理学硕士学位论文

sn网、sq空间与弱双序列空间

张金煌

漳 州 师 范 学 院

二〇一二年五月

学校代码：10402　　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：2009042014

分 类 号：　　　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

理学硕士学位论文

sn网、sq空间与弱双序列空间

学位申请人：张金煌

指 导 教 师：林寿教授

学 位 类 别：理学硕士

学 科 专 业：应用数学

授 予 单 位：漳州师范学院

答 辩 日 期：二〇一二年五月

CODE: 10402 **NO.:** 2009042014
U.D.C.: **Classified Index:**

A Dissertation for the Degree of M. Science

Sn-networks、*sq*-spaces and weakly bisequential spaces

Candidate : Zhang Jin-huang
Supervisor : Prof. Lin Shou
Specialty : Applied Mathematics
Academic Degree Applied for : Master of Science
University : Zhangzhou Normal University
Date of Oral Examination : May, 2012

学位论文原创性声明和版权使用授权书

漳 州 师 范 学 院

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果．除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品．对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明．本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担．

作者签名：_______________　　　　日期：____年____月____ 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅．本人授权漳州师范学院可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文．

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书．

2、不保密□．

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：_______________　　日期：____年____月____日

导师签名：_______________　　日期：____年____月____日

摘 要

本文主要围绕收敛或聚点开展工作，由星算子、*sq*空间及弱双序列空间三部分组成. 第一部分在*sn*网集族中讨论星算子、序列闭包算子和闭包算子之间的关系，引入由相关集族所诱导的拓扑，并研究了这拓扑与原拓扑之间的一些关系. 第二部分探讨序列闭集是强序列闭集的条件，定义了*sq*空间和强序列商映射，阐述了强序列商映射及相关映射的一些性质及关系，用度量空间的映像刻画了*sq*空间. 第三部分证明了到弱双序列空间上的集列覆盖映射是弱双商映射.

关键词：星算子；序列闭包算子；*sn*网；强序列闭集；强序列商映射；可数tightness；弱双序列空间；集列覆盖映射

Abstract

In this paper, we mainly discuss the convergences or accumulate points in the topological spaces. It is composed by star operators, sq-spaces and weakly bisequential spaces. Firstly, we discusse the relations among star operators, sequential closure operators and closure operators on sn-networks, and then we obtain the topology which is induced by some family of subsets. Furthermore, we discuss this relationship between this topology and the original topology. Secondly, we discuss the condictions when a sequential closed set is a strongly sequential closed set; we define the sq-spaces and strongly sequentially quotient mappings; we study the properties and relations among the strongly sequentially quotient mappings and related mappings; we characterite the sq-spaces by the certain imaging of metrizable spaces. Finally, we prove that every set-sequence-covering mapping on weakly bisequential spaces is a weakly biquotient mapping.

Keywords: star operators; sequential closure operators; sn-networks; strongly sequentially closed sets; strongly sequentially quotient mappings; countable tightness; weakly bisequential spaces; set-sequence-covering mappings

目 录

第 1 章 引 言

1.1 研究现状

1966 年, A.V. Arhangel’skiǐ[1]引入了弱第一可数空间, 研究表明该空间在广义度量空间和度量空间理论中有着重要的作用, 因此在弱第一可数空间的条件下研究空间的性质是许多拓扑学家一直从事的工作. 其中弱基概念是弱第一可数空间的理论基础, 它的提出促进了拓扑空间理论的迅猛发展. 自从 R.E. Hodel[2]引入了星算子和Arhangel’skiǐ与S.P. Franklin[3]引入序列闭包算子之后, 以星算子、序列闭包算子作为工具在讨论弱第一可数空间中的一些性质时起到了很好的效果, 可见星算子是拓扑空间中的一个重要概念. 有关星算子与序列闭包算子在弱第一可数空间中的关系的一些主要结果在 R.E. Hodel 的文章 “k-structures and topology”[2]中都有体现, 并且做了许多与闭包算子相关的一些描述. 2002 年, W.C. Hong[4]获得了下面进一步的结果:

定理 1.1.1[4] 若 X 是弱第一可数空间, 则对 X 中任意子集 A 有 $(A)^* = [A]$.

由此可知, 在弱第一可数的 Fréchet 空间中子集的星算子与闭包算子是一致的, 且第一可数空间等价于弱第一可数的 Fréchet 空间. 然而关于星算子、闭包算子和序列闭包算子的关系的研究还不够充分. 由于星算子可以通过空间的网络来定义, 闭包算子及序列闭包算子可以在任何空间中定义, 但其在不同的拓扑空间中表现出不同的特点. 因而仅限制在弱第一可数空间中来讨论显得要求太强. 这引导我们在更一般的条件下讨论他们之间的关系. 特别是, 这些算子在什么条件之下是等价的?

2011 年, W.C. Hong[5]在研究可数 tightness 时, 定义了强序列闭集, 证明了空间 X 具有可数 tightness 当且仅当 X 的每一强序列闭集是闭集. 众所周知, 空间 X 称为序列空间当且仅当 X 的每一序列闭集是闭集. 每一个序列空间都具有可数 tightness.

由以上这些基本概念可以得到如下所示的关系图:

$$\begin{tikzcd} \text{闭集} \arrow[r, Rightarrow] & \text{强序列闭集} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "\text{可数 tightness}"] & \text{序列闭集} \arrow[ll, bend right, "\text{序列空间}"'] \end{tikzcd}$$

为了使知识的结构更加完善, 因此, 对于满足序列闭集是强序列闭集的这一类空间(本文中定义为 sq 空间)的性质的讨论显得更加有意义.

与序列闭集相关的映射是序列商映射, 1973 年, J.R. Boone, F. Siwiec[6]引入了序列商映射, 得到了序列商映射的刻画和与其他映射之间的关系.

定理 1. 1. 3[6] 映射 $f: X \to Y$ 是序列商映射当且仅当它是序列连续映射和逆序列映射.

1964 年, Arhangel'skiĭ [7]在推广紧覆盖映射时定义了 k 商映射. 1974 年, J.R. Boone[8]讨论了 k 商映射并获得一系列相关的结果. 最近, 林寿和郑春燕[9]定义了 kq 空间, 即每一序列闭集是 k 闭集的空间, 得到了 kq 空间映射刻画.

定理 1. 1. 4[6] 空间 X 是 kq 空间当且仅当它是度量空间的 k 商映像.

当一类空间提出时, 利用映射作为工具研究空间之间的关系, 刻画度量空间的映像是研究空间的基本方法. 从而, 我们很自然的想到利用类似于 kq 空间和 k 商映射的关系去对 sq 空间进行深入的讨论.

下面介绍几类已知的映射之间的关系:

设映射 $f: X \to Y$, 当空间 X, Y 在满足一定的条件时, 几类映射是可以相互转化的. 下图描述了它们之间的关系:

$$\begin{tikzcd} \text{序列商映射} \arrow[r, shift left, "Y\text{是}kq\text{空间}"] \arrow[rr, bend right, "Y\text{是序列空间}"'] & k\text{ 商映射} \arrow[l, shift left, "X\text{是}kq\text{空间}"] \arrow[r, shift left, "Y\text{是}k\text{空间}"] & \text{商映射} \arrow[l, shift left, "X\text{是}k\text{空间}"] \arrow[ll, bend right, "X\text{是序列空间}"'] \end{tikzcd}$$

所以, 很直观的可以想到讨论其他相关的映射和图中几类映射之间的转化关系及所需要的条件是什么?

1994 年, Arhangel'skiĭ [10]引入了弱双序列空间的概念. 2000 年, 刘川[11]讨论了弱双序列空间与度量化空间的映射关系, 弱双序列空间与可数双序列空

间、Fréchet 空间之间的关系. 因此, 弱双序列空间成为独立于可数双序列空间的一个介于双序列空间与 Fréchet 空间之间的空间. 如图所示:

$$\begin{tikzcd} & \text{弱双序列空间} \arrow[dr] & \\ \text{双序列空间} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Fréchet 空间} \\ & \text{可数双序列空间} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

研究弱双序列空间的性质以及与邻近空间之间的一些关系具有一定的研究价值. 由弱双序列空间和研究弱双序列空间的性质而产生出来的一些方法和概念(如: 弱双商映射)已经成为拓扑空间中的一些主要内容, 而弱双序列空间的性质与邻近空间之间的一些关系一直是拓扑学研究者研究一类空间的主要思路, 尤其是对与可数双序列空间平行的一些结论是否成立进行探讨显得相当有趣. 早在 1970 年, F. Siwice[12]在利用可数双商映射研究可数双序列空间时, 定义了序列覆盖映射, 得到了

定理 1.1.5[12] 下列条件等价:

(1) Y 是可数双序列空间;

(2) 每一映满 Y 的序列覆盖映射是可数双商映射;

(3) Y 是(局部紧)度量空间的可数双商映像.

