漳州师範學院

理学硕士学位论文

$w\sigma$ 空间的可数闭和定理及严格可数双商映射

朱忠景

漳 州 师 范 学 院

二〇一二年五月

学校代码：10402　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：2009042004

分 类 号：　　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

漳州师范学院

理学硕士学位论文

$w\sigma$ 空间的可数闭和定理及严格可数双商映射

学位申请人：朱忠景

指 导 教 师：林寿教授

学 位 类 别：理学硕士

学 科 专 业：基础数学

授 予 单 位：漳州师范学院

答 辩 日 期：二〇一二年五月

CODE: 10402 **NO.:** 2009042004

U.D.C.: **Classified Index:**

A Dissertation for the Degree of M. Science

Countable closed sum theorems on $w\sigma$ -spaces and strictly countably bi-quotient mappings

Candidate	: Zhu Zhong-jing
Supervisor	: Prof. Lin Shou
Specialty	: Fundamental Mathematics
Academic Degree Applied for	: Master of Science
University	: Zhangzhou Normal University
Date of Oral Examination	: May, 2012

学位论文原创性声明和版权使用授权书

漳 州 师 范 学 院

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果．除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品．对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明．本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担．

作者签名：_______________ 日期：____年____月____ 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅．本人授权漳州师范学院可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文．

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书．

2、不保密□．

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：_______________ 日期：____年____月____日

导师签名：_______________ 日期：____年____月____日

摘 要

本文主要研究了三类弱第一可数空间的性质和度量空间的严格可数双商映像．在第一部分，得到了严格 Fréchet 空间可刻画为映满它们的每一序列覆盖映射是严格可数双商映射；引入了严格可达空间，获得了一个 T_1 空间 X 是严格可达空间当且仅当映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射；并指出对一个 T_2 的 k 空间 X，X 是离散空间当且仅当映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射或双商映射，这部分回答了 F．Siwiec 提出的问题：给出空间 X 的内在刻画使得映满 X 的每一商映射是双商映射．在第二部分，给出了 $w\sigma$ 空间的新刻画，建立了 $w\sigma$ 空间的和定理，并肯定地回答了林寿教授提出的问题：$w\sigma$ 空间是否保持可数闭和定理？

关键词：严格 Fréchet 空间；严格可数双商映射；序列覆盖映射；严格可达空间；严格 k' 空间；可数双商映射； $w\sigma$ 空间；可数闭和定理；

Abstract

In this paper, three kinds of weakly first countable spaces and strictly countably bi-quotient images of metric spaces are studied. In the first part, strictly Fréchet spaces are characterized as the spaces in which every sequence-covering mapping onto them is strictly countably bi-quotient; strict accessibility spaces are introduced, in which a T_1-space X is strict accessibility if and only if every quotient mapping onto X is strictly countably bi-quotient; for a T_2, k-space X every quotient mapping onto X is strictly countably bi-quotient or bi-quotient if and only if X is discrete, they partially answer the following question posed by F. Siwiec: give an intrinsic characterization of the class of spaces X such that every quotient mapping onto X is bi-quotient. In the second part, a new characterization and sum theorems of $w\sigma$-spaces are obtained. And we give an affirmative answer to the following question posed by professor S. Lin: Whether $w\sigma$-spaces satisfy the countable closed sum theorems?

Keywords: strictly Fréchet spaces； strictly countably bi-quotient mappings； sequence-covering mappings； strict accessibility spaces； strictly k'-spaces；countably bi-quotient mappings； $w\sigma$-spaces； countable closed sum theorems

目 录

第 1 章 引 言

1.1 研究现状

广义度量空间是一般拓扑学中一个重要的研究方向，其中映射方法及 g 函数方法是基本的研究工具．本文主要内容涉及特殊的映射类及由 g 函数确定的空间类．

1961 年 Alexandroff[1]在布拉格“一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系”的国际学术会议上提出了用映射来研究空间的设想，即将各式各样的拓扑空间类通过映射作为纽带将它们联系在一起，然后按空间类与映射类之间的不同而分门别类地进行研究．1966 年 Arhangel’skiĭ[2]发表了历史性文献“映射与空间”，继承并发展了 Alexandroff 的这一设想，开创了用映射研究空间的新纪元．它较系统地总结了一般拓扑学发展半个世纪以来，人们在映射理论方面取得的重要成果，更重要的是对如何借助映射来研究各式各样的空间给出了具体的问题．由此形成 Alexandroff-Arhangel’skiĭ 问题，其核心内容是用映射建立度量空间类与具有确定拓扑性质的空间类之间的关系．1992 年林寿[3]在“关于 Arhangel’skiĭ 的‘映射与空间’”中综述了该方向对于一般拓扑学及集论拓扑学产生的持续推动作用．Alexandroff 关于映射与空间的相互分类原则已成为一般拓扑学进一步研究的重要源泉，并在许多具体的空间类上实现(例如见文[4，5，6，7，8])．

依照 Alexandroff-Arhangel’skiĭ 思想，拓扑学家们通过不同的映射得到了许多空间的有趣的刻画，特别是得到了度量空间在不同映射下的映像．Fréchet 空间，可达空间和强 k' 空间等都属于弱第一可数空间类．弱第一可数空间类在广义度量空间与度量化的研究中占据着极其重要的位置，已经成为一般拓扑学中一个引人注目的研究课题．例如，

定理 1.1.1[8，定理 4.2] 对拓扑空间 X，下列条件等价：

(1) X 是 Fréchet 空间；

(2) 映满 X 的每一序列覆盖映射是伪开映射；

(3) X 是某一度量空间的伪开映像．

定理 1.1.2[8，定理 4.4] 对拓扑空间 X，下列条件等价：

(1) X 是强 Fréchet 空间；

(2) 映满 X 的每一序列覆盖映射是可数双商映射；

(3) X 是某一度量空间的可数双商映像.

定理 1.1.3[9] T_1 空间 X 是可达空间当且仅当映满 X 的每一商映射是伪开映射.

定理 1.1.4[8，定理 4.3] T_1 空间 X 是强可达空间当且仅当映满 X 的每一商映射是可数双商映射.

定理 1.1.5[8，定理 4.6] 对 T_2 空间 X，下列条件等价：

(1) X 是强 k' 空间；

(2) 映满 X 的每一紧覆盖映射是可数双商映射；

(3) X 是某一仿紧局部紧空间的可数双商映像.

1982 年，Gerlits 和 Nagy[10]定义了严格 Fréchet 空间，在较早的一些文献中，严格 Fréchet 空间也称为 w 空间[11，12]. 1985 年，朱建平[5]定义了 w 映射，并且得到了如下结果：

定理 1.1.6[5，定理 4] 对拓扑空间 X，下列条件等价：

(1) X 是严格 Fréchet 空间；

(2) X 是某一局部紧的度量空间的 w 映像；

(3) X 是某一度量空间的 w 映像.

在文[5]中，朱建平还定义了 w-k' 空间，且证明了 w-k' 空间可刻画为某一仿紧局部紧空间的 w 像.

本文将 w 映射重新命名为“严格可数双商映射”，w-k' 空间重新命名为“严格 k' 空间”.

一些弱第一可数空间类的关系及一些商映射类的关系见由图 1 和图 2，我们注意到如下几个问题：

问题 1.1.7 严格 Fréchet 空间 X 是否可以刻画为映满 X 的每一序列覆盖映射是严格可数双商映射？

问题 1.1.8 怎么样刻画拓扑空间 X 使得映满 X 的每一商映射是严格可数双

商映射？

问题 1.1.9 怎么样刻画拓扑空间 X 使得映满 X 的每一紧覆盖映射是严格可数双商映射？

除此之外，我们试图解决 1975 年 Siwiec [13]提出的下述问题：

问题 1.1.10[13，表格 22，p.32] 给出空间 X 的内在刻画使得映满 X 的每一商映射是双商映射.

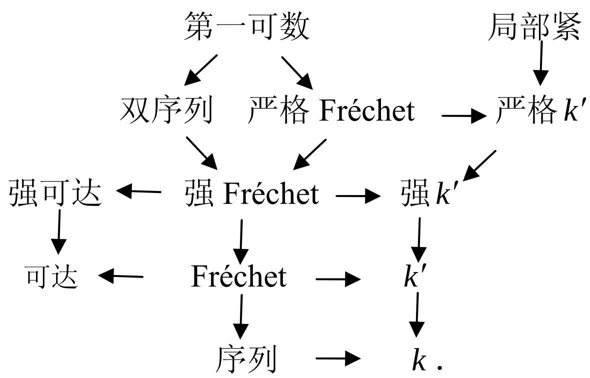

图 1

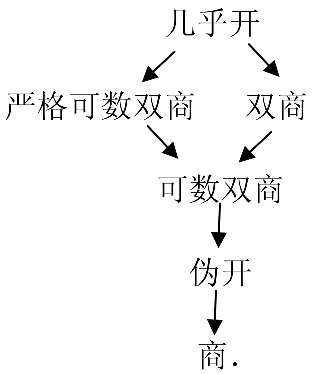

图 2

另一方面，g 函数可用以统一地刻画一大部分广义度量空间，使能更好地理解掌握它们间的联系，同时也成为产生新的广义度量空间的源泉．1977 年 Fletcher 和 Lindgren[14]利用 σ 空间的 g 函数刻画，定义了一类重要的广义度量空间——$w\sigma$ 空间．1989 年，滕辉、夏省祥、林寿[15]给出了 $w\sigma$ 空间的一个如下的等价刻画：

定理 1.1.11[15，定理 2] 对于空间 X ，下列各条件等价：

(a) X 是 $w\sigma$ 空间.

