU.

拓扑群 G 具有 property $B\omega$-U 当且仅当它具有 property ω-U [90, Theorem 4.3]. 在仿拓扑群中有类似的结果, 证明留给读者作练习.

定理 3.2.9 *仿拓扑群 G 具有 property $B\omega$-QU 当且仅当它具有 property ω-QU.*

定理 3.2.10 *每一 Lindelöf 仿拓扑群具有 property ω-QU.*

证明 设 G 是 Lindelöf 仿拓扑群以及任取连续函数 $f:G\to\mathbb{R}$. 任取 $\varepsilon>0$, 那么可以找到 G 上两集族 $\mathcal{V}=\{V_i:i\in\omega\}$ 和 $\mathcal{U}=\{U_j:j\in\omega\}$, 以及两子集 $A=\{x_i:i\in\omega\}$ 和 $B=\{y_j:j\in\omega\}$ 使得他们满足如下条件:

(a) 任给 $i,j\in\omega$ 有 V_i 和 U_j 是 G 中包含单位元的开邻域;

(b) 任给 $i,j\in\omega$ 有 $f(x_iV_i^2)\subset(f(x_i)-\frac{\varepsilon}{2},f(x_i)+\frac{\varepsilon}{2})$ 和 $f(U_j^2y_j)\subset(f(y_j)-\frac{\varepsilon}{2},f(y_j)+\frac{\varepsilon}{2})$;

(c) $G=\bigcup_{i\in\omega}x_iV_i=\bigcup_{j\in\omega}U_jy_j$.

事实上, 因为 G 是仿拓扑群, 所以对每一 $x\in G$ 可以找到 G 中包含单位元的开邻域 V_x 使得 $f(xV_x^2)\subset(f(x)-\frac{\varepsilon}{2},f(x)+\frac{\varepsilon}{2})$. 显然, $G=\bigcup_{x\in G}xV_x$. 又因为 G 是 Lindelöf 空间, 所以可以找到可数子集 $A\subset G$ 满足 $G=\bigcup_{x\in A}xV_x$. 令 $\mathcal{V}=\{V_x:x\in A\}$, 很容易验证 A 和 $\mathcal{V}$ 满足上面的 (a)-(c). 同理可以找到满足上面的 (a)-(c) 的 B 和 $\mathcal{U}$.

令 $\mathcal{W}=\mathcal{V}\cup\mathcal{U}$. 我们断言: 对每一 $x\in G$, 存在 $V\in\mathcal{W}$ 使得当 $x^{-1}y\in V$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 由命题 3.2.4 就说明 f 是左 ω 拟一致函数. 事实上, 由上面的 (c) 可以找到 $i\in\omega$, 使得 $x\in x_iV_i$, 故 $f(xV_i)\subset f(x_iV_i^2)\subset(f(x_i)-\frac{\varepsilon}{2},f(x_i)+\frac{\varepsilon}{2})$, 也等价于说, 当 $x^{-1}y\in V_i$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

类似地, 可以证明 f 是右 ω 拟一致函数, 从而 Lindelöf 仿拓扑群 G 具有 property ω-QU. 证毕.

推论 3.2.11 *具有可数网络的仿拓扑群的每一子群都具有 property ω-QU, 特别地, 此结论对具有可数基的仿拓扑群成立.*

因为很容易证明连续开同态保持 totally ω-narrow 性质, 所以根据引理 3.1.3 和推论 3.1.13 可以得到以下结果.

引理 3.2.12 *设 G 是 Hausdorff (正则) totally ω-narrow 仿拓扑群且满足 $Hs(G)\leq\omega$ $(Ir(G)\leq\omega)$, 那么对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 可以找到具有可数基的 Hausdorff (正则) 仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi:G\to H$ 以及 H 中包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi^{-1}(V)\subset U$.*

命题 3.2.13 *设 G 是 Hausdorff (正则) totally ω-narrow 仿拓扑群且满足 $Hs(G)\leq\omega$ $(Ir(G)\leq\omega)$, 以及 $f:G\to\mathbb{R}$ 是左或右 ω 拟一致连续函数, 那么存在具有可数基的 Hausdorff (正则) 仿拓扑群 K, 连续同态 $\pi:G\to K$ 和连续函数 $p:K\to\mathbb{R}$, 使得 $f=p\circ\pi$.*

证明 假设 $f: G \to \mathbb{R}$ 是左 ω 拟一致连续函数, 从而根据命题 3.2.4 可以找到可数族 $\mathcal{U} \subset \mathscr{N}(G)$ 满足如下条件: 任给 $\varepsilon > 0$ 和点 $x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得当 $x^{-1}y \in U$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 由引理 3.2.12, 对每一 $U \in \mathcal{U}$, 可以找到具有可数基的 Hausdorff (正则) 仿拓扑群 H_U, 连续同态 $\pi_U : G \to H_U$ 以及 H_U 中包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi_U^{-1}(V) \subset U$. 定义 $\pi = \Delta_{U\in\mathcal{U}}\pi_U$ 为函数族 $\{\pi_U : U \in \mathcal{U}\}$ 的对角积.

因为 $\prod_{U\in\mathcal{U}} H_U$ 是具有可数基的 Hausdorff (正则) 仿拓扑群, 所以 $\pi(G)$ 作为它的子群是具有可数基的 Hausdorff (正则) 仿拓扑群.

断言. 任给 $g_1, g_2 \in G$, 如果 $\pi(g_1) = \pi(g_2)$, 则有 $f(g_1) = f(g_2)$.

事实上, 假设不成立, 则存在 $g_1, g_2 \in G$ 和 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\pi(g_1) = \pi(g_2) \text{ 和 } f(g_1) \notin (f(g_2) - \varepsilon, f(g_2) + \varepsilon).$$

根据 $\mathcal{U}$ 的选择, 则对 g_2 和 ε 可以找到 $U \in \mathcal{U}$, 使得对任意的 $u \in U$ 有 $|f(g_2) - f(g_2u)| < \varepsilon$, 这等价于说 $f(g_2U) \subset (f(g_2) - \varepsilon, f(g_2) + \varepsilon)$. 又因为在 H_U 中存在包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi_U^{-1}(V) \subset U$, 于是在 H_U 中取包含单位元的开邻域 W, 使得 $W^2 \subset V$. 令 $g = \pi_U(g_1)$, 则由 $\pi(g_1) = \pi(g_2)$ 可得 $g = \pi_U(g_2)$, 从而

$$\begin{aligned} g_1 \in \pi_U^{-1}(gW) &= \pi_U^{-1}(g)\pi_U^{-1}(W) \\ &= g_2\pi_U^{-1}(e)\pi_U^{-1}(W) \subset g_2\pi_U^{-1}(W)\pi_U^{-1}(W) \\ &= g_2\pi_U^{-1}(W^2) \subset g_2\pi^{-1}(V) \subset g_2U, \end{aligned}$$

故

$$f(g_1) \in f(g_2U) \subset (f(g_2) - \varepsilon, f(g_2) + \varepsilon),$$

此矛盾就证明了断言的成立.

根据上面的断言可以找到唯一的函数 $p : \pi(G) \to \mathbb{R}$, 使得 $f = p \circ \pi$. 下面证明 p 是连续的.

任取 $\varepsilon > 0$ 和 $h \in \pi(G)$, 取一点 $g \in G$ 使得 $h = \pi(g)$, 根据 $f = p \circ \pi$ 以及选择的 $\mathcal{U}$, 可以找到 $U \in \mathcal{U}$ 使得

$$f(gU) \subset (f(g) - \varepsilon, f(g) + \varepsilon) = (p(h) - \varepsilon, p(h) + \varepsilon).$$

再由 π_U 的定义可知, 在 H_U 中存在包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi_U^{-1}(V) \subset U$, 于是在 H_U 中取包含单位元的开邻域 W 满足 $W^2 \subset V$, 令

$$O = \pi(G) \cap (W \times \prod_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} H_{U'}).$$

我们断言 $p(hO) \subset (p(h) - \varepsilon, p(h) + \varepsilon)$, 这就说明 p 是连续的.

事实上, 因为 $h_U = \pi_U(g)$, 所以

$$\begin{aligned} p(hO) &\subset f(\pi^{-1}(hO)) \\ &= f(\pi^{-1}(\pi(G) \cap (h_U W \times \prod_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} H_{U'}))) \\ &= f(\pi_U^{-1}(h_U W)) \subset f(g\pi_U^{-1}(V)) \subset f(gU) \\ &\subset (f(g) - \varepsilon, f(g) + \varepsilon) = (p(h) - \varepsilon, p(h) + \varepsilon). \end{aligned}$$

这就对 f 是左 ω 拟一致连续函数时给出了证明.

类似地, 当 f 是右 ω 拟一致连续函数时也很容易得到证明. 证毕.

第四章　仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability

本章中我们研究仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability. 主要给出了 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群的刻画, 讨论了 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability, 肯定地回答了以下两个问题.

问题 4.0.14 *[69, Question 5.4] 设 G 是 Hausdorff 仿拓扑群, 如果它的相伴拓扑群 G^* 是 Lindelöf Σ 空间, 那么仿拓扑群 G 的每一子群是 $\mathbb{R}_2$-factorizable 吗?*

问题 4.0.15 *[91, Question 6.1] 任意多个 Hausdorff, σ 紧的仿拓扑群的积空间的稠子群是 $\mathbb{R}_2$-factorizable 吗?*

在本章中 T_3 和 $T_{3.5}$ 分离公理都不包含 T_1 分离公理, 正则和完全正则分别意味着 T_3+T_1 和 $T_{3.5}$+T_1. 本章主要取材于作者与导师林寿教授以及 M. Tkachenko 教授合作的文章 "Factorization properties of paratopological groups".

§4.1　准备知识

前一章已给出仿拓扑群的相伴拓扑群的定义. 下面列几个与相伴拓扑群有关且简单已知的事实. 证明留作练习.

命题 4.1.1 *设 G 和 K 是仿拓扑群, 则*

(1) *如果 G 满足 T_0 分离公理, 那么它的相伴拓扑群 G^* 满足 Hausdorff 分离公理;*

(2) *如果 H 是 G 的子群, 那么 H^* 拓扑同构于 G^* 中的一个子群;*

(3) *设 $f\colon G\to K$ 是仿拓扑群之间的连续同态, 那么映射 $f^*\colon G^*\to K^*$ 是拓扑群之间的连续同态, 其中 f^* 在集合映射下与 f 定义相同;*

(4) *对任意一族仿拓扑群的积空间 $\Pi=\prod_{i\in I}G_i$, 从 Π^* 到 $\prod_{i\in I}G_i^*$ 上的恒等映射是拓扑群之间的拓扑同构.*

引理 4.1.2 *[1, Lemma 2.2]* 设 G 是仿拓扑群以及用 G' 表示 G 的共轭仿拓扑群, 那么 G 的相伴拓扑群 G^* 拓扑同构于 $G\times G'$ 的子空间 $\Delta=\{(x,x):x\in G\}$; 如果 G 满足 T_1 分离公理, 那么 Δ 是 $G\times G'$ 中的闭子空间.

设 G 是 T_1 仿拓扑群, G 的对称数 (*symmetry number*) [72], 用 $Sm(G)$ 表示, 是满足以下条件的最小基数 κ: 任给 G 中包含单位元 e 的开邻域 U, 存在包含 e 的邻域族 γ 满足 $1\leq|\gamma|\leq\kappa$ 以及 $\bigcap\gamma\subset U^{-1}$. 显然, T_1 仿拓扑群 G 是拓扑群当且仅当 $Sm(G)=1$. 值得一提的是, 对称数也被称作弱 *Hausdorff* 数 (*weak Hausdorff number*) [92].

以下定理说明了对称数的重要性.

定理 4.1.3 *[72, Theorem 2.19]* T_1 仿拓扑群 G 能拓扑同构嵌入到一族第二可数 T_1 仿拓扑群的积空间中当且仅当 G 是 *totally* ω*-narrow* 仿拓扑群以及满足 $Sm(G)\leq\omega$.

然而, 何时能把仿拓扑群拓扑同构嵌入到一族 Hausdorff (正则) 第二可数的仿拓扑群的积空间中? 这情况已在文献 [85] 中考虑了. 他们证明了: 正则仿拓扑群 G 能拓扑同构嵌入到一族正则第二可数仿拓扑群的积空间中当且仅当 G 是 totally ω-narrow 仿拓扑群以及 $Ir(G)\leq\omega$ [85, Theorem 3.8]. 最近, I. Sánchez 证明了每一正则 totally ω-narrow 仿拓扑群满足 $Ir(G)\leq\omega$ [73], 因此上面结果能用以下优美的形式给出.

定理 4.1.4 正则仿拓扑群 G 能拓扑同构嵌入到一族正则第二可数仿拓扑群的积空间中当且仅当 G 是 *totally* ω*-narrow* 仿拓扑群.

最近在 [72, Proposition 2.4] 和 [92, Corollary 2.4] 中独立证明了以下结果.

引理 4.1.5 每一 T_1 仿拓扑群 G 满足 $Sm(G)\leq l(G)$; 特别地, 如果 G 是 *Lindelöf* 空间, 那么 G 的对称数可数.

因为每一 totally ω-narrow 仿拓扑群是 ω-balanced [68, Proposition 3.8], 以及每一第一可数的 totally ω-narrow 仿拓扑群具有可数基 [68, Proposition 3.5], 所以定理 4.1.3 和定理 4.1.4 能够用以下等价形式给出.

引理 4.1.6 设 G 是 *totally* ω*-narrow* 仿拓扑群, 则

(1) 如果 G 是 T_1 空间且满足 $Sm(G) \le \omega$, 那么对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 存在第二可数 T_1 仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi : G \to H$ 以及 H 中包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi^{-1}(V) \subset U$;

(2) 如果 G 是正则空间, 那么对 G 中包含单位元的每一开邻域 U, 存在正则的第二可数仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi : G \to H$ 以及 H 中包含单位元的开邻域 V, 使得 $\pi^{-1}(V) \subset U$.

设 X 是拓扑空间, U 和 F 是 X 中的子集, 如果 $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$, 那么称 U 是正则开集 (*regular open set*) [26]; 类似地, 如果 $F = \overline{\mathrm{Int}(F)}$, 那么称 F 是正则闭集 (*regular closed set*) [26]. 设 τ 是空间 X 上的拓扑, 用 τ' 表示由空间 X 上所有的正则开子集为基的拓扑, 那么空间 (X, τ') 被称作空间 (X, τ) 的半正则化空间 (*semiregularization*), 记为 X_{sr}. 显然, $\tau' \subset \tau$ 以及空间 X 和 X_{sr} 有相同的正则开集和正则闭集.

半正则化算子是由 M. Stone [77] 定义的. M. Katetov [38] 研究了半正则化算子.

下面这个有用的结果是由 O. V. Ravsky 得到的 (也可见 [87, Theorem 2.1]).