然而序列覆盖映射对于用 ω 滤子基定义的弱双序列空间, 甚至对双序列空间进行刻画都是不成立的. 1978 年, A. Yanagimoto[13]定义了集列覆盖映射, 用度量空间的映像刻画了双序列空间、可数双序列空间和 Fréchet 空间.

定理 1.1.6[13] 空间 Y 是可数双序列空间当且仅当每一映满 Y 的集列覆盖映射是可数双商映射.

因此很自然的就想到利用集列覆盖映射来刻画弱双序列空间. 虽然关于可数双序列和双商映射的一些关系 E.A. Michael 在文献[14, 15]的综述中作了充分的描述, 但从已知文献中我们发现关于弱双序列空间的性质刻画和与邻近空间的关系的报道并不多. 这引起了我们对这方面知识进行探讨的兴趣.

双商映射 $\Rightarrow$ 弱双商映射 $\Rightarrow$ 伪开映射.

关于弱双序列空间和弱双商映射的一些结果:

引理 1.1.7[11] 对映射 $f: X \to Y$ 下列性质等价:

(1) f 是弱双商映射;

(2) 若 $\mathcal{F}$ 是以 $y\in Y$ 为聚点的 ω 滤子基, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$, 使得 $f^{-1}(\mathcal{F})$ 是以 x 为聚点.

定理 1.1.8[11] 拓扑空间 Y 是弱双序列空间当且仅当它是可度量化空间的弱双商映像.

1.2 本文的主要结果

本文第 2 章讨论了星算子、序列闭包算子和闭包算子之间的关系. 我们介绍了空间的子集组成的集族诱导的拓扑, 和由诱导拓扑所建立的一些有趣的关系. 我们可以在任何拓扑空间中定义星算子, 并且讨论闭包算子、序列闭包算子和星算子之间的一些关系. 特别地, 在某些条件下序列闭包算子和星算子是等价的. 关于星算子具体结果如下:

定理 2.2.3① 设空间 X, $\mathcal{P}$ 是 X 的网络, 则

(1) $\mathcal{P}$ 是 X 的邻域当且仅当对每一 $A\subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}=\overline{A}$;

(2) $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网络当且仅当对每一 $A\subset X$ 有 $[A]\subset(A)^*_{\mathcal{P}}$.

定理 2.2.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络. 对每一 $A\subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}\subset[A]$ 当且仅当对 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $P_x\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P_x\subset U$.

为了进一步讨论 $(A)^*_{\mathcal{P}}$ 与 $[A]$ 之间的关系, 我们引入了辅助拓扑 $\tau_{\mathcal{P}}$ 及性质(F)和(G), 证明了

定理 2.3.5 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络. $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 是 Fréchet 空间而且 X 有性质(G)当且仅当 X 有性质(F)和对每一 $A\subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}=[A]$.

第 3 章中 3.1 节介绍了强序列商映射的一些内在性质的刻画; 3.2 节定义了 sq 空间并对其性质进行讨论, 从而得到了度量化空间的强序列商映像是 sq 空间的精确刻画和在特定条件下的一些映射之间的关系; 3.3 节举了一些反例说明 sq 空间与几类空间之间的关系和强序列商映射与几类映射之间的互不蕴含的

①以下主要结果的序号是在正文中相应章节的编号.

关系. 主要结果如下:

定理 3.2.6 可数紧的 sq 空间是序列紧空间.

定理 3.2.9 对于空间 X , 下列条件相互等价:

(1) X 是 sq 空间;

(2) 每一到 X 上的序列商映射是强序列商映射;

(3) X 是某一局部紧度量化空间的强序列商映像;

(4) X 是某一度量化空间的强序列商映像.

定理 3.2.12 下述条件等价:

(1) X 有可数 tightness;

(2) 到 X 上的每一强序列商映射是商映射;

(3) X 是一族可数空间拓扑和的商映像;

(4) X 是局部可数空间的商映像.

第 4 章利用弱双商映射讨论了映满弱双序列空间的集列覆盖映射是弱双商映射, 以及和弱双序列空间、弱双商映射的一些相关性质. 具体结果如下:

引理 4.2.3 $f: X \to Y$ 是弱双商映射, 若 X 弱双序列空间, 则 Y 为弱双序列空间.

定理 4.2.6 $f: X \to Y$ 是集列覆盖映射, Y 是弱双序列空间, 则 f 是弱双商映射.

定理 4.2.7 下列条件相互等价:

(1) X 是弱双序列空间;

(2) 映满 X 的每一集列覆盖映射是弱双商映射;

(3) X 是度量空间的弱双商映像.

本文除特别强调外, 所有的映射都是连续且满的. 同时也不事先假设任何分离公理, 需要时将加以说明. 字母 N 代表所有正整数的集合, R 代表全体实数. 对一些未说明的定义和术语读者可以参考文献[16, 17, 18]. 引言中涉及到的相关定义均可在第二、三章及第四章中查阅到.

第 2 章 关于 sn 网的星算子

弱基是广义度量空间的重要概念. F. Siwiec[19]证明了 Hausdorff 空间是第一可数的当且仅当它是 Fréchet 的, 弱第一可数空间. R.E. Hodel[2]在弱第一可数空间下引入了星算子, 并用星算子证明了 F. Siwiec 的结果. 最近, W.C. Hong[4]证明了在弱第一可数空间下星算子和序列闭包算子是一样的并用不同于 R.E. Hodel 的方法得到了 F. Siwiec 和 R.E. Hodel 的结果.

众所周知, 闭包算子和序列闭包算子都是定义在拓扑空间上的. 我们可以在任何拓扑空间中定义星算子, 并且讨论闭包算子、序列闭包算子和星算子之间的一些关系. 特别地, 在某些条件下序列闭包算子和星算子是等价的.

2.1 基本概念

设 X 是拓扑空间, $\mathcal{P}$ 是 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的标准网络, 如果满足以下条件:

(1) $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$;

(2) 对每一 $x\in X$, $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网络, 即, 若 $x\in U$ 且 U 是 X 的开集, 则存在 $P\in\mathcal{P}_x$, 使得 $x\in P\subset U$;

(3) 若 U, $V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$, 使得 $W\subset U\bigcap V$.

定义 2.1.1 设 $A\subset X$. 对每一 $A\subset X$, 令

$$[A]=\{x\in X\mid 存在 A 中的序列收敛于 x\}.$$

算子 $[\bullet]:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ 称做 X 上的序列闭包算子[20], 其中 $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集.

如果 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 上的标准网络. 对每一 $A\subset X$, 令

$$(A)^*_{\mathcal{P}}=\{x\in X\mid 对每一 P\in\mathcal{P}_x 有 P\bigcap A\neq\varnothing\}.$$

算子 $(\bullet)^*_{\mathcal{P}}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ 称做 X 上的星算子[2].

显然, $(A)^*_{\mathcal{P}}$, $[A]\subset\overline{A}$. 本章将讨论 $(A)^*_{\mathcal{P}}$ 和 $[A]$ 之间的关系, 特别地,

问题 2.1.2 当空间 X 标准网络 $\mathcal{P}$ 具有何种性质时, 对每一 $A\subset X$ 使得

$(A)^*_{\mathcal{P}}=\overline{A}$，或者$(A)^*_{\mathcal{P}}=[A]$成立?

2.2 星算子

设空间X，$x\in X$且$P\subset X$．P称为x在X中的序列邻域, 若每一个收敛于x的序列终于P．P称为序列开集, 若对每一$x\in P$，P为x在X中的序列邻域. X称为序列空间[20], 若X中每一个序列开集是开集.

定义 2.2.1 设$\mathcal{P}$为空间X的标准网络. $\mathcal{P}$称为X的sn网[21], 若$\mathcal{P}_x$的每一元素是x在X中的序列邻域; $\mathcal{P}$称为X的弱基[1], 若$G\subset X$使得对于$x\in G$存在$P\in\mathcal{P}_x$，有$P\subset G$，那么G是X的开子集.