(b) 对 X 的任一子集 S，有 X 的开子集列 $\{U_n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与之对应且满足：

1) $U_{n+1}(S)\subset U_n(S)$，$S\subset U_n(S)$；

2) 若 $S\subset T\subset X$，则 $U_n(S)\subset U_n(T)$；

3) 若 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递减且交为空的闭集列，则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n(U_n(F_n))=\varnothing$.

(c) 对 X 的任一子集 S，有 X 的闭子集列 $\{F_n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与之对应且满足：

1) $F_n(S)\subset F_{n+1}(S)$，$F_n(S)\subset S$；

2) 若 $S\subset T\subset X$，则 $F_n(S)\subset F_n(T)$；

3) 若 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递增开覆盖，则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n(F_n(U_n))=X$.

β 空间也是通过 g 函数定义的一类重要的广义度量空间． 由文[15]我们可以知道，β 空间和 $w\sigma$ 空间存在类似的等价刻画，并有着很多相似的性质．我们知道 σ 空间和半层空间分别都满足可数闭和定理[16，定理 7.3.4; 5，定理 13]，即可数个闭 σ 子空间的并是 σ 空间，可数个闭的半层子空间的并仍是半层空间．1996 年，林寿[17]提出如下问题：

问题 1.1.12[17，问题 3.3] 下列性质是否满足可数闭和定理：β，$w\sigma$？

近来，彭良雪和王丽霞[18，定理 12]利用 MCM 空间证明了 β 空间满足可数闭和定理．这启发我们是否可以通过定义一个类似于 MCM 空间的新空间来解决 $w\sigma$ 空间是否保持可数闭和定理的这个问题.

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r] \arrow[d] & \text{半层} \arrow[d] & \\
w\sigma \arrow[r] & \beta \arrow[r, leftrightarrow] & MCM
\end{tikzcd}.$$

关于 β 空间和 $w\sigma$ 空间已有的一些主要相关结果如下：

定理 1.1.13[19，定理 5] X 是 β 空间当且仅当 X 是 MCM 空间.

定理 1.1.14[18，定理 12] 若 $X=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}X_m$，其中 X_m 都是 X 的闭的 MCM 子空

间，则 X 是 MCM 空间.

定理 1.1.15[15，定理 2] $w\sigma$ 空间在闭映射下的像为 $w\sigma$ 空间.

1.2 本文的主要结果

本文的第 2 章主要围绕问题 1.1.7～1.1.10 进行讨论，并给出问题 1.1.7，1.1.8 和 1.1.10 的回答.

主要结果如下：

定理 1.2.1(定理 2.1.16[①]) 对拓扑空间 X，下列条件等价：

(1) X 是严格 Fréchet 空间；

(2) 映满 X 的每一序列覆盖映射是严格可数双商映射；

(3) 映满 X 的每一集列覆盖映射是严格可数双商映射；

(4) X 是某一度量空间的严格可数双商映像[5，定理 4].

我们给出了严格可达空间的概念(见定义 2.1.1)，证明了：

定理 1.2.2(定理 2.2.6) T_1 空间 X 是严格可达空间当且仅当映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射.

定理 1.2.3(定理 2.4.3) 对 T_1 空间 X，下列条件等价：

(1) 映满 X 的每一商映射是几乎开映射；

(2) 若 X 由覆盖 $\mathscr{P}$ 所决定，则 $\{\mathrm{int}(P): P\in\mathscr{P}\}$ 覆盖 X.

定理 1.2.4(定理 2.4.4) 映满 T_1 空间 X 的每一商映射是双商映射当且仅当若 X 由覆盖 $\mathscr{P}$ 所决定，则 $\{\mathrm{int}(\cup\mathscr{P}'): \text{有限}\ \mathscr{P}'\subset\mathscr{P}\}$ 覆盖 X.

定理 1.2.5(定理 2.4.6) 对 T_2 的 k 空间 X，下列条件等价：

(1) X 是离散空间；

(2) 映满 X 的每一映射是开映射；

(3) 映满的每 X 一商映射是几乎开映射；

(4) 映满 X 的每一商映射是双商映射；

(5) 映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射.

---

① 圆括号中的部分是指在正文中相应章节的编号，下同.

定理 1.2.6(定理 2.4.8) 设 $f: X \to Y$ 是闭映射．对度量空间 X，下列条件等价：

(1) f 是几乎开映射；

(2) f 是集列覆盖映射；

(3) f 是序列覆盖映射；

(4) f 是严格可数双商映射．

第 3 章引入了强 MCM 空间，得到了 $w\sigma$ 空间的一个新刻画．

主要结果如下：

定理 1.2.7(定理 3.2.9) $w\sigma$ 空间满足 σ 局部有限闭和定理．

由此，$w\sigma$ 空间满足可数闭和定理，这肯定地回答了林寿教授[17]提出的关于 $w\sigma$ 空间的问题．

本文所有的映射都约定是连续且满的，所论空间不预先假设满足任何分离公理．对一些未说明的定义和术语读者可以参考文献[20，21]．

第 2 章　严格可数双商映射

本章讨论与可数双商映射相关的一些空间类与映射类，主要涉及三类弱第一可数空间和度量空间的严格可数双商映像. 我们首先得到了严格 Fréchet 空间可刻画为映满他们的每一序列覆盖映射是严格可数双商映射. 接着引入严格可达空间，获得了一个 T_1 空间 X 是严格可达空间当且仅当映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射的结论. 最后指出对一个 T_2 的 k 空间 X ，X 是离散空间当且仅当映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射或双商映射. 这部分回答了 F. Siwiec[13，表格 22，p.32]提出的问题.

2.1 严格 Fréchet 空间

本节，我们讨论严格 Fréchet 空间和序列覆盖映射，严格可数双商映射之间的关系.

定义 2.1.1[6] 空间 X 称为 Fréchet 空间(Fréchet space)，若 A 是空间 X 的子集，且 $x \in \overline{A}$，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \in A$.

定义 2.1.2[8] 空间 X 称为强 Fréchet 空间(strongly Fréchet space)，若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的递减的集列，且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \in A_n$.

定义 2.1.3[10] 空间 X 称为严格 Fréchet 空间(strictly Fréchet space)，若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的集列，且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \in A_n$.

定义 2.1.4[22] 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 $x \in X$ 的网(network)，如果 $x \in \cap\mathscr{P}$，并且若 U 是 x 的邻域，则存在 $P \in \mathscr{P}$，使得 $P \subset U$.

1985 年，朱建平[5]定义了 w 映射(w-mapping)，在此，把 w 映射重新命名为“严格可数双商映射”.

定义 2.1.5 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为可数双商映射[8](countably bi-quotient mapping)，如果 $y \in Y$ 且 X 的开子集的可数族 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$，则存在 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的某一有限子

集族$\mathscr{U}$，使得$f\left(\cup\mathscr{U}\right)$是$y$在$Y$中的邻域；

(2) f称为严格可数双商映射(strictly countably bi-quotient mapping)，如果$y\in Y$且X的开子集的可数族$\{U_n:n\in\mathbb{N}\}$覆盖$f^{-1}(y)$，则存在$m\in\mathbb{N}$使得$f(U_m)$是y在Y中的邻域；

(3) f称为几乎开映射[23](almost open mapping)，若对于每一$y\in Y$，存在$x\in f^{-1}(y)$使得x在X中的每一邻域关于f的像是y在Y中的邻域；

(4) f称为伪开映射[24](pseudo-open mapping)，若对于每一$y\in Y$，如果X中的开集U包含$f^{-1}(y)$，则$f(U)$是y在Y中的邻域；

(5) f称为序列覆盖映射[8] (sequence-covering mapping)，若$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是Y中收敛于$y\in Y$的序列，则对任意的$n\in\mathbb{N}$，存在点列$x_n\in f^{-1}(y_n)$和$x\in f^{-1}(y)$使得$x_n\to x$；

(6) f称为集列覆盖映射[25] (set-sequence-covering mapping)，若$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是Y中收敛于y的递减集列，则存在$x\in f^{-1}(y)$及X中的递减集列$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得$B_n\to x$，且对任意的$n\in\mathbb{N}$，且$f(B_n)=A_n$.

其中集列$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$收敛于x，记为$B_n\to x$，指的是：若U是x在X中的邻域，则存在$m\in\mathbb{N}$使得对任意的$n\geq m$，$B_n\to x$. 定义 2.1.5 的(5)中的序列覆盖映射不同于[26]定义的序列覆盖映射，Gruenhage，Michael 和 Tanaka [26]意义下的定义是：称映射$f:X\to Y$是序列覆盖映射，若对Y中每一含极限点的收敛序列S，存在X的紧子集L使得$f(L)=S$.

引理 2.1.6[5，引理 2] $f:X\to Y$是严格可数双商映射当且仅当对任意的$y\in Y$，和以y为聚点的子集列$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，即$y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，存在$x\in f^{-1}(y)$，使得$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)}$.

命题 2.1.7 严格可数双商映射是遗传的，即若 $f:X\to Y$ 是严格可数双商映射，且 Z 是 Y 的子空间，则 $f_{|f^{-1}(Z)}:f^{-1}(Z)\to Z$ 也是严格可数双商映射.