定理 4.1.7 *[63] 设 G 是任意的仿拓扑群, 那么空间 G_{sr} 是 T_3 仿拓扑群, 其中 G_{sr} 与 G 有相同的群结构; 如果 G 是 Hausdorff 空间, 那么 G_{sr} 是正则的仿拓扑群.*

§4.2 ℝ-factorizable 仿拓扑群的刻画

作为 ℝ-factorizable 拓扑群类的自然推广, M. Sanchis 和 M. Tkachenko [69] 引入了 ℝ-factorizable 仿拓扑群. 由于仿拓扑群的分离性质较差, 因此他们不得不分别引入 $\mathbb{R}_i$-factorizable 仿拓扑群 ($i = 1, 2, 3, 3.5$) [69]. 设 G 是 T_i 仿拓扑群, 任给 G 上连续实值函数 f, 如果存在第二可数的 T_i 仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi: G \to H$ 以及 H 上的连续实值函数 h, 使得 $f = h \circ \pi$, 那么称 G 是 *$\mathbb{R}_i$-factorizable 仿拓扑群* ($i = 1, 2, 3, 3.5$) [69]. 最近, 利用 property ω-QU, L. H. Xie 和 S. Lin [91] 给出了 $\mathbb{R}_2$- 与 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群的刻画. 在此节中我们将证明: 在仿拓扑群中, 当不考虑上面定义中 G 上的分离公理时, 所有的 $\mathbb{R}_i$-factorizability 都是等价的 ($i = 1, 2, 3, 3.5$), 那么我们统称为 ℝ-factorizable 仿拓扑群. 然后, 在完全正则空间类中给出 ℝ-factorizable 仿拓扑群的刻画.

事实说明, 一个 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群 G 有时可以不要求 G 满足正则性分离公理 (见 [71, Theorem 5], 推论 4.3.9 和推论 4.3.10), 因此我们更愿意对上面的定义做一点改动, 即去掉 G 满足某种分离性的限制.

定义 4.2.1 设 G 是仿拓扑群, 任给 G 上的连续实值函数 f, 如果存在第二可数的 T_0 (T_i+T_1) 仿拓扑群 H, 连续同态 $\pi\colon G\to H$ 以及 H 上的连续实值函数 h, 使得 $f=h\circ\pi$, 那么称 G 是 $\mathbb{R}_0$-*factorizable* ($\mathbb{R}_i$-*factorizable,* $i=1,\ 2,\ 3,\ 3.5$) 仿拓扑群; 如果不要求 H 满足任何分离公理, 则称 G 是 $\mathbb{R}$-*factorizable* 仿拓扑群.

事实上, 定义 4.2.1 在 [71, Section 3] 中已使用过.

注 4.2.2 由定义 *4.2.1* 很容易得到以下事实:

(1) 当 $0\le j<i\le 3.5$ 时, $\mathbb{R}_i$-*factorizability* 蕴涵 $\mathbb{R}_j$-*factorizability;* 也有 $\mathbb{R}_0$-*factorizability* 蕴涵 $\mathbb{R}$-*factorizability;*

(2) 显然, 每一具有可数基的正则空间是完全正则的, 因此一个仿拓扑群是 $\mathbb{R}_3$-*factorizable* 当且仅当它是 $\mathbb{R}_{3.5}$-*factorizable.* 这就是为什么只研究 $\mathbb{R}_3$-*factorizability* 而不研究 $\mathbb{R}_{3.5}$-*factorizability* 的原因;

(3) 在命题 *4.2.7* 中看到 $\mathbb{R}_2$-*factorizability* 蕴涵 $\mathbb{R}_3$-*factorizability,* 因此在定义 *4.2.1* 中所有的 $\mathbb{R}_2$-, $\mathbb{R}_3$- 与 $\mathbb{R}_{3.5}$-*factorizable* 仿拓扑群都是同一类;

(4) 根据命题 *4.2.4,* 在定义 *4.2.1* 中所有的 $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$- 与 $\mathbb{R}_2$-*factorizable* 仿拓扑群类都是同一类, 因此在定义 *4.2.1* 中事实上只引入了一类仿拓扑群. 以后把这类仿拓扑群称为 $\mathbb{R}$-*factorizable* 仿拓扑群.

为了证明在定义 4.2.1 中所有的 $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$- 与 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群类都是同一类, 我们需要借助以下事实.

定理 4.2.3 *[88]* 设 G 是任意的仿拓扑 (半拓扑) 群, 那么存在连续的开同态 $\pi\colon G\to T_2(G)$, 其中 $T_2(G)$ 是 *Hausdorff* 仿拓扑 (半拓扑) 群, 使得对每一连续函数 $f\colon G\to X$, 其中 X 是 *Hausdorff* 拓扑空间, 都能找到连续函数 $h\colon T_2(G)\to X$ 满足 $f=h\circ\pi$.

命题 4.2.4 *每一 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群, 因此 $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$- 与 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群是同一类空间.*

证明 设 f 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 G 上的连续实值函数, 那么存在从 G 到第二可数的仿拓扑群 H 上的连续同态 p 和 H 上的连续实值函数 g 满足 $f = g \circ p$. 根据定理 4.2.3, 可以找到连续的开同态 $\pi\colon H \to T_2(H)$, 其中 $T_2(H)$ 是 Hausdorff 仿拓扑群, 和 $T_2(H)$ 上的连续实值函数 h 满足 $g = h \circ \pi$. 因为同态 π 是开的, 所以仿拓扑群 $T_2(H)$ 也是第二可数的, 于是 $\varphi = \pi \circ p$ 是从 G 到第二可数且满足 Hausdorff 分离公理的仿拓扑群 $T_2(H)$ 上的连续同态使得 $f = h \circ \varphi$, 从而 G 是 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群. 证毕.

下面只需证明在仿拓扑群中 $\mathbb{R}_2$-factorizability 蕴涵 $\mathbb{R}_3$-factorizability. 这还需要以下两个简单的引理.

引理 4.2.5 *设 $f\colon X \to Y$ 是从空间 X 到正则空间 Y 的连续函数, 那么当 f 看作从 X 的半正则化空间 X_{sr} 到 Y 上的映射时仍然是连续函数.*

证明 任取一点 $x \in X$ 以及 Y 中包含 $f(x)$ 的邻域 U, 设 V 是 $f(x)$ 的开邻域且满足 $\overline{V} \subset U$. 因为 f 在空间 X 上连续, 所以存在空间 X 中包含 x 的开邻域 O 使得 $f(O) \subset V$, 因此 $f(\overline{O}) \subset \overline{V} \subset U$, 从而 $f(\operatorname{Int}\overline{O}) \subset f(\overline{O}) \subset U$. 又因为 $\operatorname{Int}\overline{O}$ 是空间 X_{sr} 中包含 x 的开邻域, 所以 f 是 X_{sr} 上的连续函数. 证毕.

引理 4.2.6 *如果 X 是第二可数空间, 那么空间 X_{sr} 也是第二可数空间.*

证明 设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 的可数基, 很容易验证可数族 $\mathcal{C} = \{\operatorname{Int}\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ 是空间 X_{sr} 的一个基. 证毕.

命题 4.2.7 *每一 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群 G 是 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 设 f 是 G 上的连续实值函数, 因为 G 是 $\mathbb{R}_2$-factorizable 仿拓扑群, 所以能够找到具有可数基的 Hausdorff 仿拓扑群 K, 连续同态 $p\colon G \to K$ 以及 K 上的连续实值函数 g, 使得 $f = g \circ p$.

用 K_{sr} 表示空间 K 的半正则化空间, 因为 K 是 Hausdorff 仿拓扑群, 所以由定理 4.1.7 说明空间 K_{sr} 是正则仿拓扑群. 再根据引理 4.2.6 可得 K_{sr} 具有可

数基. 用 g_{sr} 表示把函数 g 看成从 K_{sr} 到实数空间上的映射, 那么根据引理 4.2.5 可得 g_{sr} 是空间 K_{sr} 上的连续函数. 再用 i_K 表示从 K 到 K_{sr} 上的恒等映射, 则有 $f = g_{sr} \circ i_K \circ p$, 故可得 G 是 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群. 证毕.

结合命题 4.2.4 和命题 4.2.7 可以得到以下结果.

定理 4.2.8 *每一 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群, 因此 $\mathbb{R}$-, $\mathbb{R}_0$-, $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$- 与 $\mathbb{R}_3$-factorizable 仿拓扑群是同一类空间.*

根据定理 4.1.7, 定理 4.2.3 和引理 4.2.5 也可以得到以下很有用的一个事实.

命题 4.2.9 *设 $f\colon G \to Y$ 是从仿拓扑群 G 到正则空间 Y 上的连续映射. 那么存在连续同态 $p\colon G \to H$ 和连续映射 $h\colon H \to Y$ 使得 $f = h \circ p$, 其中 H 是正则仿拓扑群.*

定理 4.2.8 让我们能够避免使用术语 “$\mathbb{R}_i$-factorizability” ($i = 0$, 1, 2, 3, 3.5), 而用简洁的术语 (但是等价的) “$\mathbb{R}$-factorizability”. 定理 4.2.8 进一步说明在 [69, 71, 91] 中关于 $\mathbb{R}_i$-factorizable 仿拓扑群的所有结果都能用术语 “$\mathbb{R}$-factorizability” 重新给出等价的叙述.

下面这一结果就是这种等价叙述的体现. 这只需结合 [69, Proposition 3.5] 和定理 4.2.8 就可以得到, 但是不得不提到的是在 [69, Proposition 3.5] 中 G 上的 “Tychonoff” 条件被忽略掉是一个错误.

命题 4.2.10 *每一 Tychonoff, $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 totally ω-narrow 仿拓扑群.*

在第三章中我们已经定义了仿拓扑群上的 ω 拟一致连续实值函数的概念. 以下结果推广命题 4.2.9 到 ω 拟一致连续函数上.

引理 4.2.11 *设 f 是仿拓扑群 G 上的左 (右) ω 拟一致连续实值函数, 那么存在正则仿拓扑群 K, 连续同态 $p\colon G \to K$ 和 K 上左 (右) ω 拟一致连续实值函数 h, 使得 $f = h \circ p$.*

证明 假设 f 是左 ω 拟一致连续实值函数. 我们分两步来证明. 首先, 应用定理 4.2.3, 可以找到 Hausdorff 仿拓扑群 H, 连续开同态 $\pi\colon G \to H$ 和 H 上的连续实值函数 g, 使得 $f = g \circ \pi$. 因为同态 π 是开的, 所以很容易得到函数 g 是左 ω 拟一致连续实值函数.

设 H_{sr} 是 H 的半正则化空间, 那么根据定理 4.1.7 可得 H_{sr} 是正则仿拓扑群. 当把 g 看作空间 H_{sr} 上的函数时, 由引理 4.2.5 可得 g 仍然是连续函数. 用 i 表示从 H 到 H_{sr} 上的恒等映射, 那么 $p = i \circ \pi$ 是从 G 到 $K = H_{sr}$ 上的连续同态以及 $f = h \circ p$, 其中 $h\colon H_{sr} \to \mathbb{R}$ 是与函数 g 相等的映射. 下面只需验证 h 是 K 上的左 ω 拟一致连续实值函数.

设 $\mathcal{U}$ 是 H 中包含单位元的可数开邻域族且 $\mathcal{U}$ 见证了函数 g 是左 ω 拟一致连续实值函数. 用 $\mathcal{V}$ 表示族 $\{\operatorname{Int}\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$. 任给 $x \in H$ 和 $\varepsilon > 0$, 那么存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得对每一 $y \in xU$ 有 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. 因为 g 是连续的, 所以可以得到对每一 $z \in \overline{U}$ 有 $|g(x) - g(xz)| \le \varepsilon$, 从而对每一 $z \in \operatorname{Int}\overline{U}$ 有 $|h(x) - h(xz)| \le \varepsilon$. 因为 $\operatorname{Int}\overline{U} \in \mathcal{V}$, 所以可以得到 h 是 $H_{sr} = K$ 上的左 ω 拟一致连续实值函数.

对于 f 是右 ω 拟一致连续实值函数的情况可以同理得到. 证毕.

以下事实加强了命题 3.2.13.

引理 4.2.12 *设 G 是 totally ω-narrow 仿拓扑群以及 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 是函数, 如果 f 是左 (右) ω 拟一致连续函数, 那么存在可数基的正则仿拓扑群 L, 连续同态 $\pi\colon G \to L$ 和连续函数 $h\colon L \to \mathbb{R}$, 使得 $f = h \circ \pi$.*

证明 假设 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 是左 (右) ω 拟一致连续实值函数. 根据引理 4.2.11, 不失一般性我们不仿假设 G 满足正则分离公理. 事实上, 取连续同态 $p\colon G \to K$ 和 K 上的左 (右) ω 拟一致连续实值函数 g 使得$f = g \circ p$, 其中 K 是正则仿拓扑群. 根据命题 4.1.1 中的 (3), 可得 K 是 totally ω-narrow 仿拓扑群, 因此, 如果必要的话, 我们可以用 K 来代替 G, 用 g 来代替 f. 又因为每一正则 totally ω-narrow 仿拓扑群满足 $Ir(G) \le \omega$ [73], 所以直接由命题 3.2.13 可得. 证毕.

仿拓扑群的 *property ω-QU* 已在第三章中给出定义. 以下定理直接由引理 4.2.12 可得.

定理 4.2.13 *每一 totally ω-narrow 且具有 property ω-QU 的仿拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

推论 4.2.14 *每一 totally ω-narrow 且 Lindelöf 仿拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 根据定理 3.2.10 可知每一 Lindelöf 仿拓扑群具有 property ω-QU, 因此直接由定理 4.2.13 可得. 证毕.

推论 4.2.15 *每一具有可数网络的仿拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

引理 4.2.16 *每一 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群具有 property ω-QU.*

证明 设 f 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 G 上的连续实值函数, 那么可以找到第二可数的仿拓扑群 K, 连续同态 $\pi\colon G \to K$ 和 K 上的连续实值函数 h, 使得 $f = h \circ \pi$. 设 $\mathscr{B}$ 是 K 中单位元处的局部可数基. 令 $\mathscr{U} = \{\pi^{-1}(U) : U \in \mathscr{B}\}$, 很容易验证 $\mathscr{U}$ 是 G 中包含单位元的可数开邻域族且具有以下性质: 任给点 $x \in G$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得对任意的 $u \in U$ 有 $|f(x) - f(xu)| < \varepsilon$ 以及 $|f(x) - f(ux)| < \varepsilon$, 因此由命题 3.2.4 可得 f 是 ω 拟一致连续函数, 故 G 具有 property ω-QU. 证毕.

事实上, 应用引理 4.2.16 可以把定理 4.2.13 重新叙述如下.

定理 4.2.17 *totally ω-narrow 仿拓扑群 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群当且仅当它具有 property ω-QU.*

是否每一 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群的商群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群仍然是一公开问题 (见 [69, Problem 5.2]). 在完全正则仿拓扑群和 totally ω-narrow 仿拓扑群中我们对这一问题给出肯定地回答, 但我们还需要一个简单的引理.

引理 4.2.18 *设 G 是具有 property ω-QU (property $B\omega$-QU) 的仿拓扑群, 如果 N 是 G 的正规子群, 那么 G 的商群 G/N 具有 property ω-QU (property $B\omega$-QU).*

证明 设 $p : G \to G/N$ 是商同态, 那么 p 是连续开同态 [12, Theorem 1.5.1]. 任取 G/N 上的连续 (有界连续) 的实值函数 f, 那么显然 $f \circ p$ 是 G 上的连续 (有界连续) 的实值函数. 因为 G 具有 property ω-QU (property $B\omega$-QU), 所以 $f \circ p$ 是 ω 拟一致连续函数. 根据命题 3.2.4, 存在可数族 $\mathcal{U}_{f\circ p} \subset \mathscr{N}(G)$ 满

足如下: 对每一 $x \in G$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_{x,\varepsilon} \in \mathcal{U}_{f\circ p}$ 使得当 $x^{-1}y \in U_{x,\varepsilon}$ 时有 $|f\circ p(x) - f\circ p(y)| < \varepsilon$. 令 $\mathscr{U}_f = \{p(U) : U \in \mathscr{U}_{f\circ p}\}$, 因为 p 是连续开同态, 所以很容易验证 $\mathscr{U}_f$ 满足命题 3.2.4 中的条件 (2), 这就说明 f 是左 ω 拟一致连续函数. 类似地, 可以证明 f 是右 ω 拟一致连续函数, 从而 G/N 具有 property ω-QU (property $B\omega$-QU). 证毕.