空间称为弱第一可数[1](snf可数[28])的, 若X有弱基(sn网)$\mathcal{P}$使得每一个$\mathcal{P}_x$是可数的.

每一个弱第一可数空间是序列空间[22].

引理 2.2.2[21] 设空间X，$\mathcal{P}$是X的子集族.

(1) 若$\mathcal{P}$是X的弱基, 则$\mathcal{P}$是X的sn网;

(2) 若X是序列空间且$\mathcal{P}$是X的sn网, 则$\mathcal{P}$是X的弱基.

定理 2.2.3 设空间X，$\mathcal{P}$是X的标准网络, 则

(1) $\mathcal{P}$是X的邻域当且仅当对每一$A\subset X$有$(A)^*_{\mathcal{P}}=\overline{A}$;

(2) $\mathcal{P}$是X的sn网络当且仅当对每一$A\subset X$有$[A]\subset(A)^*_{\mathcal{P}}$.

证明: 令$\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$

(1) 对每一$x\in X$，$\mathcal{P}_x$是x在X中的邻域基, 显然对每一$A\subset X$有$(A)^*_{\mathcal{P}}=\overline{A}$. 反之，若对每一$x\in X$且$P\in\mathcal{P}_x$，因为$P\bigcap(X-P)=\varnothing$，$x\notin(X-P)^*_{\mathcal{P}}=\overline{X-P}=X-P^\circ$, 则有$x\in P^\circ$. 因此$\mathcal{P}_x$是$x$在$X$中的邻域基.

(2) 设存在$x\in X$使得$\mathcal{P}_x$不是x在X中的sn网. 存在$P\in\mathcal{P}_x$不是x在X中的序列邻域，那么存在$X-P$中的序列$\{x_n\}$收敛到x，因此$x\in[X-P]\subset(X-P)^*_{\mathcal{P}}$，所以$P\cap(X-P)\neq\varnothing$，矛盾. 反之，设对每一$x\in X$，

$\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的 sn 网. 令 $A \subset X$, 若 $x \in [A]$, 存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x. 令 $P \in \mathcal{P}_x$, 则序列 $\{x_n\}$ 终于 P, 因此 $P \cap A \neq \varnothing$ 并且 $x \in (A)^*_{\mathcal{P}}$, 所以 $[A] \subset (A)^*_{\mathcal{P}}$.

定理 2.2.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的标准网络. 对每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$ 当且仅当对 x 在 X 中的序列邻域 U, 存在 $P_x \in \mathcal{P}_x$ 使得 $P_x \subset U$.

证明: 设对于每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$. 若存在 $x \in X$ 和 x 在 X 中的序列邻域 U 使得对每一 $P \in \mathcal{P}_x$ 有 $P \not\subset U$, 且对每一 $P \in \mathcal{P}_x$, 取 $x(P) \in P - U$. 令 $A = \{x(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$. 而 $x \in (A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$, 则存在 A 中序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 因此 $\{x_n\}$ 终于 U, 矛盾.

反之, 令 $A \subset X$. 若存在 $x \in (A)^*_{\mathcal{P}} - [A]$, 而 $X - A$ 是 x 在 X 中的序列邻域, 因此存在 $P_x \in \mathcal{P}_x$ 有 $P_x \subset X - A$, 并且 $P_x \cap A = \varnothing$, 矛盾.

推论 2.2.5 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的标准网络. 对每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} = [A]$, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基当且仅当 X 是序列空间.

证明: 因为每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} = [A]$, 由定理 2.2.3 知 $\mathcal{P}$ 是 sn 网络. 如果 X 是序列的, 由引理 2.2.2 知 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基. 反之, 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基. 若 $U \subset X$, 对每一个 $x \in U$, U 是 x 在 X 中的序列邻域. 由定理 2.2.4 和定义 2.2.1 得 U 是开集. 因此 X 是序列空间.

定理 2.2.6 设 $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$ 是空间 X 的标准网络, 其中每个 $\mathcal{P}_x$ 是可数的, 则对每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$.

证明: 令 $A \subset X$, 若 $x \in (A)^*_{\mathcal{P}}$, 存在递减的序列 $\{P_n\} \subset \mathcal{P}_x$, 使得 $\{P_n\}$ 是 x 在 X 中的网络. 取 $x_n \in P_n \cap A$ 构成序列 $\{x_n\}$, 则序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 则 $x \in [A]$. 因此 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$.

在定理 2.2.6 中如果 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网络, 则由定理 2.2.3 和 2.2.6 可知对每一 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} = [A]$. 对于弱第一可数空间已经由 W.C. Hong[4]证明了. 但是,

定理 2.2.6 的逆命题不成立.

回顾 Fréchet 空间的概念. 空间 X 称为 Fréchet 空间[22], 若 $x \in \overline{A} \subset X$ 存在 A 中的序列收敛到 x. 每一个第一可数空间是 Fréchet 空间, 每个 Fréchet 空间是序列空间.

若 $\mathcal{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的标准网络, 那么对每个 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset \overline{A} = [A]$.

例 2.2.7 序列扇 S_ω 定义如下. 设每一 $n \in N$, T_n 是一个收敛于 $a_n \notin T_n$ 的序列. 令 $T_0 = \{a_n \mid n \in N\}$. 让 T 是 $\{T_n \cup \{a_n\} \mid n \in N\}$ 的拓扑和.

$$S_\omega = \{s\} \cup (\bigcup \{T_n \mid n \in N\})$$

是由 T 中所有 T_0 的点粘到一点 s 所得到的商空间(即把可数多个非平凡收敛序列的拓扑和中的非孤立点粘成一点所成的商空间).

设空间 X 是序列扇 S_ω, 则 X 是 Fréchet 空间, 但不是第一可数的. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的基, 则对每一个 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} = \overline{A} = [A]$.

2.3 诱导拓扑和 Fréchet 空间

在这一节我们将讨论对每一个 $A \subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}} \subset [A]$ 成立的条件. 空间 X 的拓扑 τ 通过标准网络 $\mathcal{P}$ 诱导新的拓扑 $\tau_{\mathcal{P}}$. 从而获得了 τ 或者 $\tau_{\mathcal{P}}$ 中的序列邻域和邻域之间的关系.

设 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的标准网络,

令 $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$ 和 $\tau_{\mathcal{P}} = \{U \subset X \mid$ 对每一 $x \in U$ 存在 $P \in \mathcal{P}_x$ 使得 $P \subset U\}$.

很容易得到如下结论:

(1) $\tau_{\mathcal{P}}$ 是 X 的拓扑;

(2) $\tau \subset \tau_{\mathcal{P}}$;

(3) $\mathcal{P}$ 是 $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ 的弱基;

(4) $\mathcal{P}$ 是 (X, τ) 的弱基当且仅当 $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$.

则 $\tau_{\mathcal{P}}$ 称为由 $\mathcal{P}$ 诱导的拓扑.

引理 2.3.1[16, 引理 1.4.7]　X 是 Fréchet 空间当且仅当对每个 $x\in X$ 的序列邻域是 x 在 X 中的邻域.

因为 $\tau\subset\tau_{\mathcal{P}}$，任取 $x\in X$，点 x 在 (X,τ) 中的每个序列邻域是 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的序列邻域. 考虑下列条件:

(F): 对每一 $x\in X$，点 x 在 (X,τ) 中的每个序列邻域是 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的邻域.

(G): 对每一 $x\in X$，点 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的每个序列邻域是 x 在 (X,τ) 中的序列邻域.

由定理 2.2.4, (F)$\Rightarrow$对每一 $A\subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}\subset[A]$.

定理 2.3.2　若 (X,τ) 或者 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 是 Fréchet 空间, 则 X 有性质(F).

证明：设 (X,τ) 是 Fréchet 空间且 U 是 $x\in X$ 在 (X,τ) 中的序列邻域. 由引理 2.3.1 得 U 是 x 在 (X,τ) 中的邻域, 由 $\tau\subset\tau_{\mathcal{P}}$ 可知 U 是 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的邻域. 如果 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 是 Fréchet 空间且 U 是 x 在 (X,τ) 中的序列邻域, U 是 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的序列邻域. 由引理 2.3.1 得 U 是 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的邻域.

设空间 (X,τ). 因为 $\mathcal{P}$ 是 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 的弱基, 由引理 2.2.2 得 $\mathcal{P}$ 是 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 的 sn 网络. 令 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$，对每个 $x\in X$，$\mathcal{P}_x=\{\{x\}\}$. 显然 $\mathcal{P}$ 是 X 的标准网络, $\tau_{\mathcal{P}}$ 是 X 的离散拓扑, 而且 X 有性质(F). 但是, 如果 X 是单位闭区间有着通常拓扑, 则 X 没有性质(G). 因此, (F)不能推出(G).