证明： 记 $X_0=f^{-1}(Z)$. 对每一 $y\in Z$ 及子空间 X_0 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的可数开集族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，存在 X 的开集族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对每一 $n\in\mathbb{N}$，$U_n=V_n\cap X_0$. 由于 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $y\in\operatorname{int}_X\left(f\left(V_m\right)\right)$. 从而

$$y\in\operatorname{int}_X\left(f\left(V_m\right)\right)\cap Z\subset f\left(V_m\right)\cap Z=f\left(V_m\cap X_0\right)=f\left(U_m\right).$$

所以 $f_{|f^{-1}(Z)}:f^{-1}(Z)\to Z$ 也是严格可数双商映射.

命题 2.1.8 设 $f:X\to Y$，若 f 限制在 X 的子空间上是到 Y 的严格可数双商映射(即存在 $X'\subset X$，使得 $f(X')=Y$，且 $f_{|X'}$ 是严格可数双商映射). 则 f 是严格可数双商映射.

证明： 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中的集列，且 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$. 因为 $f_{|X'}$ 是严格可数双商映射，由引理 2.1.6，存在 $x\in f^{-1}(y)\cap X'\subset f^{-1}(y)$，使得

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}cl_{X'}\left(f_{|X'}^{-1}\left(A_n\right)\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}\left(A_n\right)\cap X'}\cap X'$$

$$\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}\left(A_n\right)\cap X}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}\left(A_n\right)}.$$

再由引理 2.1.6，f 是严格可数双商映射.

命题 2.1.9 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$.

(1) 若 f 和 g 都是严格可数双商映射，则 $g\circ f$ 也是严格可数双商映射；

(2) 若 $g\circ f$ 是严格可数双商映射，则 g 也是严格可数双商映射.

证明： (1). 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Z 中集列，且 $z\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$. 因为 g 是严格可数双商映射，所以由引理 2.1.6，存在 $y\in g^{-1}(z)$，使得 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{g^{-1}\left(A_n\right)}$. 又由于 f 是严格可数双商映射，同样由引理 2.1.6，存在

$$x\in f^{-1}(y)\subset f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)=\left(g\circ f\right)^{-1}(z),$$

使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\left(g\circ f\right)^{-1}\left(A_n\right)}$. 从而再由引理 2.1.6，$g\circ f$ 是严格可数双商映射.

(2). 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Z 中集列，且 $z\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$. 因为 $g\circ f$ 是严格可数双商映射，所以由引理 2.1.6，存在 $x\in\left(g\circ f\right)^{-1}(z)=f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)$，使得

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\left(g\circ f\right)^{-1}\left(A_n\right)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right)}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}\overline{\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right)}.$$

于是 $y=f(x)\in f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}\overline{\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right)}\right)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f\,f^{-1}\overline{\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{g^{-1}\left(A_n\right)}$. 从而再由引理 2.1.6，$g$ 是严格可数双商映射.

引理 2.1.10[27，定理 3.2] 设 X 是严格 Fréchet 空间，且 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的集列. 若 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 满足：对每一 $n\in\mathbb{N}$，$\{m\in\mathbb{N}:b_m\in A_n\}$ 是无限集.

引理 2.1.11 设 $f:X\to Y$ 是序列覆盖映射. 若 Y 是严格 Fréchet 空间，则 f 是严格可数双商映射.

证明：设 $y\in Y$ 和 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$，其中对任意的 $n\in\mathbb{N}$，U_n 是 X 的开集. 若对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$y\notin\operatorname{int}\left(f\left(U_n\right)\right)$，则 $y\in\overline{Y-f\left(U_n\right)}$. 由 Y 的严格 Fréchet 性质及引理 2.1.10，存在 Y 中收敛于 y 的序列 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得对每一 $n\in\mathbb{N}$，$\{i\in\mathbb{N}:y_i\in Y-f\left(U_n\right)\}$ 是无限集. 因为 f 是序列覆盖映射，存在 X 中的序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $x\in f^{-1}(y)$ 使得每一 $x_i\in f^{-1}\left(y_i\right)$ 且 $x_i\to x$. 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in U_k$，从而存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得对每一 $i\geq i_0$，$x_i\in U_k$，于是 $y_i\in f\left(U_k\right)$，矛盾. 所以 f 是严格可数双商映射.

引理 2.1.12[5] 严格可数双商映射保持严格 Fréchet 空间.

引理 2.1.13[25] 每一集列覆盖映射是序列覆盖映射.

引理 2.1.14[28，定理 4.4] 对任一空间 Y，存在度量空间 X 及映射 $f:X\to Y$ 具有下述性质：如果 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是某点 $y\in Y$ 的递减的网，则存在 $x\in f^{-1}(y)$ 及 x 在

X 中递减的邻域基$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对任意的$n\in\mathbb{N}$， $f(D_n)=C_n$.

引理 2.1.15[25，28] 每一空间都是某一度量空间的集列覆盖映像.

证明：若每一空间要求T_1时，该引理在文[25，命题 3.3]中得到了证明．下面我们证明该引理不需要任何的分离性质.

设$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是Y中收敛于y的递减集列，则$\{A_n\cup\{y\}\}_{n\in\mathbb{N}}$是$y$在$Y$中递减的网．由引理 2.1.14，存在$x\in f^{-1}(y)$及$x$在$X$中递减的邻域基$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得对任意的$n\in\mathbb{N}$， $f(D_n)=A_n\cup\{y\}$ ．不妨设对任意的$n\in\mathbb{N}$， $y\notin A_n$ ，令$B_n=D_n-f^{-1}(y)$．则$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是X中收敛于x的递减集列，且对任意的$n\in\mathbb{N}$，$f(B_n)=A_n$．故$f:X\to Y$是集列覆盖映射.

定理 2.1.16 对拓扑空间X，下列条件等价：

(1) X是严格 Fréchet 空间；

(2) 映满X的每一序列覆盖映射是严格可数双商映射；

(3) 映满X的每一集列覆盖映射是严格可数双商映射；

(4) X是某一度量空间的严格可数双商映像[5，定理 4].

证明：由引理 2.1.11，2.1.12 和 2.1.13 得(4)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(4)．设空间X满足条件(3)．由引理 2.1.15，存在度量空间M和集列覆盖映射$f:M\to X$，则由条件(3)知f是严格可数双商映射.

第一可数空间上的几乎开映射是序列覆盖映射[8]．我们提出下述两相关问题：

问题 2.1.17 度量空间上的严格可数双商映射是否序列覆盖映射？

问题 2.1.18 严格 Fréchet 空间上的几乎开映射是否序列覆盖映射？

2.2 严格可达空间

受定理 1.1.3 和定理 1.1.4 的启发，我们对如下问题感兴趣：拓扑空间X，在什么条件下满足映满X的每一商映射是严格可数双商映射？

为了研究这个问题，在这一部分中我们引入严格可达空间.

定义 2.2.1[9] 空间 X 称为可达空间(accessibility space)，如果 A 是空间 X 的子集且点 x 是 A 的聚点，则存在 X 的闭子集 C 使得 x 是 C 的聚点，但 x 不是 $C-A$ 的聚点.

定义 2.2.2[8] 空间 X 称为强可达空间(strong accessibility space)，如果 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的递减的集列且对任意的 $n\in\mathbb{N}$，点 x 是 A_n 的聚点，则存在 X 的闭子集 C 使得 x 是 C 的聚点，但是对于每一 $n\in\mathbb{N}$，x 不是 $C-A_n$ 的聚点.

定义 2.2.3 空间 X 称为严格可达空间(strict accessibility space)，如果 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的集列且对任意的 $n\in\mathbb{N}$，点 x 是 A_n 的聚点，则存在 X 的闭子集 C 使得 x 是 C 的聚点，但是对于每一 $n\in\mathbb{N}$，x 不是 $C-A_n$ 的聚点.

显然，严格可达空间 $\Rightarrow$ 强可达空间.

定义 2.2.4[21] 空间 X 称为 k 空间(k-space)，若 X 关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑，即空间 X 是 k 空间，若 $A\subset X$，使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\bigcap A$ 是 K 的闭集，则 A 是 X 的闭集.

定义 2.2.5[21] 设映射 $f:X\to Y$. f 称为商映射(quotient mapping)，若 $U\subset Y$ 且 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集，则 U 是 Y 的开子集.

定理 2.2.6 T_1 空间 Y 是严格可达空间当且仅当映满 Y 的每一商映射是严格可数双商映射.

证明：证明类似于 Whyburn[9]关于可达空间及 Siwiec[8，定理 4.3]关于强可达空间的情形.