命题 4.2.19 *设 G 是 totally ω-narrow 仿拓扑群, 如果 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群, 那么 G 的商群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 引理 4.2.16 说明 G 具有 property ω-QU. 根据引理 4.2.18, 可得 property ω-QU 能被任意商同态所保持. 命题 4.1.1 中的 (3) 说明 total ω-narrowness 也能被连续的满同态所保持, 因此结论直接由定理 4.2.13 可得. 证毕.

命题 4.2.20 *每一完全正则的 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 G 的商群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 由命题 4.2.10 可得 G 是 totally ω-narrow 仿拓扑群, 因此直接由命题 4.2.19 可得. 证毕.

利用 property ω-QU 我们可以刻画完全正则的 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群如下.

定理 4.2.21 *完全正则的仿拓扑群 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群当且仅当它是 totally ω-narrow 仿拓扑群以及具有 property ω-QU.*

证明 充分性直接由定理 4.2.13 可得. 相反地, 假设 G 是完全正则的$\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群, 那么根据命题 4.2.10 可得 G 是 totally ω-narrow 仿拓扑群. 而引理 4.2.16 说明 G 具有 property ω-QU. 证毕.

注 4.2.22 *设 $\mathbb{S}$ 是 Sorgenfrey 直线以及 $\mathbb{Z}$ 是整数群, 显然, $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{S}$ 的闭子群, 那么商仿拓扑群 $\mathbb{T}_{Sor} = \mathbb{S}/\mathbb{Z}$ 是代数同构于阿贝尔单位环群, 它的单位元 $\bar{0}$ 处的局部基是由半开区间族 $\{[0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ 产生的. 仿拓扑群 $\mathbb{T}_{Sor}$ 是正则的, 遗传 Lindelöf, 遗传可分的, 但是它不是 totally ω-narrow 仿拓扑群, 因此由定理 4.2.21 可得 $\mathbb{T}_{Sor}$ 不是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群 (也可见 [69, Example 3.3]). 显然, Sorgenfrey 直线 $\mathbb{S}$ 具有相同的性质, 但是 $\mathbb{T}_{Sor}$ 另外是 precompact 仿拓扑群, 然而我们注意到每一 precompact 拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群 [12, Corollary 8.1.17].*

§4.3 Totally Lindelöf Σ 仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability

在此节中我们考虑满足 T_1 分离公理的 σ 紧以及 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizability.

以下引理在这节中起着很重要的作用. 它把 [68, Corollary 3.13] 推广到 T_1 仿拓扑群上.

引理 4.3.1 *设 G 是 Lindelöf 且 totally ω-narrow, T_1 仿拓扑群且 e 是它的单位元, 那么对 G 中包含 e 的每一 G_δ 集 P, 存在 G 中闭的不变子群 N, 使得 $N \subset P$ 以及商仿拓扑群 G/N 具有可数伪特征.*

证明 设 $P = \bigcap_{i\in\omega} U_i$, 其中 U_i 是 G 中包含 e 的开邻域. 因为 G 是 Lindelöf 空间, 所以由引理 4.1.5 可得 $Sm(G) \leq \omega$. 再由引理 4.1.6 中的 (1) 可得对每一 $i \in \omega$, 存在连续同态 $\pi_i \colon G \to H_i$ 到第二可数的 T_1 仿拓扑群 H_i 以及 H_i 中包含单位元的某一开邻域 V_i, 使得 $\pi_i^{-1}(V_i) \subset U_i$.

设 $\pi = \Delta_{i\in\omega}\pi_i$ 是函数族 $\{\pi_i : i \in \omega\}$ 的对角积. 令 $N = \pi^{-1}(e')$, 其中 e' 是 $H = \prod_{i\in\omega} H_i$ 中的单位元. 显然, N 在 G 中是闭的以及有

$$N = \bigcap_{i\in\omega} \pi_i^{-1}(e_i) \subset \bigcap_{i\in\omega} \pi_i^{-1}(V_i) \subset \bigcap_{i\in\omega} U_i = P,$$

其中对每一 $i \in \omega$ 有 e_i 是 H_i 中的单位元. 很容易得到商仿拓扑群 G/N 满足 T_1 分离公理以及具有可数伪特征, 因为标准的恒等映射 $id \colon G/N \to \pi(G)$ 是连续的以及仿拓扑群 H 与 $\pi(G) \subset H$ 都是具有可数基的 T_1 空间. 证毕.

接下来我们主要研究 Lindelöf Σ 仿拓扑群 G, 或者 G 的相伴拓扑群 G^* 是 Lindelöf Σ 空间. 通常 Lindelöf Σ 空间都要假设满足 Tychonoff 分离公理 (见 [12, Section 5.3]), 然而, 我们可以使用由 Nagami [54] 给出的 Σ 空间的原始定义, 那里的空间只假设满足 Hausdorff 分离公理.

关于 Σ 空间的定义有一等价的描述如下: 设 X 是 Hausdorff 空间, 如果在 X 中有两个闭集族组成的覆盖 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{F}$ 满足如下: $\mathcal{C}$ 是 σ 局部有限的, $\mathcal{F}$ 中的元都是 X 中的可数紧子集, 以及对每一 $F \in \mathcal{F}$ 和 X 中包含 F 的开邻域 U, 可以找到 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $F \subset C \subset U$, 那么 X 是 Σ 空间 [54].

毫无疑问, 在正则 Lindelöf 空间类中, Nagami 所定义的 Σ 空间正是文献 [12] 中所考虑的 Lindelöf Σ 空间, 因此我们在此研究的 Lindelöf Σ 空间也只要求满足 Hausdorff 分离公理即可.

很显然, 对于 Lindelöf Σ 空间 X, 上面对应的 X 的覆盖 $\mathcal{C}$ 必是可数族以及覆盖 $\mathcal{F}$ 中的元必定是紧子集. 类似于 [54, Theorem 3.13], 很容易得到 Lindelöf Σ 空间保持可数可乘性, 即任意可数多个 Lindelöf Σ 空间的积空间仍然是 Lindelöf Σ 空间.

设 X 是拓扑空间, 如果 X 中任意由 G_δ 集组成的集族 γ 都包含可数子族 $\lambda\subset\gamma$, 使得 $\bigcup\lambda$ 在 $\bigcup\gamma$ 中是稠密的, 那么空间 X 被称作是 *ω-cellular* [12].

我们首先把 [68, Lemma 4.1] 推广到 T_1, totally Lindelöf Σ 仿拓扑群上.

引理 4.3.2 *设 G 是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群且 G 满足 T_1 分离公理, 那么*

(1) G 是 ω-cellular 空间;

(2) 如果 γ 是 G 中可数多个闭的 G_δ 集, 那么在 G 中存在闭的不变子群 N, 使得商仿拓扑群 G/N 具有可数网络以及对每一 $F\in\gamma$ 有 $F=\pi^{-1}(\pi(F))$, 其中 $\pi\colon G\to G/N$ 是自然的商同态.

证明 因为 G 是 T_1, totally Lindelöf Σ 仿拓扑群, 由 [12, Theorem 5.3.18] 可得 G 的相伴拓扑群 G^* 是 Tychonoff, ω-cellular 空间, 因此 G 作为 ω-cellular 空间 G^* 的连续像仍然是 ω-cellular 空间.

下面证明 (2). 设 $\mathcal{N}$ 是由 G 中所有闭的不变子群且满足对任意 $N\in\mathcal{N}$ 都有其商仿拓扑群 G/N 具有可数伪特征组成的集族. 很容易验证 $\mathcal{N}$ 满足可数交封闭, 因此在 (2) 中只需证明当 γ 只包含一个元 F 的情况就可以了.

对每一 $x\in F$, 那么 $x^{-1}F$ 是 G 中包含单位元的 G_δ 集. 由引理 4.3.1 可得存在 $N_x\in\mathcal{N}$ 使得 $N_x\subset x^{-1}F$. 显然, 集族 $\{xN_x : x\in F\}$ 覆盖 F. 又因为 G 是 ω-cellular 空间, 所以可以找到可数子集 $C\subset F$ 使得 $B=\bigcup_{x\in C}xN_x$ 在 F 中稠密. 令 $N=\bigcap_{x\in C}N_x\in\mathcal{N}$, 我们断言 $F=\pi^{-1}(\pi(F))$, 其中 $\pi\colon G\to G/N$ 是商同态.

事实上, 任取 $x\in C$, 因为 N_x 是 G 的子群以及 $N\subset N_x$, 所以有 $N_x=\pi^{-1}(\pi(N_x))$, 故 $xN_x=\pi^{-1}(\pi(xN_x))$, 从而 $B=\pi^{-1}(\pi(B))$. 因为 π 是连续开映射以及 B 在闭集 F 中稠密, 所以很容易得 $F=\pi^{-1}(\pi(F))$.

最后证明商仿拓扑群 G/N 具有可数网络. 为了证明此结论, 考虑商拓扑群 G^*/N^*, 其中 G^* 和 N^* 分别是仿拓扑群 G 和 N 的相伴拓扑群. 显然, 恒等映射 $\varphi\colon G^*/N^*\to G/N$ 是连续的. 由 N 的选择可得 G/N 的伪特征是可数的, 故

G^*/N^* 的伪特征也是可数的. 因为 G^* 和 G^*/N^* 都是 Lindelöf Σ 空间, 所以由 [12, Corollary 5.3.25] 可得 G^*/N^* 具有可数网络, 因此 G/N 作为 G^*/N^* 的连续像也具有可数网络. 证毕.

以下引理是显然的, 留给读者作练习.

引理 4.3.3 *每一具有可数网络的 T_3 空间具有可数闭网络.*

根据 [68, Theorem 4.2] 可得对每一正则 Lindelöf Σ 仿拓扑群 G, G 中的任意一族 G_δ 集的并的闭包仍然是 G 中的 G_δ 集. 此结论对 Hausdorff, σ 紧的仿拓扑群也成立 [68, Theorem 4.4]. 我们接下来的结论较弱, 但是条件是对所有的 T_1, totally Lindelöf Σ 仿拓扑群成立.

命题 4.3.4 *设 G 是 T_1, totally Lindelöf Σ 仿拓扑群, 那么 G 中的每一开子集的闭包是 G 中的 G_δ 集.*

证明 设 $\mathcal{N}$ 是由 G 中所有闭的不变子群且满足对任意 $N \in \mathcal{N}$ 都有其商仿拓扑群 G/N 具有可数伪特征所组成的集族. 因为 G 是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群, 所以 G 是 Lindelöf 和 totally ω-narrow 仿拓扑群. 任取 G 中的非空开集 U, 对任意的 $x \in U$, 那么 $x^{-1}U$ 是 G 中包含单位元的开集. 利用引理 4.3.1 可以找到 $N_x \in \mathcal{N}$ 使得 $N_x \subset x^{-1}U$. 显然, 集族 $\{xN_x : x \in U\}$ 覆盖 U. 根据引理 4.3.2 中的 (1) 可以找到可数子集 $C \subset U$ 使得 $B = \bigcup_{x\in C} xN_x$ 在 U 中稠密. 因为对每一 $x \in U$ 有 xN_x 是 G 中闭的 G_δ 集, 所以由引理 4.3.2 中的 (2) 可得: 存在 G 中闭的不变子群 N, 使得 G 的商仿拓扑群 G/N 具有可数网络以及对每一 $x \in C$ 有 $xN_x = \pi^{-1}(\pi(xN_x))$, 其中 $\pi\colon G \to G/N$ 是商同态, 因此 $B = \pi^{-1}(\pi(B))$ 以及 $\pi(B)$ 在 $\pi(U)$ 中稠密. 因为 π 是连续开映射, 所以

$$\overline{U} = \overline{B} = \overline{\pi^{-1}(\pi(B))} = \pi^{-1}(\overline{\pi(B)}) = \pi^{-1}(\overline{\pi(U)}).$$

显然, $\overline{\pi(U)}$ 是 G/N 中的正则闭集. 因此 $\overline{\pi(U)}$ 是 $(G/N)_{sr}$ 中的闭集, 其中 $(G/N)_{sr}$ 是仿拓扑群 G/N 的半正则化空间. 根据定理 4.1.7 可得 $(G/N)_{sr}$ 满足 T_3 分离公理, 因此引理 4.3.3 说明 $(G/N)_{sr}$ 作为空间 G/N 的连续像具有可数闭网络, 从而 $\overline{\pi(U)}$ 是 $(G/N)_{sr}$ 中的 G_δ 集, 尤其也是 G/N 中的 G_δ 集, 因此 $\overline{U} = \pi^{-1}(\overline{\pi(U)})$ 是 G 中的 G_δ 集. 证毕.

设 X 是拓扑空间,如果 X 中的每一开集的闭包是 X 中的零集[1], 那么称 X 是完全 κ 正规空间 (*perfectly κ-normal space*) [74]. 已知每一正则 Lindelöf Σ 仿拓扑群是完全 κ 正规空间 [69, Proposition 2.6]. 下面我们证明此结论中的 "正则" 能够弱化到 "Hausdorff", 但首先需要一个简单的引理.

引理 4.3.5 *设 $f\colon X \to Y$ 是连续函数, 其中 X 是 Hausdorff 空间而 Y 是正则空间, 如果 X 是 Lindelöf Σ 空间, 那么 Y 也是 Lindelöf Σ 空间.*

证明 设 X 中两集族 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{F}_X$ 见证了 X 是 Lindelöf Σ 空间, 那么集族 $\mathcal{C}_X$ 是可数的以及集族 $\mathcal{F}_X$ 中的每一元都是 X 中的紧子集. 我们断言下面两集族

$$\mathcal{C}_Y = \{\overline{f(C)} : C \in \mathcal{C}_X\} \text{ 和 } \mathcal{F}_Y = \{f(F) : F \in \mathcal{F}_X\}$$

见证了 Y 是 Lindelöf Σ 空间. 事实上, 任取 $F \in \mathcal{F}_X$ 和 Y 中包含 $f(F)$ 的开邻域 U, 因为 $f(F)$ 是紧的以及 Y 满足正则性分离公理, 所以在 Y 中存在包含 $f(F)$ 的邻域 V 使得 $\overline{V} \subset U$. 取 $\mathcal{C}$ 中一元 C 使得 $F \subset C \subset f^{-1}(V)$, 那么 $\overline{f(C)} \in \mathcal{C}_Y$ 以及 $f(F) \subset f(C) \subset \overline{f(C)} \subset \overline{V} \subset U$. 因为集族 $\mathcal{C}_Y$ 是可数的, 所以这就证明了上面的断言, 也证明了此引理. 证毕.

命题 4.3.6 *每一 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群 G 是完全 κ 正规空间.*

证明 设 G_{sr} 是空间 G 的半正则化空间以及 $i\colon G \to G_{sr}$ 是恒等映射, 那么根据定理 4.1.7 可得 G_{sr} 是正则仿拓扑群. 从半正则化的定义可得, 对 G 中的每一开集 O 有 $i(\overline{O}) = \overline{i(O)}$, 换句话说, 就是 G 和 G_{sr} 中的正则闭集是一样的. 引理 4.3.5 说明 G_{sr} 是正则 Lindelöf Σ 空间, 因此由 [69, Proposition 2.6] 可得 G_{sr} 是完全 κ 正规空间. 取 G_{sr} 上的连续实值函数 g 使得 $\overline{i(O)} = g^{-1}(0)$, 那么 G 上的连续实值函数 $f = g \circ i$ 满足 $\overline{O} = f^{-1}(0)$, 从而 G 是完全 κ 正规空间. 证毕.