引理 2.3.3　设 $\mathcal{P}$ 是 X 的标准网络. 考虑以下条件:

(1) $\mathcal{P}$ 是 (X,τ) 的 sn 网络;

(2) X 有性质(G), 即, 对每一 $x\in X$，点 x 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的每个序列邻域是 x 在 (X,τ) 中的序列邻域;

(3) 对每一$x\in X$，点x在$(X,\tau_{\mathcal{P}})$中的每个邻域是x在(X,τ)中的序列邻域.

则(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3). 如果X是Hausdorff空间, 则有(3)$\Rightarrow$(1).

证明：(1)$\Rightarrow$(2). 设$\mathcal{P}$是(X,τ)的sn网络. 对每个$x\in X$，U是x在$(X,\tau_{\mathcal{P}})$中的序列邻域. S是在τ中收敛于x的序列, 且$x\in V\in\tau_{\mathcal{P}}$，则存在$P_x\in\mathcal{P}_x$使得$P_x\subset V$. 因为$P_x$是$x$在$\tau$中的序列邻域, 则$S$终于$P_x$，$S$终于$V$，且$S$是$(X,\tau_{\mathcal{P}})$中的收敛序列. 因此$S$终于$U$，所以$U$是$x$在$\tau$中的序列邻域.

(2)$\Rightarrow$(3). 显然.

(3)$\Rightarrow$(1). 如果X是Hausdorff空间. 设$\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$. 设存在$x_0\in X$和$P_0\in\mathcal{P}_{x_0}$使得$P_0$不是$x_0$的序列邻域. 取$X-P_0$的序列$\{x_n\}$使得在$\tau$中$x_n$收敛到$x_0$. 令$V=X-\{x_n\mid n\in N\}$，则$V$不是$x_0$在$\tau$中的序列邻域. 对每一$x\in V$，如果$x=x_0$，取$P_x=P_0$，则$P_x\subset V$；如果$x\neq x_0$，则$x\in X-(\{x_0\}\bigcup\{x_n\mid n\in N\})$，从而存在$P_x\in\mathcal{P}_x$，使得$P_x\subset X-(\{x_0\}\bigcup\{x_n\mid n\in N\})\subset V$ (X是Hausdorff空间). 因此, $x_0\in V\in\tau_{\mathcal{P}}$，矛盾. 因此, $\mathcal{P}$是(X,τ)的sn网络.

推论 2.3.4 设$\mathcal{P}$是X的标准网络. 若X有性质(F)和(G), 则$(X,\tau_{\mathcal{P}})$是Fréchet空间.

证明：设U是$x\in X$在$(X,\tau_{\mathcal{P}})$中的序列邻域. 由引理2.3.3知U是$x\in X$在τ中的序列邻域, 从而由(F)得U是$x\in X$在$(X,\tau_{\mathcal{P}})$中的邻域. 由引理2.3.1, 所以$(X,\tau_{\mathcal{P}})$是Fréchet空间.

由定理2.2.3, 2.2.4和推论2.3.4, 下面结论成立.

定理 2.3.5 设$\mathcal{P}$是X的标准网络. $(X,\tau_{\mathcal{P}})$是Fréchet空间而且X有性质(G)当且仅当X有性质(F)和对每一$A\subset X$有$(A)^*_{\mathcal{P}}=[A]$.

例 2.3.6 Stone-Čech 紧化βN不是序列空间, 但是存在βN中的sn网络$\mathcal{P}$使得对每一$A\subset\beta N$有$(A)^*_{\mathcal{P}}=[A]$.

因为 βN 不包含非平凡的收敛序列[22]，βN 中的每个单点集是序列开集，而 βN 不是序列空间．设 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$，对每个 $x\in X$，$\mathcal{P}_x=\{\{x\}\}$．$\mathcal{P}$ 是 βN 中的 sn 网络，则 $(\beta N,\tau_{\mathcal{P}})$ 是离散空间且对每个 $A\subset\beta N$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}=A=[A]$．

例 2.3.7 设 (X,τ) 是序列扇 S_ω (见例 2.2.7)．存在 X 的标准网络 $\mathcal{P}$ 使得 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 不是序列空间．

对每一个 $x\in X$，如果 $x\neq s$，令 $\mathcal{P}_x=\{\{x\}\}$；如果 $x=s$，令 $\mathcal{P}_x=\{\{s\}\bigcup(\bigcup_{n\geq m}L_n)\mid m\in N,L_n\subset T_n,|T_n-L|<\aleph_0\}$．则 $\mathcal{P}$ 是 X 的标准网络，$\{s\}$ 是 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的序列开集，但不开于 $\tau_{\mathcal{P}}$．因此，$(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 不是序列空间．

例 2.3.8 设 (X,τ) 是 Arens 空间 S_2．空间 X 存在弱基 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 使得

(1) $\mathcal{P}$ 是可数的，X 有性质(G)，但没有性质(F)；

(2) 存在 $A\subset X$ 使得 $(A)^*_{\mathcal{Q}}\not\subset[A]$．

Arens 空间 S_2 [3] 定义如下．取 $X=\{0\}\bigcup N\bigcup N^2$．设 $V(n,m)=\{n\}\bigcup\{(n,k):k\geq m\}$，$X$ 赋予如下拓扑：对 $x\in N^2$ 时邻域基为 $\{\{x\}\}$；当 $x\in N$ 时邻域基为 $\{V(x,m)\mid m\in N\}$；当 $x=0$ 时邻域基为 $\{\{0\}\bigcup_{n\geq n_0}(V(n,m_n))\}$，其中 $n_0\in N,m_n\in N$．对每个 $x\in S_2-\{0\}$，令 $\mathcal{P}_x$ 是 $x\in S_2$ 的可数邻域基，且 $\mathcal{P}_0=\{\{0\}\bigcup_{n\geq n_0}(V(n,m_n))\}$．令 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in S_2}\mathcal{P}_x$．很容易得到 $\mathcal{P}$ 是 S_2 的弱基，S_2 是弱第一可数的，且对每一 $A\subset X$ 有 $(A)^*_{\mathcal{P}}=[A]$．因为 $\mathcal{P}$ 是 S_2 的弱基，$\tau=\tau_{\mathcal{P}}$，因此 X 有性质(G)．令 $S=\{0\}\bigcup N$，则 S 是 0 在 τ 中的序列邻域，但不是 0 在 $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 中的邻域．因此 X 没有性质(F)．

问题 2.3.9 空间 X 的标准网络 $\mathcal{P}$ 具有何种性质时，$(X,\tau_{\mathcal{P}})$ 是序列空间?

我们都知道空间 X 是 Fréchet 的当且仅当它是度量空间的伪开映像，而且空间 X 是 snf 可数的当且仅当它是度量空间的 1 序列覆盖映像[19]．自然而然的

就有以下问题的提出.

问题 2.3.10 设$\mathcal{P}$是空间 X 的标准网络. 对于每个 $A\subset X$ 有$(A)_{\mathcal{P}}^{*}\subset[A]$, 该空间是度量空间的何种映像?

由本节中的一些关系我们得到了以下的相邻关系.

$$\begin{tikzcd}
& \forall x\in X,\ x\text{在}(X,\tau)\text{中的每个邻域} \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
\forall x\in X,\ x\text{在}(X,\tau)\text{中的每个序列邻域} \arrow[ur, shift left, "(X,\tau)\text{是 Fréchet}"] \arrow[rr, "(F)"] \arrow[dr, shift left] & & \forall x\in X,\ x\text{在}(X,\tau_{\mathcal{P}})\text{中的每个邻域} \arrow[ul, shift left, "\mathcal{P}\text{是}(X,\tau)\text{中的弱基}"'] \arrow[dl, shift left] \\
& \forall x\in X,\ x\text{在}(X,\tau_{\mathcal{P}})\text{中的每个序列邻域} \arrow[ul, shift left, "(G)"] \arrow[ur, shift left, "(X,\tau_{\mathcal{P}})\text{是 Fréchet}"'] &
\end{tikzcd}$$

第 3 章　关于sq空间

本章除了第二节的映射不预先假设连续的前提下进行讨论外，其余的映射均指连续的满映射.