必要性. 设 Y 是严格可达空间且 $f:X\to Y$ 是商映射. 如果 f 不是严格可数双商映射，则存在 $y\in Y$ 及 X 的开集列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$ 且对每一 $n\in\mathbb{N}$，$y\in f(U_n)-\mathrm{int}\left(f(U_n)\right)$. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $A_n=Y-f(U_n)$，则 y 是 A_n 的聚点. 由 Y 的严格可达性，存在 Y 的闭子集 C 使得 y 是 C 的聚点，但是对于每一 $n\in\mathbb{N}$，y 不是 $C-A_n=C\cap f(U_n)$ 的聚点. 于是存在 y 在 Y 中的开邻域 V_n 使

得 $V_n \cap C \cap f(U_n)=\{y\}$，因此 $C\cap\overline{f(U_n)}-\{y\}=C\cap\overline{f(U_n)}-V_n$ 是 Y 的闭子集．令 $D=C-\{y\}$，则 D 不是 Y 的闭集．由于 f 是商映射，所以 $f^{-1}(D)$ 不是 X 的闭集，于是存在 $x\in\overline{f^{-1}(D)}-f^{-1}(D)$，从而 $f(x)\in\overline{D}-D=\{y\}$，即 $x\in f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$，因此存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in U_m$．令 $G=U_m-f^{-1}(D)$，则

$$G=U_m-f^{-1}(D)=U_m-f^{-1}\left(C\cap\overline{f(U_m)}-\{y\}\right)$$

是 X 的开子集，故 G 是 x 在 X 中的邻域，所以 $G\cap f^{-1}(D)\neq\varnothing$，矛盾．故 f 是严格可数双商映射．

充分性．设 T_1 空间 Y 不是严格可达空间，则存在 Y 中的点 y 及子集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对任一的 $n\in\mathbb{N}$，y 是 A_n 的聚点；如果 C 是 Y 的闭集且 y 是 C 的聚点，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 y 是 $C-A_n$ 的聚点．

对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，不妨设 $y\notin A_n$．令 $B_n=Y-\left(A_n\cup\{y\}\right)$，则 $Y=A_n\cup B_n\cup\{y\}$．定义

$$X_n=\left(\left(Y-\{y\}\right)\times\{0\}\times\{n\}\right)\cup\left(\left(B_n-\{y\}\right)\times\{1\}\times\{n\}\right).$$

再令 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$，赋予 X 积空间 $Y\times\{0,1\}\times\mathbb{N}$ 的子空间拓扑．再定义 $f:X\to Y$ 为投影映射，即对任一的 $(x,t,n)\in X$，$f(x,t,n)=x$．则 f 是满映射．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $U_n=\left(B_n\cup\{y\}\right)\times\{1\}\times\{n\}$，则 U_n 是 X 中的开集，且 $B_n\cup\{y\}=f(U_n)$ 不是 y 在 Y 中的邻域．由于 $f^{-1}(y)=\{(y,1,n):n\in\mathbb{N}\}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$，所以 f 不是严格可数双商映射．下证 f 是商映射．让 $E\subset Y$，若 $f^{-1}(E)$ 是 X 中的闭集，要证明 E 闭于 Y．由于 X 的子空间 $\left(Y-\{y\}\right)\times\{0\}\times\{0\}$ 同胚于 Y 的子空间 $Y-\{y\}$，这又只需证：若 $y\notin E$，则 $y\notin\overline{E}$．由于 $f^{-1}(E)\cap\left(\left(Y-\{y\}\right)\times\{0\}\times\{0\}\right)$ 是 X 中的闭集，于是 $E-\{y\}=E$ 是 $Y-\{y\}$ 的闭集，从而 $E=\overline{E}-\{y\}$，即 $\overline{E}\subset E\cup\{y\}$．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，因为 $(y,1,n)\notin f^{-1}(E)$ 且 $f^{-1}(E)$ 在 X 中闭，所以存在 y 在 Y 中的开邻域 V_n 使得 $V_n\cap B_n\cap E=\varnothing$，于是 $E\cap V_n\subset A_n$．让 $C=\overline{E}\cap\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n}$，则 C 是 Y 中的闭

集．对于每一$n\in\mathbb{N}$，$C\cap V_n=\overline{E}\cap V_n\subset A_n\cup\{y\}$，于是$y$不是$C-A_n$的聚点．从而，$y$不是$C$的聚点，因此$y\notin\overline{E}$．故$f$是商映射．

首先，回忆一下聚点的概念．

设X是拓扑空间，记$A^\alpha=\{x\in X:x$ 是 A的聚点$\}$．点$x\in X$是X的子集族$\mathscr{F}$的聚点，若对每一$F\in\mathscr{F}$，$x\in F^\alpha$．

定理 2.2.7 对强可达空间X，下列条件等价：

(1) X是严格可达空间；

(2) 若x是X中的集列$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的聚点，则x也是$\{\bigcap_{n\le m}A_n\}_{m\in\mathbb{N}}$的聚点；

(3) 对任意的A，$B\subset X$，$(A\cap B)^\alpha=A^\alpha\cap B^\alpha$．

证明：(1)$\Rightarrow$(2)．设X中的集列$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有聚点x．因为X是严格可达空间，则存在X的闭子集C使得x是C的聚点，但对任一的$n\in\mathbb{N}$，x不是$C-A_n$的聚点．对每一$m\in\mathbb{N}$和x在X中的开邻域U，若$n\le m$，则在X中存在x的开邻域V_n使得$V_n\cap(C-A_n)\subset\{x\}$，即$V_n\cap C\subset A_n\cup\{x\}$．令$V=\bigcap_{n\le m}V_n$，则$V\cap C\subset\bigcap_{n\le m}A_n\cup\{x\}$，进而$U\cap V\cap C-\{x\}\subset U\cap(\bigcap_{n\le m}A_n)$．因为$x$是$C$的聚点，则$x$是$\bigcap_{n\le m}A_n$的聚点．

(2)$\Rightarrow$(3)．显然成立．

(3)$\Rightarrow$(1)．若X中的集列$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有聚点$x\in X$，则由(3)，x也是$\{\bigcap_{n\le m}A_n\}_{m\in\mathbb{N}}$的聚点．由$X$的强可达性，存在$X$的闭集$C$，使得$x$是$C$的聚点，但对任一的$m\in\mathbb{N}$，$x$不是$C-\bigcap_{n\le m}A_n$的聚点．从而对每一$n\in\mathbb{N}$，$x$不是$C-A_n$的聚点．因此，$X$是严格可达空间．

推论 2.2.8 严格可达空间是遗传的．

证明：由文[8]，强可达空间是遗传的，而定理 2.2.7 的条件(3)也是遗传的，故由定理 2.2.7，严格可达空间是遗传的．

引理 2.2.9[29，定理 11] 设X是T_2空间．则X是 Fréchet 空间当且仅当X是

k 空间且映满 X 的每一商映射是伪开映射.

推论 2.2.10 若 X 是 T_2 的严格可达空间，则 X 的每个紧子集是有限集.

证明： 设 X 是 T_2 的严格可达空间．若 X 有一个无限的紧子集 K，由推论 2.2.8，引理 2.2.9 和定理 2.2.6，K 是 Fréchet 空间，则 K 存在一个非平凡的收敛序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$．令 $A=\{x_{2k}:k\in\mathbb{N}\}$，$B=\{x_{2k+1}:k\in\mathbb{N}\}$，则 $(A\cap B)^\alpha\neq A^\alpha\cap B^\alpha$，这与定理 2.2.7 矛盾．所以 X 的每个紧子集是有限集.

推论 2.2.11 严格可达空间中不存在非平凡的收敛序列.

由文[8]，T_2 的强 Fréchet 空间是强可达空间．很自然的会以为 T_2 的严格 Fréchet 空间也是严格可达空间，但这是不正确的. 因为由推论 2.2.11，实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ 就不是严格可达空间.

例 2.2.12 强可达空间 $\not\Rightarrow$ 严格可达空间. 严格 Fréchet 空间 $\not\Rightarrow$ 严格可达空间.

实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ 是第一可数空间，从而既是严格 Fréchet 空间又是强可达空间，但由推论 2.2.11，$\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ 不是严格可达空间.

2.3 严格 k' 空间

1985 年，朱建平[5]定义了 w-k' 空间(w-k'-space)．在此，把 w-k' 空间重新命名为“严格 k' 空间”.

定义 2.3.1[30] 空间 X 称为 k' 空间(k'-space)，若 A 是 X 中的子集且 $x\in\overline{A}$，则存在 X 的紧子集 K，使得 $x\in\overline{K\cap A}$.

定义 2.3.2[8] 空间 X 称为强 k' 空间(strongly k'-space)，若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的递减集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，则存在 X 的紧子集 K，使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{K\cap A_n}$.

定义 2.3.3 空间 X 称为严格 k' 空间(strictly k'-space)，若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，则存在 X 的紧子集 K，使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{K\cap A_n}$.

定义 2.3.4[31] 设映射 $f:X\to Y$． f 称为紧覆盖映射(compact-covering mapping)，若 Y 的任一紧子集是 X 中某一紧子集在 f 下的像．

引理 2.3.5[5] 严格可数双商映射保持严格 k' 空间．

引理 2.3.6[32] 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射．若 Y 是 T_2 的 k 空间，则 f 是商映射．

引理 2.3.7[5，定理 8] 对空间 Y，下列条件等价：

(1) 空间 Y 是严格 k' 空间；

(2) Y 是某一仿紧局部紧空间的严格可数双商映像．

引理 2.3.8 若映满空间 X 的每一紧覆盖映射是严格可数双商映射，则 X 是严格 k' 空间．

证明：设空间 X 满足映满 X 的每一紧覆盖映射是严格可数双商，令 $\mathscr{K}$ 是 X 的全体非空紧子集组成的集族．设 M 是 X 的覆盖 $\mathscr{K}$ 的拓扑和，f 是从 M 到 X 上的自然映射．则 M 是仿紧局部紧空间，f 是紧覆盖映射．于是 f 是严格可数双商映射，因为局部紧空间是严格 k' 空间，所以由引理 2.3.5，X 是严格 k' 空间．

定义 2.3.9 空间 X 称为具有点 G_δ 性质，若对任意的 $x\in X$，$\{x\}$ 是 G_δ 集．

定理 2.3.10 设 T_2 空间 X 具有点 G_δ 性质，则 X 是严格 k' 空间当且仅当 X 是严格 Fréchet 空间．

证明：充分性．设 X 是严格 Fréchet 空间，由定理 1.1.6，X 是某一局部紧的度量空间的严格可数双商映像．从而是某一仿紧局部紧空间的严格可数双商映像．由引理 2.3.7，X 是严格 k' 空间．