当考虑 Hausdorff 空间类的仿拓扑群时, 注意到以上结果是对命题 4.3.4 的一个补充.

要证明定理 4.3.8 我们还要借助以下事实.

[1]空间 X 的子集 F 被称作零集 (*zero-set*) [26], 如果存在 X 上的连续实值函数 f 使得 $F = f^{-1}(0)$.

引理 4.3.7 *[69, Lemma 3.15]* 设 D 是拓扑空间 X 的稠密子集, 还假设 $f\colon D \to Y$ 和 $\varphi\colon X \to Z$ 都是连续映射, 其中 φ 还是开映射以及空间 Y 是正则的. 如果 $\mathcal{B}$ 是空间 Y 的一个基使得对每一 $V \in \mathcal{B}$ 有 $\overline{f^{-1}(V)} = \varphi^{-1}(\varphi(\overline{f^{-1}(V)}))$ (此处闭包运算是在 X 中取), 那么存在连续函数 $g\colon \varphi(D) \to Y$ 使得 $f = g \circ \varphi\restriction_D$.

以下定理是本节中的主要定理之一. 此定理肯定地回答了问题 4.0.14, 甚至更具有一般性.

定理 4.3.8 T_1, *totally Lindelöf* Σ *仿拓扑群* G *中每一子群* H *是* $\mathbb{R}$-*factorizable 仿拓扑群.*

证明 根据假设, 可得仿拓扑群 G 的相伴拓扑群 G^* 是 Lindelöf Σ 空间. 子群 H 在空间 G^* 中取闭包, 记为 F, 那么 F 也是 Lindelöf Σ 拓扑群. 当 F 看成 G 的子空间时, 那么 F 是仿拓扑群, 我们用 K 表示. 根据命题 4.1.1 中的 (2) 可得 F 与仿拓扑群 K 的相伴拓扑群 K^* 是拓扑同构的, 因此 K 是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群. 显然, H 在 K 中稠密, 从而不失一般性我们假设 H 在 G 中稠密.

设 f 是 H 上的连续实值函数. 用 $\mathcal{B}$ 表示实直线的一个可数开基. 因为 f 是连续的, 所以对每一 $V \in \mathcal{B}$, 存在 G 中的开集 U_V, 使得 $f^{-1}(V) = U_V \cap H$. 根据命题 4.3.4 可得 $\overline{U_V}$ 是 G 中的 G_δ 集, 从而应用引理 4.3.2 中的 (2) 可以找到 G 中闭的不变子群 N, 使得 G 的商仿拓扑群 G/N 具有可数网络以及商同态 $\pi\colon G \to G/N$ 对每一 $V \in \mathcal{B}$ 满足 $\overline{U_V} = \pi^{-1}(\pi(\overline{U_V}))$. 因为 H 在 G 中稠密, 所以可以得到对每一 $V \in \mathcal{B}$ 有 $\overline{U_V} = \overline{f^{-1}(V)}$, 从而根据引理 4.3.7 (令 $D = H$, $X = G$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = G/N$ 和 $\varphi = \pi$) 存在 $\pi(H)$ 上的连续实值函数 g 满足 $f = g \circ \pi\restriction_H$.

显然, G/N 的子群 $\pi(H)$ 具有可数网络. 又根据由推论 4.2.15 可得 $\pi(H)$ 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群, 从而可以找到连续同态 $p\colon \pi(H) \to L$ 到第二可数仿拓扑群 L 和 L 上的连续实值函数 h, 使得 $g = h \circ p$, 那么 $\varphi = p \circ \pi\restriction_H$ 是从 H 到 L 上的连续同态以及 $f = h \circ \varphi$. 这就证明了 H 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 证毕.

设 G 是 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群, 根据 [69, Corollary 2.3 (b)] 可得仿拓扑群 G 的相伴拓扑群 G^* 是 Lindelöf Σ 拓扑群, 即每一 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群. 以下推论把 [69, Theorem 3.13] 推广到 Hausdorff 仿拓扑群上.

推论 4.3.9 *假设 G 是 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群, 那么 G 的每一子群都是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

以下结果把 [69, Proposition 3.16] 中的 “正则” 条件弱化到 “T_1”.

推论 4.3.10 *σ 紧的 T_1 仿拓扑群的每一子群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 根据定理 4.3.8, 只需证明每一 σ 紧的 T_1 仿拓扑群 G 是 totally σ 紧仿拓扑群. 由此可得 G 是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群. 对于 Hausdorff 仿拓扑群, 这一事实已在 [69, Corollary 2.3 (a)] 中证明. 我们采用类似的方法把 [69, Corollary 2.3 (a)] 中的条件 “Hausdorff” 弱化到 “T_1”.

用 G' 表示 G 的共轭仿拓扑群, 那么 G 中的求逆运算是从 G 到 G' 上的同胚, 因此 G' 和积空间 $G \times G'$ 都是 σ 紧 T_1 仿拓扑群. 根据引理 4.1.2 可得 G 的相伴拓扑群 G^* 拓扑同构 $\Delta = \{(x,x) \in G \times G' : x \in G\}$. 很容易验证 Δ 是 $G \times G'$ 的闭子空间. 这就说明 $G^* \cong \Delta$ 是 σ 紧的 Hausdorff 拓扑群, 因此 G 是 totally σ 紧仿拓扑群. 证毕.

尝试把推论 4.3.10 推广到 T_0 仿拓扑群中, 那么自然地有以下问题.

问题 4.3.11 *σ 紧的 T_0 仿拓扑群的每一子群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群吗? 对于稠密子群又如何?*

对于问题 4.3.11 的特殊情况我们给出肯定的回答, 即当子群取整个群时, 这时甚至我们不要求群具有任何分离性质.

推论 4.3.12 *每一 σ 紧的仿拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群.*

证明 设 G 是 σ 紧的仿拓扑群以及 f 是 G 上的连续实值函数, 根据定理 4.2.3 可以找到从 G 到 Hausdorff 仿拓扑群 H 上的连续同态 π 和 H 上的连续实值函数 g, 使得 $f = g \circ \pi$. 显然, H 是 σ 紧的仿拓扑群, 那么根据推论 4.3.10 可得 H 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 因此, 存在第二数的仿拓扑群 K, 连续同态 $p\colon H \to K$ 和 K 上的连续实值函数 h, 使得 $g = h \circ p$, 因此 $\varphi = p \circ \pi$ 是 G 到 K 上的连续同态且满足 $f = h \circ \varphi$. 这就证明了 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 证毕.

接下来把定理 4.3.8 推广到任意一族 T_1, totally Lindelöf Σ 仿拓扑群的积空间的稠密子群上.

推论 4.3.13 设 $G=\prod_{i\in I}G_i$ 是一族 T_1 仿拓扑群的积空间, 如果每一 G_i 是 *totally Lindelöf* Σ 仿拓扑群, 那么 G 的每一稠密子群是 $\mathbb{R}$-*factorizable* 仿拓扑群.

证明 设 S 是 G 的稠密子群以及 f 是 S 上的连续实值函数. 首先证明 G 是 ω-cellular 空间. 根据命题 4.1.1 中的 (4), 可以把拓扑群 G^* 与 $\prod_{i\in I}G_i^*$ 等同. 因为对任意有限子集 $F\subset I$ 有拓扑群 $\prod_{i\in F}G_i^*$ 是 Lindelöf Σ 空间, 所以由 [12, Theorem 5.3.18] 可得 $\prod_{i\in F}G_i^*$ 是 ω-cellular 空间. 又根据 [12, Proposition 1.6.22] 可得积空间 $G^*=\prod_{i\in I}G_i^*$ 也是 ω-cellular 空间, 故 G 作为 G^* 的连续像也是 ω-cellular 空间.

因为 S 在 G 中稠密, 所以由 [12, Theorem 1.7.7] 可得存在可数子集 $J\subset I$ 和连续函数 $g\colon p_J(S)\to\mathbb{R}$, 使得 $f=g\circ p_J\restriction_S$, 其中 $p_J\colon G\to\prod_{i\in J}G_i$ 是自然投射. 又因为 Lindelöf Σ 空间保持可数可乘性, 所以 $\prod_{i\in J}G_i$ 是 totally Lindelöf Σ 仿拓扑群. 再由定理 4.3.8 可以找到连续同态 $\pi\colon p_J(S)\to H$ 到第二可数的仿拓扑群 H 和连续函数 $h\colon H\to\mathbb{R}$, 使得 $g=h\circ\pi$, 那么 $\varphi=\pi\circ p_J\restriction_S$ 是从 S 到 H 上的连续同态, 以及 $f=h\circ\varphi$. 这就说明 S 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 证毕.

下面事实直接由推论 4.3.13 可得.

推论 4.3.14 设 $G=\prod_{i\in I}G_i$ 是一族 *Hausdorff, Lindelöf* Σ 仿拓扑群的积空间, 那么 G 的任意稠密子群是 $\mathbb{R}$-*factorizable* 仿拓扑群.

以下结果给出问题 4.0.15 的回答.

推论 4.3.15 设 $G=\prod_{i\in I}G_i$ 是一族 T_1 仿拓扑群的积空间, 如果每一 G_i 是 σ 紧空间, 那么 G 的每一稠密子群是 $\mathbb{R}$-*factorizable* 仿拓扑群.

第五章　拓扑群与仿拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余

本章中研究拓扑群和仿拓扑群的紧化剩余, 改进了 A. V. Arhangel'skiĭ [11], F. Lin [41] 和 C. Liu [50] 的一些结果, 部分回答了文献 [41, 50] 中的几个问题. 最后给出了仿拓扑群紧化剩余的一个二歧性定理, 肯定地回答了 [45, Question 3.1].

本章所有的空间都满足完全正则分离公理. 设 X 是拓扑空间, 本章中用 bX 表示空间 X 的 Hausdorff 紧化; $bX \setminus X$ 表示 X 的紧化剩余. 本章主要取材于作者与导师林寿教授合作的文章 "Remainders of topological and paratopological groups" 和 "The Baire property in the remainders of semitopological groups".

§5.1　拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余

在此节中主要讨论以下几个问题且给出一些部分回答.

问题 5.1.1 *[41, Question 2.15] 设 G 是非局部紧的拓扑群, 如果 $Y = bG \setminus G$ 满足下列条件, 那么 G 和 bG 是可分可度量空间吗?*

(1) 对每一点 $y \in Y$, 在 Y 中存在包含 y 的开邻域 $U(y)$, 使得 $U(y)$ 中的每一可数紧子集是可度量的且是 $U(y)$ 中的 G_δ 集;

(2) Y 具有可数 π 特征.

问题 5.1.2 *[50, Question 14] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $bG\setminus G$ 具有 BCO[1], 那么 G 和 bG 是可分可度量空间吗?*

问题 5.1.3 *[50, Remark 10] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $bG \setminus G$ 具有 σ 局部可数网络, 那么 G 和 bG 是可分可度量空间吗?*

问题 5.1.4 *[50, Question 6] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $bG \setminus G$ 是局部对称空间, 那么 G 和 bG 是可分可度量空间吗?*

---

[1]设 X 是拓扑空间且 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 如果对 $x \in X$, 若 $\{B_i\}_{i\in\omega}$ 是 $\mathscr{B}$ 中含 x 的严格递减的集列 $\{B_n : n \in \omega\}$ 是 x 在 X 中的局部基, 则称 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的 BCO 基 *(base of countable order)* (简写 BCO) [29].

首先回忆一下紧化剩余中的一个著名定理:

Henriksen-Isbell 定理 [32]: 拓扑空间 X 是可数型的当且仅当它的每一个 Hausdorff 紧化剩余是 Lindelöf 空间.

设 X 是拓扑空间, 如果空间 X 是某个可分度量空间的完全映射[2]的逆像, 那么 X 是 *Lindelöf p* 空间 [29].

引理 5.1.5 *[5] 如果 X 是 Lindelöf p 空间, 那么 X 的每一紧化剩余也是 Lindelöf p 空间.*

注 5.1.6 *如果 G 是非局部紧的拓扑群, 那么由 G 是齐性空间可得 G 是无处局部紧空间, 从而 $Y = bG \setminus G$ 在 bG 中是稠密的, 即 bG 也是 Y 的一个紧化. 由 Henriksen-Isbell 定理以及引理 5.1.5 可得以下结论成立:*

(1) Y 是可数型空间 $\Leftrightarrow$ G 是 Lindelöf 空间;

(2) Y 是 Lindelöf p 空间 $\Leftrightarrow$ G 是 Lindelöf p 空间.

设 X 是拓扑空间, 如果对 X 中的每一非空紧子集 K, 可以找到另一紧子集 $F \subset X$ 使得 $K \subset F$ 且 F 在 X 中存在可数邻域基, 那么空间 X 是可数型空间 (*countable type space*) [26]; 如果对 X 中的每一非空紧子集 K, 可以找到另一紧子集 $F \subset X$ 使得 $K \subset F$ 且 F 是 X 中的 G_δ 集, 那么空间 X 是次可数型空间 (*subcountable type space*) [6] .

引理 5.1.7 *[6] 设 Y 是拓扑群 G 的某一紧化剩余, 那么 Y 是可数型空间当且仅当 Y 是次可数型空间.*

引理 5.1.8 *[50, Lemma 2] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 如果 Y 具有可数 π 特征, 且对每一 $y \in Y$, 存在 Y 中包含 y 的开邻域 $U(y)$, 使得 $U(y)$ 中的每一可数紧子集是可度量空间, 那么 G 是可度量空间且局部可分的.*

以下定理部分地回答了问题 5.1.1.

[2] 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, 若 f 是闭映射且对每一 $y \in Y$ 有 $f^{-1}(y)$ 是 X 中的紧子集, 那么 f 是完全映射 (perfect map) [26].

定理 5.1.9 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 如果对每一点 $y \in Y$, 在 Y 中存在包含 y 的开邻域 $U(y)$, 使得 $U(y)$ 中每一可数紧子集是可度量的且是 $U(y)$ 中的 G_δ 集, 那么 G 是可分可度量空间且 Y 是第一可数的 *Lindelöf* p 空间.

证明 **断言 1.** Y 中的每一紧子集 F 是可度量的且 F 是 Y 中的 G_δ 集.

考虑 F 的开覆盖 $\mathscr{U} = \{U(y) : y \in F\}$, 其中对每一 $y \in F$, $U(y)$ 是 Y 中包含 y 的开邻域且满足: $U(y)$ 中每一可数紧子集是 $U(y)$ 中可度量的 G_δ 集. 因为 F 是紧子集, 所以存在 $\mathscr{U}$ 中的有限子族 $\mathscr{U}'$ 使得 $\mathscr{U}'$ 覆盖 F. 对每一 $U \in \mathscr{U}'$ 以及每一点 $z_U \in U \cap F$, 取 Y 中包含 z_U 的开邻域 $V(z_U)$ 使得 $\overline{V(z_U)}^Y \subset U$. 显然, $\overline{V(z_U)}^Y \cap F$ 是 U 中的可数紧子集, 所以 $\overline{V(z_U)}^Y \cap F$ 是 U 中可度量化的 G_δ 集. 因为 U 是 Y 中的开集, 所以 $\overline{V(z_U)}^Y \cap F$ 也是 Y 中的 G_δ 集. 令 $\mathscr{V} = \bigcup\{\mathscr{V}_U : U \in \mathscr{U}'\}$, 其中 $\mathscr{V}_U = \{V(z_U) : z_U \in U \cap F\}$, 那么显然, $\mathscr{V}$ 是 F 的开覆盖, 从而可以找到有限子族 $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$ 使得 $\mathscr{V}'$ 覆盖 F. 显然, $F = \bigcup\{F \cap \overline{V}^Y : V \in \mathscr{V}'\}$. 因为每一 $F \cap \overline{V}^Y$ 是 Y 中可度量的 G_δ 集, 所以很容易得到 F 也是 Y 中的可度量的 G_δ 集.