3.1 强序列商映射

定义 3.1.1 设X是一个拓扑空间，H是空间X的子集.

(1) H称为X的序列闭集[23]，若由H中的点组成的X的收敛序列的极限点在H中.

(2) H称为X的强序列闭集[5]，若由H中的点组成的X的序列的聚点在H中.

强序列闭集的补集是强序列开集. 序列闭集的补集是序列开集.

显然，闭集$\Rightarrow$强序列闭集$\Rightarrow$序列闭集.

注：由强序列闭集的定义可以知道强序列闭集关于存在聚点的序列是封闭的.

J.R. Boone 引入了序列连续映射[8] $f:X\to Y$，若X中的序列$\{x_n\}$收敛到x，则$\{f(x_n)\}$收敛到$f(x)$. 通过对比这一比收敛点弱的性质的提炼，我们引入保序列聚点的映射，同样也可以得到强序列商映射的定义.

定义 3.1.2 映射$f:X\to Y$称为保序列聚点的映射，若X中的序列$\{x_n\}$有聚点x，则$\{f(x_n)\}$有聚点$f(x)$.

注：为了叙述方便我们称保序列聚点的映射为保聚映射.

定义 3.1.3 映射$f:X\to Y$称为强序列商映射，若$U\subset Y$且$f^{-1}(U)$是X中的强序列闭集，则U是Y中的强序列闭集.

下面定理刻画了保聚映射的性质:

定理 3.1.4 对于映射$f:X\to Y$. 以下命题等价:

(1) f是保聚映射;

(2) 若U是强序列开于Y，$f^{-1}(U)$是强序列开于X；

(3) 若H是强序列闭于Y，$f^{-1}(H)$是强序列闭于X.

证明：(1)$\Rightarrow$(3). 设$H \subset Y$且$f^{-1}(H)$不是强序列闭于X，在$f^{-1}(H)$中存在序列$\{q_n\}$，使得序列$\{q_n\}$以q为聚点且$q \notin f^{-1}(H)$. 因为f是保聚映射，则$\{f(q_n)\}$是H中的序列，使得$\{f(q_n)\}$以$\{f(q)\}$为聚点且$f(q) \notin H$. 因此，H不是Y的强序列闭集.

(3)$\Rightarrow$(2). 显然.

(2)$\Rightarrow$(1). 设$\{x_n\}$是X中的序列且以$x \in X$为聚点. 若U是$f(x)$在Y中的任一开集，则$f^{-1}(U)$在X中为强序列开集，且$x \in f^{-1}(U)$，则$\{x_n\} \cap f^{-1}(U)$为无限集并设为$\{x_{n_i}\}$，从而$f(x_{n_i}) \subset U$，所以$f(x)$为$\{f(x_n)\}$的聚点，故，f是保聚映射.

有下述关系:

$$\begin{tikzcd} & \text{序列连续} \arrow[d, shift left, "/" marking] \\ \text{连续映射} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \text{保聚映射} \arrow[u, shift left, "/" marking] \end{tikzcd}$$

序列连续映射与保聚映射是互不蕴含的，如:

例 3.1.5 序列连续$\nRightarrow$保聚映射.

设集合$X = \{0\} \cup N^2$为S_2(见例 2.3.8)的子空间. 让Y是集合$\{0\} \cup N^2$赋予离散拓扑的空间. 定义$f: X \to Y$为恒等映射. 先证f是序列连续映射. 若在X中的序列x_n收敛于x，因为X中不存在非平凡的收敛子列收敛到 0，所以$x \neq 0$，则当n充分大之后$x_n = x$，有$f(x_n) = x$. 下证f不是保聚映射，在X中 0 是N^2的聚点，但$f(0)$不是$f(N^2)$的聚点.

例 3.1.6 保聚映射$\nRightarrow$序列连续.

设空间$X = \{\frac{1}{n} \mid n \in N\} \cup \{0\} \subset R$；空间$Y = \{p\} \cup N$赋予$\beta N$的子空间拓扑，

其中 $p\in\beta N-N$. 定义映射 $f:X\to Y$ 如下: 当 $x=0$ 时, $f(x)=p$; 当 $x=\frac{1}{n}$ 时, $f(x)=n$. 因为 X 中的无限序列 $\{x_n\}$ 收敛到 0, 在 Y 中序列 $\{f(x_n)\}$ 总有无限个落在 N 中, 则 $\{f(x_n)\}$ 以 p 为聚点, 所以 f 是保聚映射. 下证 f 不是序列连续映射. 在 X 中 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛到 0, 但 $f(\{\frac{1}{n}\})=\{n\}$ 在 N 中不收敛到 p, 故 f 不是序列连续映射.

伪开映射是遗传商映射[14]. 序列商映射也是遗传序列商映射[6]. 但强序列商映射却不是遗传强序列商映射.

例 3.1.7 强序列商映射不是遗传强序列商映射.

设连续映射 $f:M\to S_2$, 其中 M 是度量空间, 则 f 是商映射. 因此, X 是序列的, 并且 X 是 sq 空间. 令 $X_0=S_2-N$, $M_0=f^{-1}(X_0)$ 且 $g=f_{|M_0}:M_0\to X_0$. 因为 $N\times N$ 是序列闭但不是强序列闭于 X_0, 则 X_0 不是 sq 空间. g 不是强序列商映射(强序列商映射保持 sq 空间. 见本文定理 3.2.8(1)). 故强序列商映射不是遗传的.

由映射的定义我们可以得到:

定理 3.1.8 设映射 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$.

(1) 如果 f, g 都是强序列商映射, 则复合映射 $g\circ f:X\to Z$ 也是强序列商映射;

(2) 如果 f 保聚且复合映射 $g\circ f$ 是强序列商映射, 则 g 也是强序列商映射.

证明: (1) 设集 $H\subset Z$. 若 $(g\circ f)^{-1}(H)$ 是 X 中的强序列闭集, 由于 $(g\circ f)^{-1}(H)=f^{-1}(g^{-1}(H))$ 且 f 是强序列商映射, 所以 $g^{-1}(H)$ 是强序列商映射. 又 g 是强序列商映射, 则 H 是强序列闭集, 所以复合映射 $g\circ f:X\to Z$ 也是强序列商映射.

(2) 设 $H\subset Z$. 若 $g^{-1}(H)$ 是 Y 中的强序列闭集, 由于 f 是保聚的, 由定理

3.1.4, $f^{-1}(g^{-1}(H))=(g\circ f)^{-1}(H)$ 也是 X 中的强序列闭集. 因为 $g\circ f$ 是强序列商映射, 所以 H 是 Z 中的强序列闭集, 所以 g 也是强序列商映射.

3.2 sq 空间

定义 3.2.1 空间 X 称为具有可数 tightness[24], 对于 X 的集合 A, 若 $x\in\overline{A}$, 则存在 A 的可数子集 C, 使得 $x\in\overline{C}$.

引理 3.2.2[5] 设 X 是拓扑空间. 下列条件等价:

(1) X 具有可数 tightness;

(2) X 中的每一个强序列闭集是闭集;

(3) X 中的每一个强序列开集是开集.

接下来, 我们利用强序列闭集来定义 sq 空间的概念.

定义 3.2.3 空间 X 称为 sq 空间, 若 X 中的每一序列闭集是 X 的强序列闭集.

由以上定义容易得到如下结论:

定理 3.2.4 空间 X 是序列空间当且仅当 X 具有可数 tightness 和 sq 空间.

证明: 必要性. 由定义显然成立.

充分性. 若 A 是 X 的序列闭集, 又 X 是 sq 空间, 则 A 是 X 的强序列闭集. X 具有可数 tightness, 可得 A 是 X 的闭集. 所以 X 是序列空间.

可数 tightness 具有遗传性[14], 而序列空间不具有遗传性质. 因此, sq 空间也不具有遗传性质, 并且 sq 空间不能推出序列空间.

在文[5]中定义了 X 上的 a 闭包算子: 对 X 中的每个子集 A,

$$[A]_a=\{x\in X\mid \text{存在序列 } x_n\in A,\ \{x_n\} \text{ 以 } x \text{ 为聚点}\}.$$

回忆上一章中定义的 X 上的序列闭包算子: 对 X 的每个子集 A,

$$[A]=\{x\in X\mid \text{存在序列 } x_n\in A,\ \{x_n\} \text{ 收敛于 } x\}.$$

A 是序列闭集当且仅当 $A=[A]$. 可以利用算子得到 sq 空间的等价刻画.