必要性．若 X 是严格 k' 空间，且具有点 G_δ 性质．设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，因为 X 是严格 k' 空间，所以存在 X 的紧子集 K，使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{K\cap A_n}$．易证具有点 G_δ 性质的紧空间是第一可数，于是 K 第一可数，从而 K 是严格 Fréchet 空间．进而对任一的 $n\in\mathbb{N}$，存在 $x_n\in K\cap A_n$，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

在 K 中收敛于 x，从而对任一的 $n\in\mathbb{N}$，存在 $x_n\in A_n$，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中收敛于 x．故 X 是严格 Fréchet 空间．

定理 2.3.11 若 T_2 空间 X 是严格可达空间且是 k 空间，则 X 是严格 k' 空间．

证明：若 T_2 空间 X 是严格可达空间且是 k 空间．设 f 是映满 X 的任一紧覆盖映射．因为 X 是 k 空间，所以由引理 2.3.6，f 是商映射．又由于 X 是严格可达空间，由定理 2.2.6，f 是严格可数双商映射．从而由引理 2.3.8，X 是严格 k' 空间．

例 2.3.12 严格可达空间 $\nRightarrow$ k 空间．

取定 $p\in\beta\mathbb{N}-\mathbb{N}$，令 $X=\mathbb{N}\cup\{p\}$．赋 X 予 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑．令 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤，对每一 $U\in\mathscr{U}$，$U\cup\{p\}$ 为 p 的邻域．则 X 不是 k 空间．事实上，X 的每一紧子集都是有限集，从而对 X 的每一紧子集 K，$\mathbb{N}\cap K$ 是 K 的闭集，但 $\mathbb{N}$ 不是 X 的闭集．但 X 是严格可达空间．事实上，如果 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的集列且对任意的 $n\in\mathbb{N}$，点 x 是 A_n 的聚点，则 $x=p$．而 p 是 A_n 的聚点 $\Leftrightarrow p\in\overline{A_n-\{p\}}$，于是对每一 $U\in\mathscr{U}$，$(U\cup\{p\})\cap(A_n-\{p\})\neq\varnothing$，即对每一 $U\in\mathscr{U}$，$U\cap A_n\neq\varnothing$．又因为 $\mathscr{U}$ 是自由超滤，所以由[16，定理 1.4.2]，$A_n\in\mathscr{U}$．取 $C=X$，则显然 p 是 C 的聚点，但对每一 $n\in\mathbb{N}$，p 不是 $C-A_n$ 的聚点．

空间 X 称为序列空间[21]，若 A 是 X 的闭集当且仅当对 A 中的点组成的收敛序列，其极限在 A 中．

例 2.3.13 严格 k' 空间 $\nRightarrow$ 可达空间、序列空间．

设 $X=[0,\omega]$，其中 ω 是第一个不可数序数，X 赋予序拓扑空间．则 X 是紧空间，从而是严格 k'，但 X 不是序列空间且不是可达空间[8，例 1.7]．

由引理 2.1.11，自然问引理 2.3.8 的逆命题是否成立，即每一到严格 k' 空间上的紧覆盖映射是否严格可数双商映射？但这是不对的．

映射 $f:X\to Y$ 称为完备映射[34](perfect mapping)，如果 f 是闭映射，且对每一 $y\in Y$， $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

例 2.3.14 映满严格 k' 空间的紧覆盖映射未必是严格可数双商映射.

设 $X=\left(\{0\}\cup\left\{\frac{1}{2n}:n\in\mathbb{N}\right\}\right)\oplus\left(\{0\}\cup\left\{\frac{1}{2n-1}:n\in\mathbb{N}\right\}\right)$， $Y=S_1$， 其中 $Y=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. X 和 Y 都赋予实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑，则 X 和 Y 都是紧度量空间，于是 Y 是严格 k' 空间. 令 $f:X\to Y$ 是显然映射，则 f 是完备映射，从而 f 是紧覆盖映射. 但 f 不是严格可数双商映射.

问题 2.3.15 若 X 是 T_2 的严格 k' 空间，则映满 X 的每一紧覆盖且序列覆盖映射是否严格可数双商映射？

由定理 1.1.5，上述紧覆盖映射是可数双商映射.

问题 2.3.16 强 k' 空间是否严格 k' 空间？

2.4 相关映射

1975 年，Siwiec[13，表格 22，p.32]提出如下问题：给出空间 X 的内在刻画使得映满 X 的每一商映射是双商映射. 在这一部分中，我们将给出这一问题的回答，并讨论严格可数双商映射与一些相关映射之间的关系.

先回忆一些基本概念.

定义 2.4.1 设映射 $f:X\to Y$.

(1) f 称为双商映射[33](bi-quotient mapping)，如果对任一的 $y\in Y$ 和 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开子集族 $\mathscr{U}$，存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'$ 使得 $y\in\operatorname{int}\left(f\left(\cup\mathscr{U}'\right)\right)$；

(2) f 称为开映射[24](open mapping)，如果 V 是 X 的开子集，则 $f(V)$ 是 Y 的开子集；

(3) f 称为闭映射[24](closed mapping)，如果 F 是 X 的闭子集，则 $f(F)$ 是 Y 的闭子集；

（4） f 称为边缘紧映射[34](boundary-compact mapping)，如果对每一 $y \in Y$，$\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集；

（5） f 称为边缘 Lindelöf 映射[34](boundary-Lindelöf mapping)，如果对每一 $y \in Y$，$\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集；

朱建平[35]证明了映射 $f: X \to Y$ 是几乎开映射等价于对任一的 $y \in Y$ 和 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开子集族 $\mathscr{U}$，存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $y \in \operatorname{int}(f(U))$.

现在回忆下接触点的概念.

点 $x \in X$ 称为 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 的接触点，若对任一的 $F \in \mathscr{F}$ 有 $x \in \overline{F}$.

定义 2.4.2[36] 空间 X 称为双序列空间(bi-sequential space)，若 X 中的滤基 $\mathscr{F}$ 具有接触点 $x \in X$，则存在 X 的递减集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每一 $n \in \mathbb{N}$，每一 $F \in \mathscr{F}$ 有 $A_n \cap F \neq \varnothing$ 且 $A_n \to x$.

朱建平[35]还证明了空间 X 是第一可数空间等价于若 X 中的子集族 $\mathscr{F}$ 具有接触点 $x \in X$，则存在 X 的递减集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每一 $n \in \mathbb{N}$，每一 $F \in \mathscr{F}$ 有 $A_n \cap F \neq \varnothing$ 且 $A_n \to x$.

先回忆由某一覆盖所决定的空间的概念.

空间 X 称为由覆盖 $\mathscr{P}$ 所决定[26](determined by a cover $\mathscr{P}$)，或称覆盖 $\mathscr{P}$ 决定空间 X，如果 X 的子集 U 满足：U 是 X 的开集(闭集)当且仅当对任意的 $P \in \mathscr{P}$，$U \cap P$ 是 P 的开集(闭集).

定理 2.4.3 对 T_1 空间 X，下列条件等价：

(1) 映满 X 的每一商映射是几乎开映射；

(2) 若 X 由覆盖 $\mathscr{P}$ 所决定，则 $\{\operatorname{int}(P): P \in \mathscr{P}\}$ 覆盖 X.

证明：(1)$\Rightarrow$(2). 对 T_1 空间 X，假设映满 X 的每一商映射是几乎开映射. 若 X 由覆盖 $\mathscr{P}$ 所决定，令 $Z = \oplus\mathscr{P}$，$f: Z \to X$ 是自然映射. 则由[26，引理 1.8]，f 是商映射. 从而 f 是几乎开映射. 对任一的 $x \in X$，若 U 是 z_x 在 Z 中的邻域，

则存在$z_x \in f^{-1}(x)$使得$f(U)$是x在X中的邻域．选取$P \in \mathscr{P}$使得$z_x \in P$，则P是Z中的开集，从而$x \in \operatorname{int}(f(P)) = \operatorname{int}(P)$．故$\{\operatorname{int}(P): P \in \mathscr{P}\}$覆盖$X$．

(2)$\Rightarrow$(1)．设$f: Z \to X$是商映射，且X满足条件(2)．如果f不是几乎开映射，则存在$x_0 \in X$使得对每一$z \in f^{-1}(x_0)$，存在z在Z中的开邻域U_z使得$f(U_z)$不是x_0在X中的邻域．令$\mathscr{U} = \{U_z: z \in f^{-1}(x_0)\} \cup \{Z - f^{-1}(x_0)\}$．则$\mathscr{U}$是$Z$的开覆盖．于是$Z$由覆盖$\mathscr{U}$所决定．由[26，引理 1.7]，$f$是商映射，则$X$由$f(\mathscr{U})$所决定．由条件(2)，$\{\operatorname{int}(P): P \in f(\mathscr{U})\}$覆盖$X$．从而存在$z \in f^{-1}(x_0)$使得$x_0 \in \operatorname{int}(f(U_z))$，矛盾．故$f$是几乎开映射．

利用定理 2.4.3 类似的方法，我们对 Siwiec[13，表格 22，p.32]提出的问题做出如下回答：

定理 2.4.4 映满T_1空间X的每一商映射是双商映射当且仅当若X由覆盖$\mathscr{P}$所决定，则$\{\operatorname{int}(\cup \mathscr{P}'): 有限 \mathscr{P}' \subset \mathscr{P}\}$覆盖$X$．