断言 2. G 是 Lindelöf 空间且 Y 是第一可数空间.

由断言 1 可得 Y 是次可数型空间, 所以根据 5.1.7 可得 Y 是可数型空间. 从而根据注 5.1.6 可得 G 是 Lindelöf 空间, 以及对每一 $y \in Y$, 存在 Y 中的紧子集 F 使得 $y \in F$ 以及 F 在 Y 中具有可数邻域基. 又因为断言 1 已证明 F 是可度量的, 所以很容易得到 y 在 Y 中具有可数邻域基 [26, 3.1.E], 因此 Y 是第一可数空间.

根据断言 2, 注 5.1.6 以及引理 5.1.8, 可得 G 是可分可度量空间以及 Y 是第一可数的 Lindelöf p 空间. 证毕.

设 X 是拓扑空间, Φ 是一拓扑性质, 如果对任意点 $x \in X$, 存在包含点 x 的邻域 U 使得 U 具有性质 Φ, 则称 X 是*局部* Φ 空间.

接下来我们讨论拓扑群 G 在什么条件下使得它的紧化 bG 是可分可度量化空间. 称拓扑性质 Φ 满足 (L), 若 Φ 满足如下条件:

(L_1) 每一具有性质 Φ 的 Lindelöf p 空间 X 是可度量化的;

(L_2) 如果空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一可数紧子集是可度量化的且是 X 中的 G_δ 集;

(L_3) 性质 Φ 关于闭子空间遗传.

因为每一可数紧的可度量空间是紧的, 然而每一紧空间是 Lindelöf p 空间, 所以上面条件 (L_2) 可以由以下条件 (L_2') 代替:

(L_2') 如果空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一可数紧子集是 X 中的紧的 G_δ 集.

定理 5.1.10 *设 G 是非局部紧的拓扑群以及 Φ 是拓扑性质, 如果 $Y = bG \setminus G$ 是局部 Φ 空间且 Φ 满足 (L), 那么 bG 是可分可度量空间.*

证明 因为 Y 具有局部性质 Φ 且 Φ 满足 (L), 所以 Y 显然满足问题 5.1.1 中条件 (1). 再根据定理 5.1.9 可得 G 是可分可度量空间以及 Y 是 Lindelöf p 空间.

由于 Y 是局部 Φ 空间且 Φ 满足 (L), 所以对每一 $y \in Y$ 可以找到 Y 中包含 y 的开邻域 $U(y)$, 使得 $\overline{U(y)}^Y$ 具有性质 Φ. 显然, $\overline{U(y)}^Y$ 是 Lindelöf p 空间, 从而由 Φ 满足 (L_1) 可得 $\overline{U(y)}^Y$ 是可分可度量化空间, 这就证明了 Y 是局部可分且局部可度量空间.

又因为已证 Y 是 Lindelöf 空间, 所以很容易得到 Y 具有可数网络. 显然, G 也具有可数网络, 故 $bG = G \cup Y$ 具有可数网络, 从而由 bG 的紧性可得 bG 是可分可度量空间. 证毕.

在定理 5.1.10 中因为 G 是 bG 的子空间, 所以显然有 G 也是可分可度量空间. 对于 p 亚基, $\delta\theta$ 基, 拟 G_δ 对角和 CSS 空间的定义可以参考文献 [48], [29] 和 [53]. 推论 5.1.11 中的 (1) 和 (4) 分别改进了 [41, Theorem 2.5, Theorem 2.13].

推论 5.1.11 *设 G 是非局部紧的拓扑群, 如果 G 的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 满足下面条件之一, 那么 bG 是可分可度量化空间.*

(1) Y 具有局部的点可数 p 亚基;

(2) Y 具有局部的 $\delta\theta$ 基 [41];

(3) Y 具有局部的拟 G_δ 对角 [41];

(4) Y 是局部的 CSS 空间.

证明 用 $(1')$-$(4')$ 分别表示条件 (1)-(4) 中去掉"局部的"后得到的条件. 很显然, 条件 $(1')$-$(4')$ 中的拓扑性质是关于闭子空间遗传的, 从而由定理 5.1.10 可知, 只需证明以下两个事实即可.

事实 1. 每一满足 $(1')$-$(4')$ 条件之一的 Lindelöf p 空间是可度量化的.

事实 2. 具有 $(1')$-$(4')$ 条件之一的空间中每一可数紧子集是可度量的且是此空间的 G_δ 集.

事实上, 事实 1 已在 [48, Theorem 3.1.8], [29, Corollary 8.3], [36, Corollary 3.6] 和 [15, Proposition 3.8] 中分别被证明. 然而, 事实 2 也已分别在 [41, Lemma 2.3], [15, Proposition 2.1], [15, Proposition 2.3] 和 [15, Proposition 3.8] 中分别被证明. 证毕.

以下推论 5.1.14 中 (1) 和 (2) 分别部分地回答了问题 5.1.2 和问题 5.1.3, 但在给出证明之前还是要给出两个辅助事实.

引理 5.1.12 *设 X 具有 σ 局部可数的网络, 那么 X 中的每一个紧子集是可度量的且是 X 中的 G_δ 集.*

证明 设 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{P}_n$ 是 X 的网络, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 在 X 中是局部可数的. 因为 X 是正则空间, 所以不妨假设 $\mathcal{P}$ 中的每一元是闭的. 任取 X 中的紧子集 F, 因为很容易验证 F 具有可数网络, 所以很显然 F 是可度量的. 固定 $n\in\omega$, 对每一 $x\in X$, 取包含 x 的开邻域 $V_n(x)$ 使得 $V_n(x)$ 至多与 $\mathcal{P}_n$ 中可数多个元相交. 令 $\gamma_n=\{V_n(x):x\in X\}$, 那么很容易找到有限子族 $\gamma_n'\subset\gamma_n$ 使得 γ_n' 覆盖 F. 置 $V_n=\bigcup\gamma_n'$ 以及 $\{P\in\mathcal{P}_n:P\cap V_n\neq\emptyset, P\cap F=\emptyset\}=\{P_n(i):i\in\omega\}$.

断言. $F=\bigcap_{n,i\in\omega}(X\setminus P_n(i))\cap V_n$.

设 $Q=\bigcap_{n,i\in\omega}(X\setminus P_n(i))\cap V_n$, 显然, $F\subset Q$. 任给 $x\in Q\setminus F$, 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络以及 F 是紧子集, 所以存在 $n\in\omega$ 以及 $P\in\mathcal{P}_n$ 使得 $x\in P\subset X\setminus F$. 那么对某一$i\in\omega$ 有 $P=P_n(i)$, 故 $x\notin X\setminus P_n(i)$, 从而 $x\notin Q$, 矛盾. 这就证明了 F 是 X 中的 G_δ 集. 证毕.

引理 5.1.13 *[15] 具有 BCO 空间的每一紧子集是可度量的且是此空间中的 G_δ 集.*

推论 5.1.14 *设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 那么 bG 是可分可度量空间当且仅当 Y 的每个可数紧子集是紧的以及 Y 满足以下条件之一.*

(1) 具有局部的 σ 局部可数网络;

(2) 具有局部的 BCO.

证明 如果 bG 是可分可度量空间, 那么显然, Y 作为 bG 的子空间是可度量空间, 从而 Y 中的每一可数紧子集是紧的且满足 (1) 和 (2).

相反地, 假设 Y 中的每一可数紧子集是紧的以及 Y 满足 (1) 或 (2), 分别用 $(1')$ 和 $(2')$ 表示把 (1) 和 (2) 中 "局部的" 去掉后得到的条件. 很显然 $(1')$ 和 $(2')$ 中的拓扑性质是关于闭子空间遗传的, 因此根据定理 5.1.10, 只需证明以下两个事实.

事实 1. 每一满足 $(1')$ 和 $(2')$ 条件之一的 Lindelöf p 空间是可度量化的.

事实 2. 每一满足 $(1')$ 和 $(2')$ 条件之一的空间中每一可数紧子集是可度量的且是此空间的 G_δ 集.

事实上, 事实 2 由引理 5.1.12 和引理 5.1.13 很容易得到. 至于事实 1, 如果 X 是具有 σ 局部可数网络的 Lindelöf p 空间, 那么很容易得到 X 具有可数网络, 因此根据 [29, Corollary 3.20, Corollary 4.7] 可得 X 是可度量空间. 另一方面, 每一具有 BCO 的 Lindelöf p 空间是可度量空间 [29, Theorem 1.2, Theorem 6.6]. 证毕.

最后, 我们考虑问题 5.1.4. 设 X 是非空集合, 函数 $d: X \times X \to [0, +\infty)$ 如果满足: 对任意 $x, y \in X$, 有 (i) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; (ii) $d(x,y) = d(y,x)$, 那么 d 是集合 X 上的对称 (*symmetric*) [29]. 如果存在 X 上的某个对称 d 满足如下条件: $U \subset X$ 是 X 中开集当且仅当对任意 $x \in U$ 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$, 那么空间 X 是对称空间 (*symmetrizable space*) [29].

引理 5.1.15 *[29, Lemma 9.12] 每一 ω_1 紧[3] 的对称空间是遗传 Lindelöf 空间.*

[3] 设 X 是拓扑空间, 若 X 的每一闭离散子集的势小于 ω_1, 那么 X 是 ω_1 紧空间 (*ω_1-compact space*) [29].

引理 5.1.16 *对称空间中的每一可数紧子集是紧可度量的.*

证明 设 A 是对称空间 X 的可数紧子集, 如果 $\{x_n\}$ 是 A 中序列且收敛于 X 中的一点 x, 那么由 A 的可数紧性可得 $\{x_n\}$ 在 A 中存在一个聚点 a, 从而 a 也是 $\{x_n\}$ 在 X 中的聚点, 因此 $x = a \in A$, 也就是说, A 是 X 中的序列闭集. 因为 X 是对称空间, 所以 X 是序列空间 [29, p. 481], 即 X 中的每一序列闭集是闭集, 故 A 是 X 的闭集. 因为对称空间关于闭子空间遗传, 所以 A 也是对称空间, 从而 A 是紧可度量空间 [29, Theorem 9.13]. 证毕.

引理 5.1.17 *[7] 设 G 是仿拓扑群, 那么 G 是可数型空间当且仅当在 G 中存在非空的紧子集 F, 使得 F 在 G 中具有可数邻域基.*

定理 5.1.18 *设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是局部对称空间, 如果 Y 中的每一单点集是 G_δ 集, 则 bG 是可分可度量空间.*

证明 **情况 1.** G 是可数型空间.

由 Henriksen-Isbell 定理可得 Y 是 Lindelöf 空间, 从而 Y 是 ω_1 紧的. 又根据引理 5.1.15 可得 Y 是局部遗传 Lindelöf 空间. 令 $\Phi =$ “对称且遗传 Lindelöf 空间”, 故根据定理 5.1.10, 只需证明性质 Φ 满足上面条件 (L), 也就是性质 Φ 满足以下条件:

(L_1) 每一具有性质 Φ 的 Lindelöf p 空间 X 是可度量化的;

(L_2) 如果空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一可数紧子集是可度量化的且是 X 中的 G_δ 集;

(L_3) 性质 Φ 是关于闭子空间遗传的.

因为每一对称的 Lindelöf p 空间是可度量的 [29, Theorem 9.13], 所以性质 Φ 满足 (L_1). 又因为每一遗传 Lindelöf 空间是完全空间[4], 所以由引理 5.1.16 可得性质 Φ 满足 (L_2). 很显然性质 Φ 满足 (L_3).

情况 2. Y 中的每一单点集是 bG 中的 G_δ 集.

[4]设 X 是一拓扑空间, 如果 X 中的每一闭集是 G_δ 集, 那么 X 是完全空间 (*perfect space*) [26].

由于 bG 是紧空间, 所以很容易得到 Y 是第一可数空间. 又根据引理 5.1.8 以及 Y 具有局部性质 Φ 且 Φ 满足 (L_2) 可得 G 是可度量且局部可分空间. 这就说明 G 是可数型空间, 那么根据情况 1 可得 bG 是可分可度量空间.

情况 3. 存在某点 $y \in Y$ 使得 $\{y\}$ 不是 bG 中的 G_δ 集.

可以找到 bG 中的 G_δ 集 P 满足 $\{y\} = P \cap Y$ 以及 $P \cap G \neq \emptyset$. 取 bG 中的开集列 $\{U_n\}$ 使得 $P = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. 固定一点 $g \in P \setminus \{y\}$, 那么对每一 $n \in \omega$ 可以找到 bG 中的开集 V_n 满足 $y \notin \overline{V_n}^{bG}$ 以及 $g \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}}^{bG} \subset V_n \cap U_{n+1}$. 令 $F = \bigcap_{n\in\omega} V_n$, 显然, F 是 bG 中非空闭的 G_δ 集且有 $F \subset G$. 由于 bG 是紧空间, 所以很容易得到 F 在 bG 中有可数邻域基, 从而 F 在 G 中也具有可数邻域基. 很显然 F 是 G 的非空紧子集, 那么由引理 5.1.17 可得 G 是可数型空间, 从而由情况 1 可得 bG 是可分可度量化空间. 证毕.

推论 5.1.19 *设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是局部对称空间, 如果 Y 满足以下条件之一, 则 bG 是可分可度量空间.*

(1) Y 是局部完全空间;

(2) Y 是局部 Lindelöf 空间;

(3) Y 是局部 ω_1 紧空间.

推论 5.1.20 *[50] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是局部对称空间, 如果 Y 具有可数 π 特征, 那么 bG 是可分可度量空间.*

证明 根据引理 5.1.8 和引理 5.1.16 可得 G 是可度量且局部可分空间, 所以由 Henriksen-Isbell 定理可得 Y 是 Lindelöf 空间, 从而由推论 5.1.19 中的 (2) 可得 bG 是可分可度量空间. 证毕.

采用定理 5.1.18 的证明中情况 1 和情况 3 的证明方法可以得到以下结果.

定理 5.1.21 *设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是局部对称空间, 如果 Y 中存在一个孤立点, 那么 bG 是可分可度量空间.*

§5.2 仿拓扑群的 Hausdorff 紧化剩余

在本节中我们考虑仿拓扑群的紧化剩余, 改进了A. V. Arhangel'skiĭ [5] 的一些结果.

设 X 是拓扑空间, 如果在 X 的每个紧化 bX 中可以找到一个 G_δ 集 Z, 使得 $X \subset Z$ 以及对每一点 $y \in Z \setminus X$ 都可以找到 Z 中的 G_δ 集 P 与 X 分离, 即 $y \in P$ 且 $P \cap X = \emptyset$, 那么空间 X 是 *Ohio complete* 空间 [5]. 如果在 X 的 Stone-Čech 紧化 βX 中存在一列开集族 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足如下条件, 那么空间 X 是 p 空间 (p-*space*) [29]:

(1) 对每一 $n \in \omega$ 有 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 X;

(2) 对每一 $x \in X$ 有 $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset X$, 其中 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \bigcup\{U \in \mathscr{U}_n : x \in U\}$.