定理 3.2.5 对于空间 X. X 是 sq 空间当且仅当若 A 是 X 的序列闭集, 则 $A=[A]_a$.

证明: 必要性. 设 $A\subset X$, $A\subset[A]_a$ 显然成立. 下证 $[A]_a\subset A$. 设 A 是 X 的序列闭集. X 是 sq 空间, 则 A 是强序列闭集, $x\in[A]_a$, 存在 A 中的序列的聚点在 A 中, 即 $x\in A$.

充分性. 设 A 是 X 的序列闭集. 设 A 中的序列 x_n 存在聚点, 而且 $A=[A]_a$, 从而聚点在 A 中, 所以 A 为强序列闭集, 即 X 是 sq 空间.

定理 3.2.6 可数紧的 sq 空间是序列紧空间.

证明: 设 X 不是序列紧空间, 即存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 则集合 $\{x_n\mid n\in N\}$ 是序列闭集. 又因为 X 是 sq 空间, 则 $\{x_n\mid n\in N\}$ 是强序列闭集. 由 X 是可数紧的, 设 x 是序列 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 则至多仅有有限项 $x_n=x$, 不妨设所有 $x_n\neq x$. 又由 $\{x_n\mid n\in N\}$ 是强序列闭集, 则 $x\in\{x_n\mid n\in N\}$, 矛盾. 故, X 是序列紧空间.

但是对于可数紧的 sq 空间却不一定是紧空间. 如: 空间 $[0,\omega_1)$ 是第一可数的、可数紧空间, 但不是紧空间. 因此, 从定理 3.2.6 中我们希望能寻求 sq 空间的一个等价刻画是否成立, 结论是否定的, 如下面例子.

例 3.2.7　假定 CH, 序列紧的, T_2 空间 X 具有可数 tightness 但不是序列的 [31, 例 1.2]. 因此也不是 sq 空间.

Franklin 在 1965 年得到了序列空间可表示为可度量化空间的商映像[17], 表明序列空间和商映射具有紧密的联系, 同样 sq 空间和强序列商映射也具有类似的紧密的相关性质, 而且强序列商映射和序列商映射之间是相互独立的(见例 3.3.7, 3.3.8), 那么在什么条件下二者之间有相互联系呢?

定理 3.2.8 设映射 $f:X\to Y$.

(1) 若 X 是 sq 空间，f 是强序列商映射，则 Y 也是 sq 空间且 f 是序列商映射;

(2) 若 Y 是 sq 空间，f 是序列商映射，则 f 是强序列商映射.

证明：(1) 若 $G \subset Y$ 且 $f^{-1}(G)$ 是序列闭于 X. 因为 X 是 sq 空间，则 $f^{-1}(G)$ 是强序列闭于 X. 又由于 f 是强序列商映射，则 G 是强序列闭于 Y，从而 G 是序列闭于 Y，因此 f 是序列商映射. 另一方面，若 H 是序列闭于 Y，由 f 是连续映射，则 $f^{-1}(H)$ 序列闭于 X. 因为 X 是 sq 空间，所以 $f^{-1}(H)$ 强序列闭于 X，从而 H 是强序列闭于 Y，因此 Y 是 sq 空间.

(2) 若 $H \subset Y$ 且 $f^{-1}(H)$ 是强序列闭于 X，则 $f^{-1}(H)$ 是序列闭于 X. 由于 f 是序列商映射，因此 H 是序列闭于 Y. 又 Y 是 sq 空间，所以 H 是强序列闭于 Y，则 f 是强序列商映射.

由定理 3.2.8 知强序列商映射保持 sq 空间. 从 sq 空间和强序列商映射之间的关系可以得到以下定理:

定理 3.2.9 对于空间 X，下列条件相互等价:

(1) X 是 sq 空间;

(2) 每一到 X 上的序列商映射是强序列商映射;

(3) X 是某一局部紧度量化空间的强序列商映像;

(4) X 是某一度量化空间的强序列商映像.

证明：(1)$\Rightarrow$(2). 设 $f: M \to X$ 是序列商映射，其中 X 是 sq 空间. 由定理 3.2.8(2)，f 是强序列商映射.

(2)$\Rightarrow$(3). 令 $\mathcal{S}$ 是 X 中含有极限点的收敛序列的全体所成之集. 对于每一 $S \in \mathcal{S}$，S 作为 X 的子空间未必是可度量化空间，取定 S 的极限点 s，重新赋予 S 下述拓扑 τ_s：点 s 的邻域具有有限余拓扑，其余点是孤立点. 则空间 (S, τ_s) 同

胚于 R 的子空间 $\{0\}\bigcup\{\frac{1}{n}\,|\,n\in N\}$，且 S 上的拓扑 τ_s 细于 S 上的诱导拓扑．作拓扑和 $M=\oplus\{(S,\tau_s)\,|\,S\in\mathcal{S}\}$，则 M 是可度量化空间，且自然映射 $f:M\to X$ 是连续的序列覆盖映射[12]，因此 f 是序列商映射，由(2)可知 f 是强序列商映射．

(3)$\Rightarrow$(4)．显然．

(4)$\Rightarrow$(1)．由定理 3.2.8(1)可得证．

对于商映射与强序列商映射有如下关系：

定理 3.2.10 设映射 $f:X\to Y$．

(1) 若 X 具有可数 tightness 当且仅当每一定义在 X 上的商映射是强序列商映射；

(2) 若 Y 具有可数 tightness，则每一到 Y 上的强序列商映射是商映射．

证明：(1) 必要性．设 $f:X\to Y$ 是商映射．若 $H\subset Y$ 且 $f^{-1}(H)$ 强序列闭于 X，由 X 具有可数 tightness，据引理 3.2.2，可得 $f^{-1}(H)$ 闭于 X，则 H 闭于 Y，从而 H 是 Y 的强序列闭集，所以 f 是强序列商映射．

充分性．设 H 是 X 的强序列闭集，但不是 X 的闭集．设映射 $f:X\to\{0,1\}$，其中 $x\in H$，$f(x)=0$；$x\in X-H$，$f(x)=1$．$\{0,1\}$ 赋予商拓扑，f 是商映射．又 $f^{-1}(\{1\})=X-H$ 不是 X 的开集，则 $\{1\}$ 不是 $\{0,1\}$ 的开集，因此，$\{0\}$ 存在聚点为 1，则 $\{0\}$ 不是 $\{0,1\}$ 的强序列闭集．而 $f^{-1}(\{0\})=H$ 是 X 的强序列闭集，所以 f 不是强序列商映射(矛盾)，所以 X 具有可数 tightness．

(2) 设 $f:X\to Y$ 是强序列商映射．若 $H\subset Y$ 且 $f^{-1}(H)$ 闭于 X，则 $f^{-1}(H)$ 强序列闭于 X．由 f 是强序列商映射，H 是强序列闭于 Y 的．又由于 Y 具有可数 tightness，所以 H 闭于 Y，则 f 是商映射．

定义 3.2.11 拓扑空间 X 为局部可数空间，若 $x\in X$，则存在 x 的开邻域 U，使得 U 是可数集．

定理 3.2.12 下述条件等价：

(1) X 具有可数 tightness;

(2) 到 X 上的每一强序列商映射是商映射;

(3) X 是一族可数空间拓扑和的商映像;

(4) X 是局部可数空间的商映像.

证明: (1)$\Rightarrow$(2). 由定理 3.2.10(2).

(2)$\Rightarrow$(3). 让$\mathcal{C}$是空间 X 中的全体可数子空间组成的族. 令$C=\oplus\mathcal{C}$, 定义 $f:C\to X$ 是自然映射. 下证 f 是强序列商映射. 设$H\subset X$ 且 $f^{-1}(H)$ 是C中的强序列闭集, 对于 H 中的序列 $\{x_n\}$, 如果 x 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点. 我们令 $A=\{x_n\mid n\in N\}$, 则 $A\subset f^{-1}(H)$ 而且 x 是 $\{x_n\}$ 在 C 中的一个聚点. 于是有 $x\in f^{-1}(H)$, 即 $f(x)\in H$. 从而H是强序列闭集, 故 f 是强序列商映射. 由(2)可得, f 是商映射.

(3)$\Rightarrow$(4). 显然.

(4)$\Rightarrow$(1). 由于商映射保持可数 tightness, 只需证明局部可数空间具有可数 tightness 即可. 设 X 是局部可数空间. 若 $x\in\overline{A}\subset X$. 存在$x$的开邻域$V$, 使得 V 是可数集, 则$x\in\overline{V\cap A}$, 显然$V\cap A$是A的可数子集. 故 X 具有可数 tightness.