引理 2.4.5 任一空间X是某一度量空间M的序列覆盖映像，其中M是某一收敛序列的拓扑和．

证明：对任意空间X，令$\{S_\alpha: \alpha \in A\}$是$X$中全体包含极限点的收敛序列的族．对每一$\alpha \in A$，让$S_\alpha = \{x_\alpha\} \cup \{x_{\alpha,n}: n \in \mathbb{N}\}$，其中$x_{\alpha,n} \to x_\alpha$．重新赋集$S_\alpha$予下述拓扑$S'_\alpha$：点$x_\alpha$的邻域具有有限余拓扑，其余点是孤立点．则$S'_\alpha$是紧度量空间，$S'_\alpha$上的拓扑细于$S_\alpha$上的诱导拓扑．作拓扑和$\oplus\{(S_\alpha, S'_\alpha): \alpha \in A\}$，定义映射$f: M \to X$使得对任意的$\alpha \in A$，$f_{|S'_\alpha}: S'_\alpha \to S_\alpha$是同胚映射．则$M$是收敛序列的拓扑和，且是可度量化空间，显然映射$f$是连续的满射．从而易知$f$是序列覆盖映射．

定理 2.4.6 对T_2的k空间X，下列条件等价：

(1) X是离散空间；

(2) 映满 X 的每一映射是开映射；

(3) 映满 X 的每一商映射是几乎开映射；

(4) 映满 X 的每一商映射是双商映射；

(5) 映满 X 的每一商映射是严格可数双商映射．

证明：(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)，(5)．显然成立．

(5)$\Rightarrow$(1)．由定理 2.2.6 和推论 2.2.10 可得．

下面证明(4)$\Rightarrow$(1)．

设映满 X 的每一商映射是双商．则由引理 3.2.9，X 是 Fréchet 空间．于是由引理 2.4.5，存在含极限点的收敛序列的拓扑和构造的度量空间 $M=\oplus\mathscr{S}$ 和序列覆盖映射 $f:M\to X$．因为 X 是序列空间，所以 f 是商映射[8，命题 2.1.12]，从而 f 是双商映射．对任意的 $x\in X$，由于 M 的开子集族 $\mathscr{S}$ 覆盖 $f^{-1}(x)$，且 f 是双商映射，则存在 X 中有限个含极限点的收敛序列之并集 C 使得 C 是 x 的邻域．如果 x 不是 X 的孤立点，因为 X 是 T_2 空间，不妨设 $C=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的开集，其中 $x_n\to x$ 且 x_n，x 均互不相同．则 $X=C\oplus(X-C)$．令 $\psi(\mathbb{N})=\mathscr{A}\cup\mathbb{N}$ 为 Isbell-Mrówka 空间[37，例 4.4]，再令 $Y=\psi(\mathbb{N})\oplus(X-C)$．定义映射 $f:Y\to X$ 为

$$f(y)=\begin{cases}x,\ y\in\mathscr{A}\\ x_n,\ y=n\in\mathbb{N}\\ y,\ y\in X-C.\end{cases}$$

则 f 是闭映射[20，例 2.6.6]，从而 f 是商映射，但由[38，定理 2.2]，f 不是双商映射．矛盾．故 X 是离散空间．

引理 2.4.7 设 $f:X\to Y$ 是严格可数双商映射．若 f 是边缘 Lindelöf 映射且 Y 是 T_1 空间，则 f 是几乎开映射．

证明：假设 f 不是几乎开映射，则存在 $y\in Y$ 使得对任意的 $x\in f^{-1}(y)$，存在 x 在 X 中的开邻域 U_x 满足 $y\notin\operatorname{int}(f(U_x))$．则 y 不是 Y 的孤立点．因为 f 是

边缘 Lindelöf 映射，所以$\partial f^{-1}(y)$是X的 Lindelöf 子集．从而存在$f^{-1}(y)$的可数子集$\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$使得$\partial f^{-1}(y) \subset \bigcup\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$．于是

$$f^{-1}(y) \subset \operatorname{int}\left(f^{-1}(y)\right) \cup \left(\bigcup\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}\right).$$

由于f是严格可数双商映射，从而存在$i \in \mathbb{N}$，使得$y \in \operatorname{int}\left(f\left(U_{x_i}\right)\right)$，矛盾．因而，$f$是几乎开映射．

定理 2.4.8 设$f : X \to Y$是闭映射．对度量空间X，下列条件等价：

(1) f是几乎开映射；

(2) f是集列覆盖映射；

(3) f是序列覆盖映射；

(4) f是严格可数双商映射．

证明：(1)$\Rightarrow$(2)．由[25，命题 2.4]可知成立．

(2)$\Rightarrow$(3)．由引理 2.1.13 可得．

(3)$\Rightarrow$(4)．设f是序列覆盖映射．由[39，40]，序列覆盖的闭映射保持可度量化空间，从而Y是可度量化空间．于是根据引理 2.1.11，f是严格可数双商映射．

(4)$\Rightarrow$(1)．设f是严格可数双商映射，则f是可数双商映射．从而根据[36，推论 9.10]，f是边缘紧映射．于是由引理 2.4.7，f是几乎开映射．

注 2.4.9 (1) 度量空间上的完备映射未必是严格可数双商映射．因为由[8，例 2.6]，存在一个映射$f : X \to Y$是完备映射但不是序列覆盖映射(此时X和Y都要求是紧度量空间)．从而根据定理 2.4.8，f不是严格可数双商映射．

(2) 度量空间上几乎开的闭映射未必是开映射．例如，令$Y = \{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$，其中$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$是收敛于$y$的非平凡的序列．再令$X = \{y\} \oplus Y$，定义$f : X \to Y$是自然映射．则$X$是可度量化空间，$f$是几乎开

的闭映射. 但 f 不是开映射.

问题 2.4.10 给出空间 X 的内在刻画，使得映满 X 的每一序列覆盖映射是集列覆盖映射？

第 3 章 $w\sigma$ 空间的和定理

$w\sigma$ 空间是一类重要的广义度量空间．本节证明了 $w\sigma$ 空间满足 σ 局部有限闭和定理，并肯定地回答了 1996 年林寿[17，问题 3.3]提出的 $w\sigma$ 空间是否保持可数闭和定理的这个问题．

3.1 基本定义

定义 3.1.1 设 (X,τ) 是拓扑空间，函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数[41](g-function)，如果对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{N}$，有

(1) $x\in g\left(n,x\right)$；

(2) $g\left(n+1,x\right)\subset g\left(n,x\right)$．

如未特别说明，g 函数均用 g 表示．若 $g\left(n,x\right)$ 是 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数，对每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $F\subset X$，为书写的方便起见，记 $g(n,F)=\cup\{g(n,x):x\in F\}$．

定义 3.1.2 拓扑空间 (X,τ) 称为 $w\sigma$ 空间[14]($w\sigma$-space)，若存在 g 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 满足：对每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $p\in X$，若 $p\in g(n,y_n)$，$y_n\in g(n,x_n)$ 则 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点．这种 g 函数简称为 X 的 $w\sigma$ 函数．

定义 3.1.3 拓扑空间 (X,τ) 称为 β 空间[42](β-space)，若存在 g 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 满足：对每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $p\in X$，若 $p\in g\left(n,x_n\right)$，则 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点．这种 g 函数简称为 X 的 β 函数．

若 X 是拓扑空间，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中两集列，如果对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有 $A_n\subset B_n$，则记为 $\{A_n\}\preceq\{B_n\}$．

定义 3.1.4[19] 设 X 是拓扑空间．如果存在算子 U，对 X 的任一交为空集的递减闭集列 $\{D_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，都对应一开集列 $U\left(\{D_j\}\right)=\left\{U\left(n,\{D_j\}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足

(1) 对每一 $n\in\mathbb{N}$，有 $D_n\subset U\left(n,\{D_j\}\right)$；

(2) 如果 $\{D_n\}\preceq\{E_n\}$，则 $U\left(\{D_j\}\right)\preceq U\left(\{E_j\}\right)$；

(3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)=\varnothing$.

则称 X 为 MCM 空间(MCM -space)，称 U 为 X 的 MCM 算子(MCM -operator).

定义 3.1.5 设 X 是拓扑空间．如果存在算子 U，对 X 的任一递减集列 $\left\{D_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，都对应一递减的开集列 $U\left(\left\{D_j\right\}\right)=\left\{U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足

(1) 对每一 $n\in\mathbb{N}$，有 $D_n\subset U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$；

(2) 如果 $\{D_n\}\preceq\{E_n\}$，则 $U\left(\left\{D_j\right\}\right)\preceq U\left(\left\{E_j\right\}\right)$；

(3) 对 X 的任一交为空的递减闭集列 $\left\{F_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$， $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)=\varnothing$.

则称 X 为强 MCM 空间(strong MCM -space)，称 U 为 X 的强 MCM 算子(strong MCM -operator).

3.2 主要结果

1989 年滕辉、夏省祥、林寿[15，定理 2]给出了 $w\sigma$ 空间的一个刻画，在这一部分，我们先给出 $w\sigma$ 空间的新刻画，即证明 $w\sigma$ 空间等价于强 MCM 空间．然后再通过强 MCM 空间来讨论 $w\sigma$ 空间是否满足可数闭和定理.

引理 3.2.1 X 是 $w\sigma$ 空间当且仅当 X 是强 MCM 空间.