如果集合 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ 是空间 $X \times X$ 的 G_δ 集, 那么称空间 X 具有 G_δ 对角 (G_δ-*diagonal*) [29].

引理 5.2.1 *[5] 每一 Lindelöf 空间, 具有 G_δ 对角的空间或者 p 空间都是 Ohio complete 空间.*

A. V. Arhangel'skiĭ [7] 给出了仿拓扑群的紧化剩余是 Ohio complete 空间时的刻画.

引理 5.2.2 *[7] 设 G 是仿拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 那么 Y 是 Ohio complete 空间当且仅当要么 G 是 σ 紧空间, 要么 G 是可数型空间.*

在一般拓扑空间中, 具有 Lindelöf 剩余已在 Henriksen-Isbell 定理中给出刻画. 对于仿拓扑群, 我们得到以下等价条件.

定理 5.2.3 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 那么以下条件等价[5]:*

(1) Y 是 σ 亚紧且 Ohio complete 空间;

(2) Y 是亚紧且 Ohio complete 空间;

---

[5]设 X 是拓扑空间, 如果对于 X 的每一开覆盖都存在点有限 (σ 点有限) 的开加细, 那么空间 X 是亚紧 (*metacompact space*) (σ 亚紧 (σ-*metacompact space*)) 空间 [19].

(3) Y 是仿紧且 Ohio complete 空间;

(4) Y 是 Lindelöf 空间;

(5) G 是可数型空间.

证明 (5) $\Rightarrow$ (4). 直接由 Henriksen-Isbell 定理可得.

(4) $\Rightarrow$ (3). 直接由引理 5.2.1 可得.

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). 显然的.

(1) $\Rightarrow$ (5). 假设 Y 是 σ 亚紧且 Ohio complete 空间. 根据引理 5.2.1 也可以假设 G 是 σ 紧空间, 因此 G 的胞腔度 $c(G)$ 是可数的 [12, Corollary 5.7.12] 以及 Y 是 Čech-complete 空间[6]. 因为 G 在 bG 中是稠密的, 所以 bG 的胞腔度 $c(bG)$ 也是可数的. 因为 G 是非局部紧的仿拓扑群, 所以 Y 也在 bG 中稠密, 从而 Y 的胞腔度 $c(Y)$ 也是可数的. 又因为对每一 Čech-complete 空间 X, 如果它的胞腔度是可数的, 那么 X 中的每一点有限的开集族是可数的 [19, Proposition 8.3],所以由 Y 是 σ 亚紧空间很容易得到它是 Lindelöf 空间, 从而根据 Henriksen-Isbell 定理可得 G 是可数型空间. 证毕.

注 5.2.4 *为什么我们只考虑非局部紧的仿拓扑群 G? 如果 G 是局部紧的, 那么 G 就在 bG 中是开的, 从而 $Y = bG \setminus G$ 是紧空间.*

根据注 5.1.6, 引理 5.2.1 和定理 5.2.3 可以得到以下推论, 此结果改进了以下结果: 如果 G 是非局部紧的拓扑群, 那么 G 的剩余 $bG \setminus G$ 是仿紧的 p 空间当且仅当 G 是 Lindelöf p 空间 [5, Theorem 4.9].

推论 5.2.5 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$, 那么 G 是 Lindelöf p 空间当且仅当 Y 是 Lindelöf (或者 σ 亚紧) p 空间.*

在拓扑群中, A. V. Arhangel'skiĭ [5, Theorem 4.8] 证明了以下结果.

推论 5.2.6 *假设 G 是仿拓扑群且它的紧化剩余 $bG \setminus G$ 是仿紧 p 空间, 那么 G 也是仿紧 p 空间.*

---

[6]设 X 是完全正则空间, 如果 X 是它的某个紧化空间中的 G_δ 集, 那么 X 是 *Čech-complete* 空间 [26].

证明 如果 G 是局部紧的, 那么 G 是局部紧的拓扑群 [12, Theorem 2.3.12], 这就说明 G 是仿紧 p 空间 [12, Theorem 4.3.35]. 如果 G 是非局部紧的, 那么由推论 5.2.5 可得 G 是仿紧 p 空间, 这是因为每仿紧 p 空间是 σ 亚紧 p 空间, 而每 Lindelöf p 空间是仿紧 p 空间. 证毕.

推论 5.2.7 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 那么 G 是可分可度量空间当且仅当 $bG \setminus G$ 是 σ 亚紧 p 空间且 G 具有 G_δ 对角.*

证明 如果 G 是可分可度量空间, 那么很显然 G 具有 G_δ 对角. 由推论 5.2.5 可得 $bG \setminus G$ 是 σ 亚紧 p 空间. 相反地, 如果 $bG \setminus G$ 是 σ 亚紧 p 空间以及 G 具有 G_δ 对角, 那么根据推论 5.2.5 可得 G 是 Lindelöf p 空间. 因为每一具有 G_δ 对角的 Lindelöf p 空间是可度量化的 [29, Corollary 3.8, Corollary 3.20], 所以 G 是可分可度量空间. 证毕.

A. V. Arhangel'skiĭ [11, Theorem 4.5] 证明了以下定理对拓扑群成了.

定理 5.2.8 *假设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 那么 G 的剩余 $Y = bG \setminus G$ 是 p 空间当且仅当 G 要么是 σ 紧空间, 要么是 Lindelöf p 空间.*

证明 假设 Y 是 p 空间, 根据引理 5.2.1 和引理 5.2.2 可得 G 要么是可数型空间, 要么是 σ 紧空间. 如果 G 是可数型空间, 那么由 Henriksen-Isbell 定理可得 Y 是 Lindelöf 空间, 从而根据注 5.1.6 可得 G 是 Lindelöf p 空间.

相反地, 如果 G 是 σ 紧空间, 那么 Y 是 Čech-complete 空间, 从而 Y 是 p 空间. 如果 G 是 Lindelöf p 空间, 那么由引理 5.1.5 可得 Y 是 Lindelöf p 空间. 证毕.

注 5.2.9 *推论 5.2.7 中的 "非局部紧" 不能去掉. 任取具有不可数势的群 G 且赋予 G 离散拓扑, 设 bG 是 G 的单点紧化, 很显然 $bG \setminus G$ 是 σ 亚紧 p 空间, 然而 G 不是可分的. 这个例子也说明定理 5.2.8 中的 "非局部紧" 不能去掉以及在 [11, Corollary 4.11] 中的拓扑群必须要求是非局部紧.*

引理 5.2.10 *[11] 如果仿拓扑群 G 在某一点具有可数 π 基, 那么 G 具有 G_δ 对角.*

定理 5.2.11 设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 如果 G 的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 是 σ 亚紧 p 空间且具有可数 π 特征, 那么 G 是可分可度量空间.

证明 因为 G 是非局部紧的仿拓扑群, 所以 $Y = bG \setminus G$ 不是紧的, 从而根据假设可得 Y 也不是可数紧空间, 因此在 Y 中可以找到无限可数闭离散子集 $A = \{a_n : n \in \omega\}$. 因为 bG 是紧空间, 所以 A 在 bG 中存在聚点 c 使得 $c \in G$. 对每一 $n \in \omega$, 选择 $\{V(n,k) : k \in \omega\}$ 作为 a_n 在 Y 中的局部 π 基. 对任意 $n, k \in \omega$, 取 bG 中的开集 $U(n,k)$ 使得 $V(n,k) = U(n,k) \cap Y$. 令 $W(n,k) = U(n,k) \cap G$, 不难验证 $\{W(n,k) : n, k \in \omega\}$ 是 c 在 G 中的局部可数 π 基, 那么由引理 5.2.10 可得 G 具有 G_δ 对角. 最终由推论 5.2.7 可得 G 是可分可度量空间. 证毕.

推论 5.2.12 *[51]* 设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 如果它的紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 是可度量的, 那么 bG 是可分可度量空间.

证明 根据定理 5.2.11 可得 G 是可分可度量空间, 因此再由 Henriksen-Isbell 定理可得 Y 也是可分可度量空间, 从而紧空间 $bG = G \cup Y$ 是可分可度量空间. 证毕.

最后我们考虑仿拓扑群的紧化剩余具有 G_δ 对角时的情况.

定理 5.2.13 设 G 是仿拓扑群以及它的紧化剩余 $bG \setminus G$ 具有 G_δ 对角, 那么 G 要么是可数型空间, 要么是 σ 紧空间且具有 G_δ 对角.

证明 如果 G 是局部紧空间, 那么很显然可得 G 是可数型空间, 因此我们不仿假设 G 是非局部紧空间.

因为剩余 $Y = bG \setminus G$ 具有 G_δ 对角, 所以由引理 5.2.1 可得 Y 是 Ohio complete 空间, 从而由引理 5.2.2 可得 G 要么是可数型空间, 要么是 σ 紧空间. 我们假设 G 不是可数型空间, 那么只需证明 G 具有 G_δ 对角.

断言 1. Y 是第一可数空间.

如果 Y 不是第一可数的, 根据 bG 的紧性, 那么存在一点 $y_0 \in Y$ 使得 $\{y_0\}$ 不是 bG 中的 G_δ 集, 因此很容易找到 bG 中的开集列 $\{U_n\}$ 满足 $\{y_0\} = Y \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$ 以及 $G \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. 任取一点 $x_0 \in G \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$, 那么可以找到 bG 中的开集列 $\{V_n\}$ 使得对每一 $n \in \omega$ 有 $\overline{V_{n+1}}^{bG} \subset V_n \subset U_n$ 以及 $y_0 \notin V_0$. 令 $F = \bigcap_{n\in\omega} V_n$,

那么显然 F 是紧子集且在 G 中具有可数邻域基, 因此由引理 5.1.17 可得 G 是可数型空间, 矛盾.

断言 2. Y 不是可数紧空间.

事实上, 因为每一具有 G_δ 对角的可数紧空间是可度量化的 [29], 所以如果 Y 是可数紧的, 那么可得 Y 是紧的. 这与 G 是非局部紧空间矛盾.

用证明定理 5.2.11 的方法, 以及由断言 1 和断言 2 可得 G 具有可数 π 特征, 从而由引理 5.2.10 可得 G 具有 G_δ 对角. 证毕.

注 5.2.14 *定理 5.2.13 的逆不一定成立. 设 Z 是整数集且赋予离散拓扑, 那么 Z 显然是可数型的拓扑群且它是具有 G_δ 对角的 σ 紧空间, 但是它的极大紧化 βZ 的剩余 $\beta Z \setminus Z$ 不具有 G_δ 对角.*

§5.3 仿拓扑群紧化剩余中的二歧性定理及其应用

在本节中我们建立仿拓扑群中的一个二歧性定理, 我们的结果甚至是对半拓扑群讨论的. 然后举出二歧性定理在紧化剩余中的几个应用, 肯定地回答了以下问题.

问题 5.3.1 *[45, Question 3.1] 设 G 是非局部紧的半拓扑群或者拟拓扑群以及 bG 是 G 的一个紧化, 那么 G 的剩余 $bG \setminus G$ 要么具有 Baire 性质, 要么是 meager 且 Lindelöf 空间吗?*

以下引理是显然的, 留给读者作练习.

引理 5.3.2 *设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 中两两不相交的开子集族, 如果对每一 $U \in \mathscr{U}$ 有 Z_U 是 U 中的 G_δ 集, 那么 $Z = \bigcup_{U\in\mathscr{U}} Z_U$ 是 X 中的 G_δ 集.*

设 X 是拓扑空间, 如果 X 中任意可数多个开的稠密子集的交还是 X 中的稠密子集, 那么称空间 X 具有 *Baire* 性质 [26].

定理 5.3.3 *如果齐性空间 G 的某个紧化剩余不具有 Baire 性质, 则*

(1) G 包含一个稠密的 Čech-complete 子空间;

(2) G 中存在一个紧子集 F 且 F 在 G 中具有可数邻域基.

证明　假设 G 的某个紧化剩余 $Y = bG \setminus G$ 不具有 Baire 性质. 众所周知, 局部紧空间的每一紧化剩余是紧空间, 因此 G 不是局部紧空间. 又因为 G 是齐性空间, 所以可得 G 是无处局部紧的, 故 Y 在 bG 中是稠密的, 也就是说, bG 也是 Y 的一个紧化.

因为 Y 不具有 Baire 性质, 所以可以找到 Y 中可数多个开的稠密子集 $\{V_n\}_{n\in\omega}$ 使得 $\bigcap_{n\in\omega} V_n$ 在 Y 中不是稠密的. 对每一 $n \in \omega$, 取 bG 中的开子集 U_n 满足 $V_n = Y \cap U_n$. 由于 Y 是 bG 中的稠密子集, 所以可得 U_n 是 bG 中的开稠密子集. 令 $H = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, 由于 bG 是紧的, 这说明 bG 具有 Baire 性质, 所以 H 是 bG 中稠密的 G_δ 集. 由于 $H \cap Y = \bigcap_{n\in\omega} V_n$ 在 Y 中不稠, 从而存在 bG 中的开子集 W 满足 $W \cap H \cap Y = \emptyset$ 且 $W \cap H \cap G \neq \emptyset$. 又因为 W 是局部紧的, 所以 W 也具有 Baire 性质, 那么$H \cap G \cap W$ 是 G 的开子集 $W \cap G$ 中的 Čech-complete 且稠密的子空间.

因为 G 是齐性空间, 所以从上面的证明可知 G 中的每一非空开子集 U 都包含一个开子集 V 使得 V 中存在 Čech-complete 且在 V 中稠密的子空间 Z_V, 因此由 Zorn 引理, 可以取到 G 中极大且两两不交的开子集族 $\mathscr{V}$, 使得 $\mathscr{V}$ 的每一元都包含一个稠密的 Čech-complete 子空间. 令 $F = \bigcup \mathscr{V}$, 显然, F 在 G 中稠密. 对每一 $V \in \mathscr{V}$, 固定一个在 V 中稠密的 Čech-complete 子空间 Z_V, 令 $Z = \bigcup_{V\in\mathscr{V}} Z_V$.

(1) 显然, Z 在 G 中也是稠密的. 下面证明 Z 是 G 中的 Čech-complete 子空间. 对每一 $V \in \mathscr{V}$ 可以找到 bG 中的开子集 U_V 满足 $V = U_V \cap G$. 又因为 Z_V 是 V 中稠密的 Čech-complete 子空间, 所以 Z_V 也是 U_V 中稠密的 Čech-complete 子空间. 因为每一 Čech-complete 空间是它任何一个紧化中的 G_δ 集 [26, Theorem 3.9.1], 所以 Z_V 也是 U_V 中的 G_δ 集. 因为 G 在 bG 中稠密且 $\mathscr{V}$ 是 G 中两两不交的开集族, 所以集族 $\{U_V : V \in \mathscr{V}\}$ 在 bG 中也两两不交, 从而由引理 5.3.2 可得 $Z = \bigcup_{V\in\mathscr{V}} Z_V$ 也是 bG 中的 G_δ 集, 故 Z 是 G 中的 Čech-complete 子空间.

(2) 因为 Z 是 bG 中的 G_δ 集, 所以可以找到 bG 中的可数多个开集 $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ 满足 $Z = \bigcap_{n\in\omega} Z_n$. 固定一点 $x \in Z$, 很容易找到 bG 中的可数多个开集 $\{W_n\}_{n\in\omega}$ 使得对每一 $n \in \omega$ 有 $x \in \overline{W_{n+1}} \subset W_n \subset Z_n$. 令 $K = \bigcap_{n\in\omega} W_n$, 显然, K 是 bG

中的紧 G_δ 集且 $K \subset G$. 又因为 bG 是紧的, 所以 K 在 bG 中具有可数邻域基, 从而它在 G 中也具有可数邻域基. 证毕.