3.3 一些反例

下面找出一些例子说明与sq空间相关的空间类的关系, 及强序列商映射与几类映射之间的互不蕴含关系. 首先介绍几个相关定义.

定义 3.3.1 设H是空间 X 的子集. H称为 X 的k闭集[8], 若对 X 的每一紧集K有 $K\cap H$ 是K的闭集. 空间 X 称为k空间[22], 若 X 的每一k闭集是 X 中的闭集. 空间 X 称为kq空间[9], 若 X 的每一序列闭集是 X 中的k闭集.

显然, X 是序列空间当且仅当 X 是k空间和kq空间[9].

定义 3.3.2 $f:X\to Y$ 称为k商映射[8], 若$U\subset Y$ 且 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的k闭集, 则U 是Y中的k闭集.

例 3.3.3 kq空间$\nRightarrow$ sq空间.

设$X=\{0\}\bigcup N^2$为S_2(例 2.3.8)的子空间. 由于X是具有点G_δ性质的T_2空间, 由[23]中定理 3.8, 所以X是kq空间. 另一方面, 该空间中N^2是序列闭于X, $(0,0)$是N^2的聚点, 但$(0,0)\notin N^2$, 因此N^2不是强序列闭集. 因此X不是sq空间.

由于k和kq空间是序列空间, 从而是sq空间(矛盾), 于是此空间也不为k空间.

例 3.3.4 sq空间$\nRightarrow$ kq空间.

设$X=[0,\omega_1]$是具有通常序拓扑的空间, 则X是k空间但不是序列空间, 所以X不是kq空间. 下证X是sq空间. 设$H\subset X$是序列闭集但不是强序列闭集, 则存在$\{x_n\}\subset H$, 使$\{x_n\}$有聚点$x_0\notin H$. 若$x_0=\omega_1$, 则$x_n\neq\omega_1$. 于是$x_n<\omega_1$, 因此存在$\alpha<\omega_1$使得对每一$n\in N$有$x_n<\alpha<\omega_1$, 则x_0的邻域$(\alpha,\omega_1]$不含有任一x_n. 这与x_0是$\{x_n\}$的聚点矛盾, 所以$x_0\neq\omega_1$. 由于x_0在$[0,\omega_1)$中有可数邻域基, 则序列$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_i}\}$收敛到x_0, 则H不是序列闭集(与假设矛盾). 故$[0,\omega_1]$是sq空间.

由于可数 tightness 和sq空间是序列空间, 从而是kq空间矛盾, 于是此空间也不具有可数 tightness.

例 3.3.5 k空间$\nRightarrow$ sq空间.

设βN是N的 Stone-Čech 紧化. 该空间为k空间. 下证其不是sq空间, 因为N不存在非平凡收敛子列收敛到$\beta N-N$, 所以N为序列闭集. 但$\beta N-N$中的点都是N中序列的聚点, 所以N不是强序列闭集. 故βN不是sq空间.

例 3.3.6 sq空间$\nRightarrow$ k空间.

对不可数集合 X，取定 $p\in X$. 定义 Fortissimo 空间 X_p 如下[25]: 对 $F\subset X$，$F\in\tau^c(X)$ ($\tau^c(X)$ 为空间 X 的闭集族)当且仅当或者 $p\in F$，或者 F 是可数集. 下证 X_p 中每个集合都为强序列闭集: 任取 $H\subset X_p$，任取 $\{x_n\}\subset H$，设 x 是 $\{x_n\}$ 的聚点，那么 $\{x_n\mid n\in N\}$ 是闭集，则存在 $n_0\in N$ 使得 $x=x_{n_0}\in H$. 故 X_p 是 sq 空间. 再证 X_p 不为 k 空间. 令 $P=X_p-\{p\}$，则 P 不是闭集. 设 K 为 X_p 中的紧集，则 K 为有限集[26]，从而 $K\cap P$ 也为有限集，因此 $K\cap P$ 闭于 K，所以 P 为 k 闭集. 故 X_p 不是 k 空间.

例 3.3.7 强序列商映射 $\not\Rightarrow$ 序列商映射.

设 βN 是 N 的 Stone-Čech 紧化，$N^*=N\cup\{\infty\}$ 是 N 的一点紧化，定义映射 $f:\beta N\to N^*$ 如下: 若 $n\in N$，则 $f(n)=n$；若 $p\in\beta N-N$，则 $f(p)=\infty$. 那么 f 不是序列商映射[8]. 下证 f 为强序列商映射. 因为若 $F\subset N^*$ 非强序列闭集，则 $|F|=\omega$，$\infty\notin F$，从而 $f^{-1}(F)$ 是 N 的无限子集且聚点不在 $f^{-1}(F)$ 中，则 $f^{-1}(F)$ 不是强序列闭集.

例 3.3.8 序列商映射 $\not\Rightarrow$ 强序列商映射.

采用文[21]中的例 3.9 进行说明. 设 $Y=\beta N$ 为 N 的 Stone-Čech 紧化，X 为集合 βN 赋予离散拓扑，定义 $f:X\to Y$ 为恒等映射，此映射为序列覆盖映射，因此为序列商映射. 下证 f 非强序列商映射. 因为 $f^{-1}(N)$ 为 X 的强序列闭集，但 N 并非 $Y=\beta N$ 的强序列闭集，所以 $f:X\to Y$ 不是强序列商映射.

例 3.3.9 k 商映射 $\not\Rightarrow$ 强序列商映射.

取 S_2 为 Arens 空间(例 2.3.8)，X 为集合 S_2 的子空间 $\{0\}\cup N^2$ 赋予离散拓扑. 定义 $f:X\to\{0\}\cup N^2$ 为恒等映射. 可知 f 为 k 商映射[8]. 又 $X-\{0\}=f^{-1}(N^2)$ 在 X 中为强序列闭集，但 $N^2-\{0\}$ 不是 $\{0\}\cup N^2$ 的强序列闭集. 所以 f 不是强序

列商映射.

例 3.3.10 强序列商映射$\nRightarrow k$商映射.

采用文[8]的例 4.4 来说明. 设$Y=[0,\omega_1]$是序数空间, 其中ω_1是第一个不可数序数. 对每一$n\in N$, 令$X_n=\{(\alpha,\frac{1}{n})\mid\alpha\in[0,\omega_1)\}$, 再令$X=\{\omega_1\}\cup(\bigcup_{n\in N}X_n)$. X的拓扑定义如下: ①对$p=(\alpha,\frac{1}{k})\in X_k$, 其中$\alpha\in[0,\omega_1)$, $k\in N$, 则p的邻域基元形如$\{(\beta,\frac{1}{k})\mid\beta\in U\}$, 其中$U$是$\alpha$在$[0,\omega_1]$中关于序拓扑的基本开集. ②$\omega_1$的邻域基元形如$\{\omega_1\}\cup(\bigcup_{\beta\in U'}\{(\beta,\frac{1}{n})\mid n\geq n_0\})$, 这里$U'=U-\{\omega_1\}$, U是ω_1在序数空间$[0,\omega_1]$中的基本开集, 而且$n_0\in N$. 定义映射$f:X\to Y$使得对每一$(\alpha,\frac{1}{k})\in X-\{\omega_1\}$,有 $f((\alpha,\frac{1}{k}))=\alpha$和$f(\omega_1)=\omega_1$. 该映射为序列商映射但不是$k$商映射[8]. 由例 3.3.4 可知$Y$为$sq$空间, 再由定理 3.2.8(2)可得$f$是强序列商映射.

例 3.3.11 强序列商映射$\nRightarrow$商映射.