证明：必要性．若 X 是 $w\sigma$ 空间，设 g 是 X 的 $w\sigma$ 函数．对 X 的每一递减集列 $\left\{D_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，令 $U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)=g(n,D_n)$．显然，$U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$ 满足定义 3.1.4 的(1)和 (2)．现对 X 的任一交为空的递减闭集列 $\left\{F_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，假设 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)\neq\varnothing$，则存在 $p\in X$，使得 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)$．即对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$p\in U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)$，而 $U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)=g(n,F_n)$，从而存在 $x_n\in F_n$，使得 $p\in U\left(n,\left\{g\left(n,x_n\right)\right\}\right)$．进而存在 $y_n\in g\left(n,x_n\right)$，使得 $p\in g\left(n,y_n\right)$．因为 g 是 X 的 $w\sigma$ 函数，所以 $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点 z，现选取 $j\in\mathbb{N}$，使得 $z\notin F_j$，因为 z 是 $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的聚点，所以存在 $i>j$，使得 $x_i\in X-F_j$，矛盾．所以 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)=\varnothing$，即满足定义 3.1.4 的(3)，从而 X 是强 MCM 空间.

充分性．若 X 是强 MCM 空间，U 是 X 上的强 MCM 算子．对任意的 $x \in X$，$n \in \mathbb{N}$ 及 $j \in \mathbb{N}$，定义 $D_j^n(x) = \begin{cases} \{x\}, j \le n \\ \varnothing, \text{其他} \end{cases}$．则 $\{D_j^n(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一交为空的递减集列，令 $g(n,x) = U(n,\{D_j^n(x)\})$．由定义 3.1.4 的(1)和(2)，易见这样定义的 g 是 X 的 g 函数．设 $p \in X$ 且 $p \in g(n,y_n)$，$y_n \in g(n,x_n)$，若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无聚点，定义 $F_j = \overline{\{x_n : n \ge j\}}$，显然 $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一交为空的递减闭集列，且对任意的 $n, j \in \mathbb{N}$，$x \in F_j$ 有 $D_j^n(x) \subset F_j$．由定义 3.1.4 的(2)即单调性，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in F_j$ 有 $g(n,x) \subset U(n,\{F_j\})$，所以

$$g(n,F_j) \subset U(n,\{F_j\}).$$

从而，

$$U(n,\{g(n,F_j)\}) \subset U(n,\{U(n,\{F_j\})\}).$$

易见，$p \in g(n,g(n,F_j)) \subset U(n,\{g(n,F_j)\}) \subset U(n,\{U(n,\{F_j\})\})$，所以 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(n,\{U(n,\{F_j\})\}) \ne \varnothing$，矛盾．从而 X 是 $w\sigma$ 空间．

下面将证明强 MCM 空间满足可数闭和定理．利用定义 3.1.4，我们可以先得出两个闭的强 MCM 子空间的并是强 MCM 空间．

引理 3.2.2 若 $X = X_1 \cup X_2$，且 X_1，X_2 都是 X 的闭的强 MCM 子空间，则 X 是强 MCM 空间．

证明：对 $i \in \{1,2\}$，因为 X_i 是强 MCM 空间，所以可令 U_i 为 X_i 的强 MCM 算子，对 X 的任一递减集列 $\{D_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，$\{D_j \cap X_i\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 X_i 的递减集列，因为 X_i 是强 MCM 空间，U_i 为 X_i 的强 MCM 算子，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$F_i(n,\{D_j \cap X_i\}) = X_i - U_i(n,\{D_j \cap X_i\}),$$

且令

$$F(n,\{D_j\}) = F_1(n,\{D_j \cap X_1\}) \cup F_2(n,\{D_j \cap X_2\}).$$

则$F\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$是 X 的闭集，且$D_n \cap F\left(n,\left\{D_j\right\}\right)=\varnothing$．于是对每一$n\in\mathbb{N}$，有

$$D_n \subset X - F\left(n,\left\{D_j\right\}\right).$$

令$U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)=X-F\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$，则$D_n \subset U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$.

若$\left\{D_n\right\}\preceq\left\{E_n\right\}$，得$\left\{D_n\cap X_i\right\}\preceq\left\{E_n\cap X_i\right\}$，进而$U_i\left(\left\{D_j\cap X_i\right\}\right)\preceq U_i\left(\left\{E_j\cap X_i\right\}\right)$，即对任意$n\in\mathbb{N}$，$U_i\left(n,\left\{D_j\cap X_i\right\}\right)\subset U_i\left(n,\left\{E_j\cap X_i\right\}\right)$．从而$F_i\left(n,\left\{E_j\cap X_i\right\}\right)\subset F_i\left(n,\left\{D_j\cap X_i\right\}\right)$．于是$F\left(n,\left\{E_j\right\}\right)\subset F\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$，即对任意$n\in\mathbb{N}$，$U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)\subset U\left(n,\left\{E_j\right\}\right)$，从而$U\left(\left\{D_j\right\}\right)\preceq U\left(\left\{E_j\right\}\right)$.

对 X 的任一交为空的递减闭集列$\left\{G_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，$\left\{G_j\cap X_i\right\}_{j\in\mathbb{N}}$是$X_i$的交为空的递减闭集列．对任意的$x\in X$，不妨设$x\in X_1$，对每个$n\in\mathbb{N}$，令

$$F_1\left(n,\left\{F_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right)=X_1-U_1\left(n,\left\{U_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right),$$

且令

$$F\left(n,\left\{F\left(n,\left\{G_j\right\}\right)\right\}\right)=F_1\left(n,\left\{F_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right)\cup F_2\left(n,\left\{F_2\left(n,\left\{G_j\cap X_2\right\}\right)\right\}\right).$$

因为$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}U_1\left(n,\left\{U_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right)=\varnothing$，所以$x\notin\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}U_1\left(n,\left\{U_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right)$．于是存在$n\in\mathbb{N}$，使得$x\notin U_1\left(n,\left\{U_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right)$，所以

$$x\in F_1\left(n,\left\{F_1\left(n,\left\{G_j\cap X_1\right\}\right)\right\}\right).$$

进而$x\in F\left(n,\left\{F\left(n,\left\{G_j\right\}\right)\right\}\right)$，于是$x\notin U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{G_j\right\}\right)\right\}\right)$，从而$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{G_j\right\}\right)\right\}\right)=\varnothing$．因此 X 是强MCM 空间.

定义 3.2.3[16] 称拓扑属性$\mathscr{P}$分别满足局部有限闭和定理、可数闭和定理、σ局部有限闭和定理(locally finite closed sum theorem、countable closed sum theorem、σ-locally finite closed sum theorem)，如果拓扑空间 X 分别有局部有限闭覆盖$\left\{F_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$、可数闭覆盖$\left\{F_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$、$\sigma$局部有限闭覆盖$\left\{F_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$，使每一$F_\alpha\,(\alpha\in A)$具有性质$\mathscr{P}$，那么 X 具有性质$\mathscr{P}$.

引理 3.2.4[16] 设拓扑属性$\mathscr{P}$满足下列两条件:

(1) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持；

(2) $\mathscr{P}$ 关于有限对一闭映射保持.

则 $\mathscr{P}$ 满足局部有限闭和定理.

下述引理比引理 3.2.2 更一般.

引理 3.2.5 $w\sigma$ 空间满足局部有限闭和定理.

证明：容易验证 $w\sigma$ 空间关于拓扑和保持，且由定理 1.1.5，$w\sigma$ 空间关于闭映射保持，从而关于有限对一闭映射保持．由引理 3.2.4，$w\sigma$ 空间满足局部有限闭和定理.

利用引理 3.2.2 和定义 3.1.4，我们可以证明强 MCM 空间满足可数闭和定理.

定理 3.2.6 若 $X=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}X_m$，其中 X_m 都是 X 的闭的强 MCM 子空间，则 X 是强 MCM 空间.

证明：由引理 3.2.2，不妨设对任意的 $m\in\mathbb{N}$，$X_m\subset X_{m+1}$．令 U_m 是 X_m 的强 MCM 算子，对 X 的任一递减集列 $\left\{D_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，$\left\{D_j\cap X_m\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 X_m 的递减集列．对每个 $m\in\mathbb{N}$ 及 $n\in\mathbb{N}$，令

$$U_m^*\left(n,\left\{D_j\cap X_m\right\}\right)=U_m\left(n,\left\{D_j\cap X_m\right\}\right)\bigcup\left(X-X_m\right),$$

则 $U_m^*\left(n,\left\{D_j\cap X_m\right\}\right)$ 是 X 的开集．再令

$$U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)=\bigcap_{k\le n}U_k^*\left(n,\left\{D_j\cap X_k\right\}\right).$$

对每一 $n\in\mathbb{N}$ 及任意的 $x\in D_n$，存在最小的 $m\in\mathbb{N}$，使得 $x\in X_m$．于是 $x\notin X-X_m$，因此对任意的 $k<m$ (如果有的话)，$x\notin X_k$，于是 $x\in X-X_k$．进而对任意的 $n'\in\mathbb{N}$，$x\in U_k^*\left(n',\left\{D_j\cap X_k\right\}\right)$．所以当 $n<m$ 时，$x\in\bigcap_{k\le n}U_k^*\left(n,\left\{D_j\cap X_k\right\}\right)$，当 $n\ge m$ 时，对每个 $m\le k\le n$，$x\in X_m\cap D_n\subset X_k\cap D_n\subset U_k\left(n,\left\{D_j\cap X_i\right\}\right)$．于是 $x\in U_k^*\left(n,\left\{D_j\cap X_k\right\}\right)$，进而 $x\in\bigcap_{m\le k\le n}U_k^*\left(n,\left\{D_j\cap X_k\right\}\right)$，所以 $x\in\bigcap_{k\le n}U_k^*\left(n,\left\{D_j\cap X_k\right\}\right)$，即 $x\in U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$．因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$，

$D_n \subset U\left(n,\left\{D_j\right\}\right)$. 当$\left\{D_n\right\} \preceq \left\{E_n\right\}$时，显然有$U\left(\left\{D_j\right\}\right) \preceq U\left(\left\{E_j\right\}\right)$.