以下引理在这节中起着重要的作用.

引理 5.3.4 *[8, Corollary 5.4] 设 G 是半拓扑群, 如果 G 包含一个稠密的 Čech-complete 子空间, 那么 G 是 Čech-complete 的拓扑群.*

定理 5.3.5 *设 G 是半拓扑群, 那么要么 G 的每一紧化剩余具有 Baire 性质, 要么 G 的每一紧化剩余是 σ 紧空间.*

证明 如果存在 G 的某一紧化剩余不具有 Baire 性质, 那么由定理 5.3.3 可得 G 包含一个稠密的 Čech-complete 子空间. 由引理 5.3.4 可得 G 是 Čech-complete 空间, 因此 G 是它的任意紧化 bG 中的 G_δ 集 [26, Theorem 3.9.1], 由此可得 G 的每个紧化剩余是 σ 紧空间. 证毕.

注 5.3.6 *对于定理 5.3.5 我们作以下说明.*

(1) 定理 5.3.5 对拟拓扑群 (仿拓扑群) 也成立.

(2) 非局部紧的半拓扑群 G 的一个紧化 bG, 它的剩余 $Y = bG \setminus G$ 不可能是 σ 紧空间且具有 Baire 性质. 事实上, 要不然 Y 在 bG 中取内部非空, 但显然 Y 在 bG 中稠密. 因为 G 在 bG 也是稠密的, 因此 Y 必定与 G 相交, 矛盾.

(3) 根据定理 5.3.5 和 [14, Theorem 3.2] 可得非局部紧的半拓扑群 G 的一个紧化 bG, 若它的剩余 $Y = bG \setminus G$ 是 σ 紧空间时, 则 Y 是 meager 空间, 因此定理 5.3.5 肯定地回答了问题 5.3.1 且也改进了 [5, Theorem 1.1] 和 [45, Theorem 3.1].

(4) 设 G 是非局部紧的半拓扑群, 那么 G 的每一 (或存在某一) 紧化剩余具有 Baire 性质 $\Leftrightarrow$ G 的任何紧化剩余不是 σ 紧空间 $\Leftrightarrow$ G 不是 Čech-complete 空间.

(5) 设拓扑空间 X 既不具有 Baire 性质也不是 σ 紧空间, 那么 X 不可能同胚于某一半拓扑群的紧化剩余, 因此半拓扑群不能作出一个非平凡的例子使得其紧化剩余具有 Baire 性质.

接下来我们考虑二歧性定理在紧化剩余中的应用.

定理 5.3.7 设 G 是半拓扑群且具有可数胞腔度, 则要么 G 的每个紧化剩余具有 *Baire* 性质, 要么 G 的每个紧化剩余是 σ 紧的 p 空间.

证明 假设第一种选择不成立, 即存在 G 的某个紧化 bG 使得它的剩余 $bG \setminus G$ 不具有 Baire 性质, 因此根据定理 5.3.3 和定理 5.3.5 以及引理 5.3.4 可得 G 是 Čech-complete 拓扑群, 从而 G 是它的每个紧化中的 G_δ 集 [26, Theorem 3.9.1], 因此 G 的每一个紧化剩余是 σ 紧的且 G 是仿紧的 p 空间 [12, Corollary 4.3.21]. 又因为 G 的胞腔度是可数的, 所以 G 是 Lindelöf 空间, 从而 G 是 Lindelöf p 空间. 根据 [11, Theorem 2.1] 可得 G 的任意紧化剩余是 Lindelöf p 空间, 因此 G 的任意紧化剩余是 σ 紧的 p 空间. 证毕.

推论 5.3.8 设 Y 是胞腔度可数的半拓扑群 G 的某个紧化剩余且 Y 不具有 *Baire* 性质, 如果 Y 具有可数伪特征, 那么 Y 是第一可数的且 G 是可分可度量的拓扑群.

证明 因为 Y 不具有 Baire 性质, 由定理 5.3.7 可得 Y 是 σ 紧的 p 空间以及从定理 5.3.7 的证明中可以得到 G 是 Lindelöf 拓扑群. 因为每一个具有可数伪特征的 p 空间是第一可数的, 所以 Y 是第一可数的, 因此只需证明 G 是可度量化的就可. 事实上, 因为 Y 不具有 Baire 性质, 所以 Y 不是可数紧空间, 从而在 Y 中存在一无限可数子集 $A = \{a_n : n \in \omega\}$ 使得 A 在 Y 中是闭离散子集. 因为 bG 是紧空间, 所以 A 在 G 中存在一聚点 c. 对每一 $n \in \omega$, 选择 $\{V(n,k) : k \in \omega\}$ 作为 a_n 在 Y 中的局部可数基. 对任意 $n, k \in \omega$, 取 bG 中的开子集 $U(n,k)$ 使得 $V(n,k) = U(n,k) \cap Y$. 令 $W(n,k) = U(n,k) \cap G$, 不难验证 $\{W(n,k) : n, k \in \omega\}$ 是 c 在 G 中的 π 基. 因为每一具有可数 π 特征的拓扑群是可度量的 [11, Theorem 3.3.12, Proposition 5.2.6], 所以 G 是可度量空间. 证毕.

第六章　结束语

§6.1　拟研究方向

$\mathbb{R}$-factorizable (仿) 拓扑群是一类特殊的 (仿) 拓扑群, 最初是国际著名数学家 L. S. Pontryagin [57] 发现每一紧群具有 $\mathbb{R}$-factorizable 性质, 之后 W. W. Comfort 和 K. A. Ross [23] 发现伪紧的拓扑群也有此性质, 最终由 M. Tkachenko [79, 81] 在 1991 年引入此类拓扑群. 此类拓扑群出奇的广泛, 如, 每一 Lindelöf 拓扑群是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 甚至 σ 紧的拓扑群的每一子群都是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群. 此类拓扑群在拓扑群的各种完备和维数论中有着很多的应用, 但是这里仍然存在一系列悬而未决的问题 [12]. 在 2010 年, M. Sanchis 和 M. Tkachenko [69] 把拓扑群中的 $\mathbb{R}$-factorizbility 推广到仿拓扑群中且提出一系列问题. 本论文正是围绕这些问题展开, 主要研究 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群且部分或完全地回答了几个相关的问题.

众所周知, 每一拓扑群本身存在三个与其拓扑相容的一致结构, 分别是左一致结构, 右一致结构以及双边一致结构, 因此研究拓扑群也可以从一致空间理论出发. 本论文的第二章正是受此启发, 首先把一致空间上的一致连续函数作一推广, 我们称之为 ω 一致连续函数. 再利用这一概念来研究一致空间上的连续实数函数的分解性质. 最后把得到的理论应用到拓扑群上, 从而得到 $\mathbb{R}$-, m- 和 $\mathscr{M}$-factorizable 拓扑群的刻画. 由此给出了几个相关问题的回答. 我们的这一思想也为继续研究 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群注入了一股新鲜空气, 但是美中不足的是, 我们给出的刻画不完全是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群的内部刻画. 这是以后继续要考虑和研究的方向之一.

很显然, 每一拓扑群是仿拓扑群, 因此研究仿拓扑群就显得更具有一般意义. 然而, 正因为仿拓扑群中群的逆运算不一定连续, 这也为研究仿拓扑群增加了难度. 又因为每一仿拓扑群存在三个与其拓扑相容的拟一致结构, 从而运用拟一致结构理论来研究仿拓扑群也是很自然的. 在第二章的基础上, 我们把前面的思想和方法在第三章和第四章中再一次提升, 运用到 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群的研究中, 从而得到 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群的一些刻画. 利用这些刻画, 在完全正则空间类中证明了 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群的商仿拓扑群仍是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群. 这也算是给出 M. Sanchis 和 M. Tkachenko [69] 提出的 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是否被开连续同态所保持问题的一个较好的回答. 我们还回答了其它几个相

关问题. $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群刚提出来不久, 因此这方面的理论还很不成熟, 这也是我以后继续要考虑和研究的方向之一.

在一般拓扑空间理论中, 基数函数是很重要的方向之一, 因为基数函数是用一种统一和系统的方式来处理一些问题. 如果能把一些可数的拓扑性质提升到基数函数形式上来, 那么这会给研究带来很大的方便. 当然, 在拓扑群中, 对基数函数的研究已经较为成熟, 很自然地我们就会问, 拓扑群中的一些基数函数在仿拓扑群中还成立吗? 正是受到这些启发, 我们在第三章中也讨论了仿拓扑群中的一些基数函数. 然而,这方面的理论还很不成熟, 因此这也是以后要考虑和研究的方向之一.

拓扑群的紧化剩余理论是最近由 A. V. Arhangel'skiĭ 发展起来的, 特别地, 2008 年 A. V. Arhangel'skiĭ 得到了拓扑群中紧化剩余的一个二歧性定理: 拓扑群的每一紧化剩余要么是伪紧的, 要么是 Lindelöf 空间 [4]. 这一意外结果, 使得很多拓扑代数学家对拓扑群的紧化剩余产生了浓厚的兴趣, 如, M. M. Choban [7], J. van Mill [9] 等. 在论文的最后, 我们还研究了拓扑群和仿拓扑群的紧化剩余, 得到了仿拓扑群紧化剩余中的一个二歧性定理, 这一结果改进 A. V. Arhangel'skiĭ [5] 的另一个二歧性定理. 在仿拓扑群紧化剩余中还存在很多未解决的公开问题, 因此这也是以后我重点要研究的方向之一.

§6.2 一些公开问题

首先列举一些与 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群有关的问题且给出些简短的评论.

每一 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群是 ω-narrow 拓扑群 [11], 然而有例子表明其逆不一定成立 (见 [79, Example 2.7]). 因为每一具有可数胞腔度的拓扑群是 ω-narrow 拓扑群, 那么很自然地有以下问题.

问题 6.2.1 *[12, Open Problem 8.1.1] 每一具有可数胞腔度的拓扑群 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群吗? 如果 G 是可分的又如何呢?*

设 X 是完全正则的拓扑空间, 用 $A(X)$ 和 $F(X)$ 分别表示空间 X 上的自由阿贝尔拓扑群和自由拓扑群, 关于自由拓扑群的定义可参见 [12, Chapter 7].

问题 6.2.2 *[12, Open Problem 8.1.8] 刻画完全正则空间 X 使得自由拓扑群 $F(X)$ 或自由阿贝尔拓扑群 $A(X)$ 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群.*

对于问题 6.2.1 的特殊情况有以下问题.

问题 6.2.3 *[12, Open Problem 8.1.8] 设 X 是完全正则空间, 如果自由拓扑群 $F(X)$ 具有可数胞腔度, 那么 $F(X)$ 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群吗? 如果 X 是可分空间又如何呢?*

推论 2.3.17 说明 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群的开同态像是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 那么自然地会反过来问: 设 $f: G \to H$ 是拓扑群 G 和 H 之间的满的连续开同态, 如果 H 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 那么 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群吗? 显然这问题一般是否定的. 只要取 G 是一个非 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 而 H 取只含有单位元的拓扑群以及 f 取恒等映射即可, 但是我们很自然地有以下两问题.

问题 6.2.4 *设 N 是拓扑群 G 的闭不变子群, 如果 N 和商群 G/N 都是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 那么 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群吗?*

问题 6.2.5 *[12, Open Problem 8.1.8] 设 X 是完全正则空间, 如果自由阿贝尔拓扑群 $A(X)$ 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群, 那么自由拓扑群 $F(X)$ 是 $\mathbb{R}$-factorizable 拓扑群吗? (已知 $A(X)$ 是 $F(X)$ 的商拓扑群)*

接下来列举一些与 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群有关的问题.

第一个问题就是尝试把命题 4.2.10 推广到正则的仿拓扑群上.

问题 6.2.6 *每一正则 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 totally ω-narrow 仿拓扑群吗?*

根据定理 4.1.4, 以上问题等价于问是否每一正则 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群是 Tychonoff? 值得一提的是, 存在一个 T_0, $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群不是 ω-narrow 仿拓扑群.

第二个问题是重述文献 [69] 中的一个问题.

问题 6.2.7 *[69, Problem 5.1] 设 G 是 (正则) 仿拓扑群, 如果它的相伴拓扑群 G^* 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群, 那么 G 是 $\mathbb{R}$-factorizable 仿拓扑群吗?*

我们已经提到, 如果 G 是 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群, 那么它的相伴拓扑群 G^* 也是 Lindelöf Σ 空间. 除了 G 满足正则分离公理外, 我们不知道这个命题的逆是否成立.

问题 6.2.8 *假设 G 是 Hausdorff 仿拓扑群, 如果它的相伴拓扑群 G^* 是 Lindelöf Σ 空间, 那么 G 是 Lindelöf Σ 空间吗?*

设 G 是 Hausdorff σ 紧的仿拓扑群, 对 G 中的每一由 G_δ 集组成的集族 γ, $\overline{\bigcup\gamma}$ 仍然是 G 中的 G_δ 集 [68, Theorem 4.4], 但此结论对 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群是否成立还不知道.

问题 6.2.9 *设 G 是 Hausdorff, Lindelöf Σ 仿拓扑群以及 γ 是 G 中一族 G_δ 集, 那么 $\overline{\bigcup\gamma}$ 是 G 中的 G_δ 集吗?*

事实上, 上面这问题与下面的问题等价 (见 [86, Problem 4.3]).

问题 6.2.10 *设 G 是 Hausdorff 仿拓扑群且具有可数网络, 那么 G 中的每一闭子集是 G_δ 集吗?*

最后列举一些与拓扑群和仿拓扑群的紧化剩余相关的几个问题.

在 2009 年, 刘川证明了: 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是度量空间的商 s 像, 如果 Y 具有可数 π 特征, 那么 bG 是可分可度量空间 [50], 然后提出如下问题.

问题 6.2.11 *[50, Question 6] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是度量空间的商 s 像, 那么 bG 是可分可度量的吗?*

在 2010 年, 刘川和林寿证明了: 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 是具有点可数基空间的伪开 s 像, 那么 bG 是可分可度量空间 [52, Theorem 5.2], 然后问

问题 6.2.12 *[52, Question 5.2] 设 G 是非局部紧的拓扑群以及 $Y = bG \setminus G$ 具有点可数弱基, 那么 bG 是可分可度量的吗?*

最近 A. V. Arhangel'skiĭ 和 J. van Mill 给出一个例子说明非局部紧的拓扑群 G 具有第一可数的剩余, 而 G 不可度量化, 而且他们还证明了当非局部紧的拓扑群 G 存在一个第一可数的紧化剩余时, 那么 G 的特征数不超过 ω_1 [9], 因此我们自然地会问

问题 6.2.13 设 G 是非局部紧的完全正则仿拓扑群且具有一个第一可数的剩余, 那么 G 的特征数不超过 ω_1 吗?

设 X 是拓扑空间, 如果 X 中的每一 σ 紧子集的闭包是紧的, 那么空间 X 是强 ω 有界 (strongly ω-bounded) [10]. 关于拓扑群具有第一可数剩余的问题还有.

问题 6.2.14 *[10, Problem 4.10]* 存在一个不可度量的拓扑群 G 具有一个第一可数剩余 Y 且使得 Y 不是强 ω 有界的吗?

最后根据定理 5.2.13 我们有以下问题.

问题 6.2.15 找一个充分必要条件使得仿拓扑群 G 的任意紧化剩余 $bG \setminus G$ 具有 G_δ 对角.

参考文献

[1] O. T. Alas, M. Sanchis, *Countably compact paratopological groups*, Semigroup Forum, **74 (3)** (2007), 423–438.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, *Topological invariants in algebraic environment*, In: Recent Progress in General Topology II, M. Hušek, J. van Mill, Eds. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, (2002), 1–58.

[3] A. V. Arhangel'skiĭ, *Remainders in compactifications and generalized metrizability properties*, Topology Appl., **150** (2005), 79–90.

[4] A. V. Arhangel'skiĭ, *Two types of remainders of topological groups*, Comment. Math. Univ. Carolin., **49 (1)** (2008), 119–126.

[5] A. V. Arhangel'skiĭ, *The Baire property in remainders of topological groups and other results*, Comment. Math. Univ. Carolin., **50 (2)** (2009), 273–279.

[6] A. V. Arhangel'skiĭ, *A study of remainders of topological groups*, Fund. Math., **203** (2009), 165–178.

[7] A. V. Arhangel'skiĭ, M. M. Choban, *On remainders of rectifiable spaces*, Topology Appl., **157** (2010), 789–799.

[8] A. V. Arhangel'skiĭ, M. M. Choban, *Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis*, Topology Proc., **37** (2011), 33–60.

[9] A. V. Arhangel'skiĭ, J. van Mill, *On topological groups with a first-countable remainder*, Topology Proc., **42** (2013), 157–163.

[10] A. V. Arhangel'skiĭ, J. van Mill, *On topological groups with a first-countable remainder III,* (2013), Preprint

[11] A. V. Arhangel'skiĭ, E. A. Reznichenko, *Paratopological and semitopological gro-ups versus topological groups*, Topology Appl., **151** (2005), 107–119.

[12] A. V. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Series in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientific, Paris–Amsterdam, 2008.

[13] T. Banakh, O. V. Ravsky, *Oscillator topologies on a paratopological group and related number invariants*, Algebraical Structures and their Applications, Kyiv: Inst. Mat. NANU, (2002), 140–153.

[14] D. Basile, A. Bella, *About remainders in compactifications of homogeneous spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **50 (4)** (2009), 607–613.

[15] H. Bennett, R. Byerly, D. Lutzer, *Compact G_δ-sets*, Topology Appl., **153** (2006), 2169–2181.

[16] B. M. Bokalo, I. I. Guran, *Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group,* Mat. Studii., **6** (1996), 39–40.

[17] A. Bouzaid, *The Ellis theorem and continuity in groups*, Topology Appl., **50** (1993), 73–80.

[18] A. Bouzaid, *Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group, Proc. Amer. Math. Soc.,* **124 (3)** (1996), 953–959.

[19] D. K. Burke, *Covering properties*, In: Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen, J.E. Vaughan Eds., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, (1984), 347–416.

[20] W. W. Comfort, *Topological groups*, In: Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen, J. E. Vaughan Eds., Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, (1984), 1143-1263.

[21] W. W. Comfort, *Problems on topological groups and other homogeneous spaces*, In: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed, Eds., Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, (1990), 313-348.

[22] W. W. Comfort, K. H. Hofmann, D. Remus, *Topological groups*, In: Recent Progress in General Topology, M. Husek and J. van Mill, Eds., Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1992.

[23] W. W. Comfort, K. A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math., **16** (1966), 483–496.

[24] R. Ellis, *A note on the continuity of the inverse,* Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 372–373.

[25] R. Ellis, *Locally compact transformation groups*, Duke Math. J., **24** (1957), 119–125.

[26] R. Engelking, *General Topology*, (revised and completeed edition), Heldermann, Berlin, 1989.

[27] P. Fletcher, W. F. Lindgren, *Some unsolved problems concerning countably compact spaces*, Rocky Mountain J. Math., **5** (1975), 95–106.

[28] P. Fletcher, W. F. Lindgren, *Quasi-uniform Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[29] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, In: Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen, J. E. Vaughan Eds., Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, (1984), 423–501.

[30] I. I. Guran, *On topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Math. Dokl., **23** (1981), 173–175.

[31] I. I. Guran, *Cardinal invariants of paratopological groups II, Internat. Algebraic Conf.,* Ukraine, Kiev-Vinnitsa, 1999 (in Ukrainian).

[32] M. Henriksen, J. Isbell, *Some properties of compactifications*, Duke Math. J., **25** (1958), 83–106.

[33] C. Hernández, M. Sanchis, M. Tkachenko, *Bounded sets in spaces and topological groups,* Topology Appl., **101** (2000), 21–43.

[34] C. Hernández, M. Tkachenko, *Subgroups of* $\mathbb{R}$*-factorizable groups,* Comment. Math. Univ. Carolin., **39** (1998), 371–378.

[35] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.

[36] R. E. Hodel, *Metrizability of topological spaces*, Pacific J. Math., **55** (1974), 441–459.

[37] E. van Kampen, *Locally bicompact Abelian groups and their character groups*, Ann. Math., **36** (1935), 448–463.

[38] M. Katetov, *A note on semiregular and nearly regular spaces,* Časopis propěstování mat. fys., **72 (3)** (1947), 97–99.

[39] J. M. Kister, *Uniform continuity and compactness in topological groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **13** (1962), 37–40.

[40] P. Li, L. Mou, S. Wang, *Notes on questions about spaces with algebraic structures*, Topology Appl., **159** (2012), 3619–3623.

[41] F. Lin, *Local properties on the remainders of the topological groups*, Kodai Math. J., **34** (2011), 505–518.

[42] F. Lin, *Topological monomorphism between free paratopological groups*, Bull. Belg. Math. Soc., Simon Stevin, **19 (3)** (2012), 507–521.

[43] F. Lin, *A note on free paratopological groups,* Topology Appl., **159** (2012), 3596–3604.

[44] 林福财, 拓扑代数与广义度量空间, 厦门大学出版社, 厦门, 2012.

[45] F. Lin, S. Lin, *About remainders in compactifications of paratopological groups*, Arxiv: 1106.3836v1 [Math. GN] 20. Jun., 2011.

[46] F. Lin, C. Liu, *On paratopological groups*, Topology Appl., **159** (2012), 2764–2773.

[47] F. Lin, R. Shen, *On rectifiable spaces and paratopological groups*, Topology Appl., **158** (2011), 597–610

[48] 林寿, 广义度量空间与映射 (第二版), 科学出版社, 北京, 2007.

[49] C. Liu, *A note on paratopological groups,* Comment. Math. Univ. Carolin., **47 (4)** (2006), 633–640.

[50] C. Liu, *Remainders in compactification of topological groups*, Topology Appl., **156** (2009), 849–854.

[51] C. Liu, *Metrizability of paratopological (semitopological) groups*, Topology Appl., **159** (2012), 1415–1420.

[52] C. Liu, S. Lin, *Generalized metric spaces with algebraic structures*, Topology Appl., **157** (2010), 1966–1974.

[53] H. Martin, *Metrizability of M-spaces*, Canad. J. Math., **4** (1973), 840–841.

[54] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math., **65** (1969), 169–192.

[55] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Math. J. Okayama Univ., **1** (1952), 99–108.

[56] L. X. Peng, Y. F. He, *A note on topological groups and their remainders*, Czech. Math. J., **62 (1)** (2012), 197–214.

[57] L. S. Pontryagin, *The theory of topological commutative groups,* Ann. Math., **35** (1934), 361–388.

[58] L. S. Pontryagin, *Continuous Groups,* Third edition (Nauka, Moscow; in Russian), 1973.

[59] N. M. Pyrch, *On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math., **63** (2005), 224–232.

[60] N. M. Pyrch, *Free paratopological groups and free products of paratopological groups,* J. Math. Sci., **174 (2)** (2011), 190–195.

[61] N. M. Pyrch, O. V. Ravsky, *On free paratopological groups*, Mat. Studii., **25** (2006), 115–125.

[62] O. V. Ravsky, *Paratopological groups I*, Mat. Studii., **16** (2001), 37–48.

[63] O. V. Ravsky, *Paratopological groups II*, Mat. Studii., **17** (2002), 93–101.

[64] O. V. Ravsky, *Pseudocompact paratopological groups that are topological,* arXiv:1003.5343v3, Apr 7, 2012; http://arxiv.org/abs/1003.5343.

[65] E. A. Reznichenko, *Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups*, Topology Appl., **59** (1994), 233–244.

[66] S. Romaguera, M. Sanchis, *Continuity of the inverse in pseudocompact paratopological groups,* Algebra Colloq., **14** (2007), 167–175.

[67] S. Romaguera, M. Sanchis, M. Tkackenko, *Free paratopological groups,* Topology Proc., **27** (2002) 1–28.

[68] M. Sanchis, M. Tkachenko, *Totally Lindelöf and totally ω-narrow paratopological groups*, Topology Appl., **155** (2007), 322–334.

[69] M. Sanchis, M. Tkachenko, $\mathbb{R}$*-factorizable paratopological groups*, Topology Appl., **157** (2010), 800–808.

[70] M. Sanchis, M. Tkachenko, *Dieudonné completion and PT-groups,* Appl. Categor. Struct., **20** (2012), 1–18.

[71] M. Sanchis, M. Tkachenko, *Feebly compact paratopological groups and real-valued functions*, Monatshefter für Mathematik, **168 (3)** (2012), 579–597.

[72] I. Sánchez, *Subgroups of products of paratopological groups*, (2013), Preprint.

[73] I. Sánchez, *Cardinal invariants and dense subgroups of paratopological groups*, (2013), Preprint.

[74] E. V. Ščepin, *On topological products, groups, and a new class of spaces more general than metric spaces,* Soviet Math. Dokl., **17** (1976), 152–155.

[75] E. V. Ščepin, *Real-valued functions and canonical sets in Tychonoff product spaces and topological groups* (in Russian), Uspekhy Matem. Nauk., **31 (6)** (1976), 17–27.

[76] 沈荣鑫, 林寿, 拓扑群中广义度量性质的一个注记, 数学年刊, **30 (A5)** (2009), 697–704.

[77] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology,* Trans. Amer. Math. Soc., **41 (3)** (1937), 375–481.

[78] M. Tkachenko, *Compactness type properties in topological groups,* Czech. Math. J., **38** (1988), 324–341.

[79] M. Tkachenko, *Subgroups, quotient groups and products of* $\mathbb{R}$*-factorizable groups*, Topology Proc., **16** (1991), 201–231.

[80] M. Tkachenko, *Zero-dimensional groups and factorization of homomorphisms with respect to weight and dimension,* Sib. Math. J., **32** (1991) 477–484.

[81] M. Tkachenko, *Factorization theorems for topological groups and their applications*, Topology Appl., **38** (1991), 21–37.

[82] M. Tkachenko, *Introduction to topological groups*, Topology Appl., **86** (1998), 179–231.

[83] M. Tkachenko, *Topological groups: between compactness and* $\aleph_0$*-boundedness*, In: Recent Progress in General Topology II, M. Hušek, J. van Mill, Eds. Amsterdam: Elsevier Science Publishers (2002), 515–544.

[84] M. Tkachenko, $\mathbb{R}$*-factorizable groups and subgroups of Lindelöf* P*-groups*, Topology Appl., **136** (2004), 135–167.

[85] M. Tkachenko, *Embedding paratopological groups into topological products*, Topology Appl., **156** (2009), 1298–1305.

[86] M. Tkachenko, *Hereditarily* $\mathbb{R}$*-factorizable groups*, Topology Appl., **157** (2010), 1548–1557.

[87] M. Tkachenko, *Paratopological and semitopological groups vs topological groups*, Recent Progress in General Topology III (J. van Mill and J. Vaughan, Eds.), Elsevier, to appear (2013).

[88] M. Tkachenko, *Axioms of separation in semitopological and paratopological groups and related functors*, (2013), Preprint.

[89] A. Weil, *Surles espaces à structure uniforme et sur la topologie générale,* Publ. Math. Univ. Strasbourg, Hermann, Paris, 1937.

[90] L. H. Xie, S. Lin, $\mathbb{R}$-*factorizability and* ω-*uniform continuity in topological groups*, Topology Appl., **159** (2012), 2711–2720.

[91] L. H. Xie, S. Lin, *Cardinal invariants and* $\mathbb{R}$-*factorizability in paratopological groups*, Topology Appl., **160** (2013), 979–990.

[92] L. H. Xie, S. Lin, *A note on the continuity of the inverse in paratopological groups*, (2013), Submitted.

作者攻读博士学位期间的工作目录

1 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, $\mathbb{R}$-*factorizability and* ω-*uniform continuity in topological groups*, Topology Appl., **159** (2012), 2711–2720. (SCI)

2 . Li-Hong Xie (谢利红), *Semi-continuous function versions of Urysohn Lemma*, Filomat., **26 (6)** (2012), 1114–1120. (SCI)

3 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *Remainders of topological and paratopological groups, Topology Appl.*, **160** (2013) 648–655. (SCI)

4 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *The Baire property in the remainders of semitopological groups*, Bull. Aust. Math. Soc., (2013), doi:10.1017/S0004972712000974. (SCI)

5 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *Cardinal invariants and* $\mathbb{R}$-*factorizability in paratopological groups*, Topology Appl., 160 (2013), 979–990. (SCI)

6 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *Submetrizability in paratopological groups,* Topology Proc., (2013), Accepted.

7 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, Mikhail Tkachenko, *Factorization properties of paratopological groups,* (2013), Submitted.

8 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *A note on the continuity of the inverse in paratopological groups*, (2013), Submitted.

9 . Li-Hong Xie (谢利红), Shou Lin, *Quasi-metrizable sapces and paratopological groups,* (2013), Finished.

10 . Fucai Lin, Chuan Liu, Li-Hong Xie (谢利红), *Remainders of semitopological groups or paratopological groups*, (2013), Submitted.

11 . Shou Lin, Fucai Lin, Li-Hong Xie (谢利红), *The extensions of topological groups about convergence phenomena*, (2013), Submitted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师 ______________

作者 ______________

二零一三年三月二十五日

致　谢

本论文是在我的导师林寿教授悉心指导下独立完成的. 在这三年的博士研究生生活和学习过程中, 林老师给于了我极大的帮助和鼓励. 林老师在生活中充满幽默和平易近人的人格魅力, 在学术上刻苦钻研的精神和对待科研的严谨态度, 尤其是在指导学生时不厌其烦, 耐心指导的育人精神深深地感染了我. 我为我拥有这样一位导师感到骄傲, 更多的是感到幸运! 在我的博士论文完成之际, 我要真诚地感谢我的导师林寿教授!

再就是要感谢四川大学给我提供了助学金, 使得我在学习过程中无基本的生活之忧. 尤其是要感谢数学学院的刘应明院士、张树果教授、张德学教授等. 他们在我的博士研究生学习过程中给于了我很多的帮助.

在这里还要特别感谢墨西哥的 M. Tkachenko 教授. 首先, 我的工作是在 M. Tkachenko 等的基础之上展开的, 其次, 我在研究过程中得到 M. Tkachenko 教授的不少指点!

其次要感谢的是闽南师范大学的李进金教授、李克典教授、林福财博士等. 我在闽南师范大学做博士论文期间, 他们给予了我很大的鼓励和帮助! 尤其是在闽南师范大学举行的各种讨论班, 让我收获颇多. 还要感谢闽南师范大的张静、张金煌、朱忠景. 有了他们的陪伴, 才让我在闽南师范大学度过了一年多美好的时光! 还要感谢闽南师范大学的方连花同学, 感谢她为我找到一些对我研究至关重要的文献资料!

还要感谢我的硕士生导师燕鹏飞教授多年对我的关心和指导!

最后要感谢我的家人, 是他们让我才有动力在学习和科研的道路上继续走下去!