现对 X 的任一交为空的递减闭集列 $\left\{F_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$，下证 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right)=\varnothing$. 对任意的$x\in X$，存在最小的$m\in\mathbb{N}$，使得$x\in X_m$. 所以对任意的$k<m$(如果有的话)，$x\in U_k^*\left(n,\left\{U_k^*\left(n,\left\{F_j\cap X_k\right\}\right)\right\}\right)$对每一$n\in\mathbb{N}$成立. 由于$x\in X_m$，$U_m$是$X_m$的强$MCM$算子，于是存在$n>m$，使得$x\notin U_m\left(n,\left\{U_m\left(n,\left\{F_j\cap X_m\right\}\right)\right\}\right)$. 又因为$x\notin X-X_m$，所以

$$x\notin U_m^*\left(n,\left\{U_m^*\left(n,\left\{F_j\cap X_m\right\}\right)\right\}\right).$$

因为

$$U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)=\bigcap_{k\le n} U_k^*\left(n,\left\{U_k^*\left(n,\left\{F_j\cap X_k\right\}\right)\right\}\right),$$

且$m<n$，所以$x\notin U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)$，即$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U\left(n,\left\{U\left(n,\left\{F_j\right\}\right)\right\}\right)=\varnothing$. 因此$X$是强$MCM$空间.

由定理 3.2.6，可得下述推论，并且该推论肯定地回答了林寿的问题.

推论 3.2.7 $w\sigma$空间满足可数闭和定理.

易知$w\sigma$空间的闭子空间是$w\sigma$空间，所以我们又有如下推论.

推论 3.2.8 如果空间X是$w\sigma$空间，则X的每个F_σ子空间也是$w\sigma$空间.

事实上，我们可以简单地证明下述更强的结果.

定理 3.2.9 $w\sigma$空间满足σ局部有限闭和定理.

证明： 设$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$是空间$X$的闭覆盖，其中每一$\mathscr{P}_n$是$X$的局部有限集族，且$\mathscr{P}_n$中的每一元是$X$的$w\sigma$子空间. 对每一$n\in\mathbb{N}$，令$X_n=\cup\mathscr{P}_n$，则$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$. 由引理 3.2.5，$X_n$是$X$的闭$w\sigma$子空间. 再由推论 3.2.7，$X$是$w\sigma$空间. 由定义 3.2.3，$X$满足$\sigma$局部有限闭和定理.

参考文献

[1] Alexandroff P S. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings[C]. In: Proc 1st Topological Symp, Prague, 1961. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I. New York: Academic Press, 1962, 41-54.

[2] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces(in Russian)[M]. Uspechi Mat Nauk, 1966, 21(4): 133-184(吴利生，陈必胜译．映射与空间．数学译林，1981，试刊(2)：12-26，(3)：50-59；1982,1(2)：151-168)．

[3] 林寿．关于 Arhangel'skiĭ 的"映射与空间"[J]．苏州大学学报(自然科学版), 1992, 8（4）: 393-400; 1993, 9(1): 11-19.

[4] Gale D. Compact sets of functions and function rings[J]. Proc Amer Math Soc, 1950, 1: 303-308.

[5] 朱建平．w 空间和 w 映射[J]．长春师院学报(自然科学版), 1985, 2: 7-12(科学通报, 1986, 31:555).

[6] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice [J]. Fund Math, 1965, 57: 107-115.

[7] Arhangel'skiĭ A V. Some type of quotient mappings and the relations between classes of topological spaces(in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1963, 153: 743-746.

[8] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings [J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143-154.

[9] Whyburn G T. Accessibility spaces [J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 24: 181-185.

[10] Gerlits J, Nagy Zs. Some properties of C(X), I [J]. Topology Appl, 1982, 14(2): 151-161.

[11] Gruenhage G. Infinite games and generalizations of first countable spaces [J]. General Topology Appl, 1976, 6: 339-352.

[12] Sharma P L. Some characterizations of W-spaces and w-spaces [J]. General Topology Appl, 1978, 9: 289-293.

[13] Siwiec F. Generalizations of the first axiom of countability [J]. Rocky Mountain J Math, 1975, 5(1): 1-60.

[14] Fletcher P, Lindgren W F. On $w\Delta$-spaces, $w\sigma$-spaces and $\Sigma^{\#}$-spaces [J]. Pacific J Math, 1977, 71: 419-428.

[15] 滕辉, 夏省祥, 林寿. 某些广义可数紧空间的闭映像[J]. 数学年刊(A 辑), 1989, 10: 554-558.

[16] 高国士. 拓扑空间论(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[17] 林寿. 拓扑空间及其运算[J]. 黄淮学刊, 1996, 12(2): 19-22.

[18] 彭良雪, 王丽霞. 关于 CSS 空间及相关结论[J]. 数学物理学报, 2010, 30A(2): 358-363.

[19] Good C, Knight R, Stares I. Monotone countable paracompactness [J]. Topology Appl, 2000, 101: 282-298.

[20] 林寿. 广义度量空间与映射(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[21] Engelking R. General Topology(revised and completed edtion)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[22] Arhangel'skiĭ A V. An addition theorem for weight of sets lying in bicompacta(in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1959, 126: 239-241.

[23] Michael E, Stone A H. Quotients of the space of irrationals [J]. Pacific J Math, 1969, 28: 629-633.

[24] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[25] Yanagimoto A. On set-sequence-covering maps and bi-sequential spaces [J]. Math Japon, 1978, 23: 393-399.

[26] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pacific J Math, 1984, 113: 303-332.

[27] Nogura T. Fréchetness of inverse limits and products [J]. Topology Appl, 1985, 20: 59-66.

[28] Michael E A. On representing spaces as images of metrizable and related spaces [J]. General Topology Appl, 1971, 1: 329-343.

[29] Aull C E. Accessibility spaces, k-spaces and initial topologies [J]. Czech Math J, 1979, 29: 178-186.

[30] Arhangel'skiĭ A V. Bicompact sets and the topology of spaces [J]. Soviet Math Dokl, 1963, 4: 561-564.

[31] Michael E. $\aleph_0$-spaces [J], J Math Mech, 1966, 15: 983-1002.

[32] Siwiec F, Mancuso V J. Relations among certain mappings and conditions for their

equivalence [J]. General Topology Appl, 1971, 1: 33-41.

[33] Michael E A. Biquotient maps and Cartesian products of quotient maps [J]. Ann Inst Fourier(Grenoble), 1968, 18: 287-302.

[34 Vaĭnšteĭn I A. On closed mappings of metric spaces(in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1947, 57: 319-321.

[35] Zhu J P. The generalizations of first countable spaces [J]. Tsukuba J Math, 1991, 15: 167-173.

[36] Michael E A. A quintuple quotient quest [J]. General Topology Appl, 1972, 2: 91-138.

[37] Mrówka S G. On completely regular spaces [J]. Fund Math, 1965, 72: 998-1001.

[38] Shen R X, Lin S. On discrete spaces and AP-spaces [J]. Houston J Math, 2011, 37: 645-651.

[39] Sakai M. Weak-open maps and sequence-covering maps [J]. Sci Math Japan, 2007, 66: 67-71.

[40] 燕鹏飞，林寿，江守礼．序列覆盖的闭映射保持可度量性[J]. 数学学报，2004, 47: 87-90.

[41] Heath R W. Arc-wise connectedness in semi-metric spaces [J]. Pacific J Math, 1962, 12: 1301-1319.

[42] Hodel R E. Moore spaces and $w\Delta$-spaces [J]. Pacific J Math, 1971, 38: 641-652.

致 谢

本学位论文是在导师林寿教授的亲切关怀与细心指导下完成的. 林老师对知识孜孜不倦的追求、对学生认真负责，在他身上我感受到一个学者严肃的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风，这些都让我受益匪浅，并且将终生受用无穷. 林老师在学习上给我谆谆教诲、鼓励与信心，在生活上给我无微不至的关怀. 希望借此机会向导师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

感谢我的师兄林福财和谢利红，师姐张静，以及张金煌在我研究生三年对我的关怀和帮助.

感谢李进金院长和李克典教授三年来的关心和帮助！

感谢三年来数学系帮助和教育过我的各位领导、老师，一路走来，从你们身上我收获无数，却无以回报，谨此一并表达我的谢意.

感谢给我授课的全体老师，是你们的辛勤付出，给我传道授业解惑；感谢我的研究生好友，你们的开怀大笑、精神鼓励给了我快乐和温馨的感觉，给了我永远无法忘记的研究生生活.

感谢我的家人，给予我继续接受教育的机会，无论在精神上还是在物质上都给予我莫大的支持.

攻读硕士学位期间完成的论文

1．**Zhongjing Zhu**，Countable closed sum theorems on $w\sigma$-spaces，Questions and Answers in General Topology，2012，(30):73-77.

2．**Shou Lin and Zhongjing Zhu**，A note on countably bi-quotient mappings，Kodai Mathematical Journal，2012，(35):391-401.

3．**林寿，朱忠景**．度量空间映像的研究．已被数学进展录用.