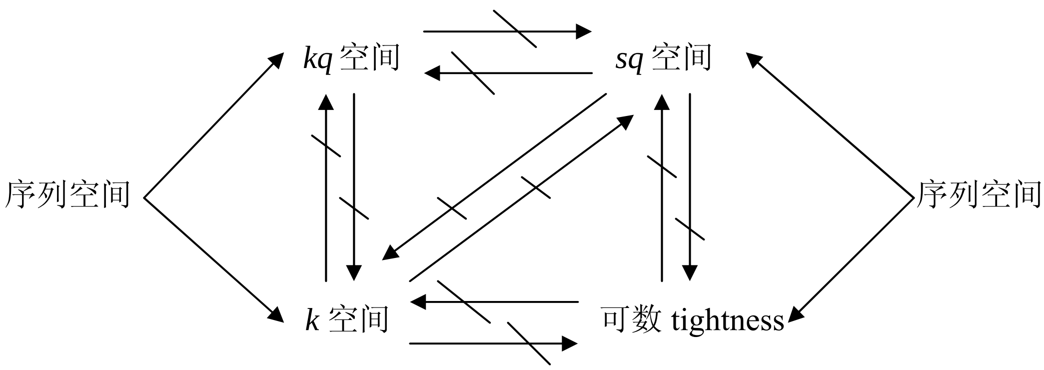
令$X=[0,\omega_1]$, 其中ω_1是孤立点, 其余点具有通常序拓扑邻域. $Y=[0,\omega_1]$是具有通常序拓扑的空间. 定义$f:X\to Y$为恒等映射. 由于$f^{-1}(\{\omega_1\})=\{\omega_1\}$在$X$中开的, 但$\{\omega_1\}$在$Y$中非开, 所以$f$不是商映射. 另一方面, 若$F$不是$Y$中的强序列闭集, 则存在序列$\{y_n\}\subset F$具有聚点$y\notin F$. 这时$y\neq\omega_1$(见例 3.3.4 中的证明), 因此$y\in[0,\omega_1)$. 不妨设所有的$y_n\neq\omega_1$, 于是$y_n,y\in[0,\omega_1)$, 所以在$X$中$\{y_n\}$有聚点$y\notin f^{-1}(F)$, 因此$f^{-1}(F)$非强序列闭集. 故$f$是强序列商映射.

例 3.3.12 商映射$\nRightarrow$强序列商映射.

设映射$f:[0,\omega_1]\to\{0,1\}$, 其中$f([0,\omega_1))=\{0\}$, $f(\{\omega_1\})=\{1\}$. $[0,\omega_1)$中的点是离散点, ω_1是具有序拓扑邻域, $\{0,1\}$赋予商拓扑, 则f是商映射. 下证f不是强序列商映射, 因为$[0,\omega_1]$不具有可数 tightness, 由定理 3.2.10(1)可知f不是

强序列商映射.

从上面几个例子中可以知道: 强序列商映射与序列商映射、k 商映射、商映射是互不蕴含的. 下面列出几个相关空间之间的关系图:



第 4 章 弱双序列空间的一些性质

本章主要利用集列覆盖映射和弱双商映射来刻画弱双序列空间的特征, 然后讨论和弱双序列空间有关的一些性质.

4.1 弱双序列空间

下面介绍弱双序列空间及一些相关概念.

定义 4.1.1[11] X 上的非空集族ξ, 如果$A, B \in \xi$(对可数子集族$\mu \subset \xi$)存在$C \in \xi$, 使得$C \subset A \bigcap B$ ($C \subset \bigcap \mu$), 则称ξ为 X 的滤子基(ω滤子基). 我们称滤子ξ与η网状相交, 若ξ中每一元与η中每一元相交.

定义 4.1.2[11] 若拓扑空间在$x \in X$ 是弱双序列的, 当对 X 上任意的聚点在$x \in X$ 的ω滤子基ξ, 存在 X 中可数的滤子基μ收敛到x并且与ξ网状相交. 空间X 是弱双序列空间, 若在 X 上每一点都是弱双序列的.

定义 4.1.3[11] 对任意的$y \in Y$, $\mathcal{U}$是 X 中开集组成的 $f^{-1}(y)$的覆盖, 存在可数多个$U \in \mathcal{U}$, 使得$\{f(U) \mid 可数个 U \in \mathcal{U}\}$覆盖 $y \in Y$ 的某邻域, 则映射 $f: X \to Y$ 是弱双商映射.

定义 4.1.4[13] 设 X 是拓扑空间, $\{A_n\}$是 X 中的集列且$x \in X$. 如果对x的任意邻域U, 存在$m \in N$, 使得对任意$n > m$, 有 $A_n \subset U$, 则称$\{A_n\}$收敛于x.

定义 4.1.5[13] 映射 $f: X \to Y$ 称为集列覆盖映射, 若$\{A_n\}$是Y中收敛于y的递减集列, 则存在$x \in f^{-1}(y)$及 X 中收敛于x的递减集列$\{B_n\}$使得每一$n \in N$, $f(B_n) = A_n$.

由定义容易知道集列覆盖映射是序列覆盖映射, 反之不成立[5].

关于弱双序列空间和弱双商映射有以下一些关系:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{弱双序列空间} \arrow[dr] & \\
\text{双序列空间} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Fréchet 空间} \\
 & \text{可数双序列空间} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{弱双商映射} \arrow[dr] & \\
\text{双商映射} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{伪开映射.} \\
 & \text{可数双商映射} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

4.2 主要结果

首先讨论一下弱双商映射的性质.

定理 4.2.1 设映射 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$.

(1) 若 f，g 均为弱双商映射, 则 $f\circ g:X\to Z$ 是弱双商映射;

(2) 若 $f\circ g:X\to Z$ 是弱双商映射, 则 g 为弱双商映射.

证明: (1) 任取 $z\in Z$，设 $\mathcal{U}$ 是 X 中开集组成的 $(f\circ g)^{-1}(z)$ 的覆盖. 对于每一 $y\in g^{-1}(z)$，则 $f^{-1}(y)\subset (f\circ g)^{-1}(z)$，且 $\mathcal{U}$ 是 $f^{-1}(y)$ 的开覆盖, 由于 f 是弱双商映射，存在 $\mathcal{U}$ 的可数子族 $\mathcal{U}_y$ 使得 $y\in \mathrm{int}(\bigcup f(\mathcal{U}_y))$，于是 $g^{-1}(z)$ 被 $\{\mathrm{int}(\bigcup f(\mathcal{U}_y))\mid y\in g^{-1}(z)\}$ 覆盖. 又由于 g 是弱双商映射存在 $g^{-1}(z)$ 的可数子族 $\bigcup\{y_i\mid i\in N\}$ 使得 $\{g(\bigcup f(\mathcal{U}_{y_i}))\mid i\in N\}$ 是 $z\in Z$ 的某邻域,又因为 $\bigcup_{i\in N}\mathcal{U}_{y_i}$ 是可数的, 且 $\bigcup_{i\in N}\mathcal{U}_{y_i}\subset\mathcal{U}$，所以 $f\circ g:X\to Z$ 是弱双商映射.

(2) 任取 $z\in Z$，Y 中开集族 $\mathcal{V}$ 覆盖 $g^{-1}(z)$. $f^{-1}(\mathcal{V})$ 为 X 中开集族覆盖 $f^{-1}(g^{-1}(z))=(g\circ f)^{-1}(z)$，存在可数集族 $\mathcal{V}'\subset\mathcal{V}$，$(g\circ f)(f^{-1}(\mathcal{V}'))=g(\mathcal{V}')$ 覆盖 $z\in Z$ 的一个邻域. 所以 g 为弱双商映射.

接下来对弱双序列空间与弱双商映射之间的关系进行探讨, 对于度量空间映射的性质有如下的结论:

引理 4.2.2[11] 对映射 $f:X\to Y$ 下列性质等价:

(1) f 是弱双商映射;

(2) 若 $\mathcal{F}$ 是以 $y\in Y$ 为聚点的 ω 滤子基, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使得 $f^{-1}(\mathcal{F})$ 是以 x 为聚点.

引理 4.2.3 $f:X\to Y$ 是弱双商映射, 若 X 弱双序列空间, 则 Y 为弱双序列空间.

证明: $f:X\to Y$ 是弱双商映射, X 弱双序列空间, 对任意 $y\in Y$, ξ 是以 $y\in Y$ 为聚点的任意 ω 滤子基. 因为 f 是弱双商映射, 由引理 4.2.2, 取 $x\in f^{-1}(y)$ 是 $f^{-1}(\xi)$ 的聚点, 存在可数的滤子基 μ 收敛到 x 且与 $f^{-1}(\xi)$ 相交, 则 $f(\mu)$ 收敛到 y 并且与 ξ 相交, 因此 Y 是弱双序列空间.

定理 4.2.4[11] 拓扑空间 Y 是弱双序列空间当且仅当它是度量空间的弱双商映像.

引理 4.2.5[15] 对于任一空间 Y, 存在度量空间 X 及连续的满射 $f:X\to Y$ 具有下述性质: 如果 $\{A_n\}$ 是某点 $y\in Y$ 的递减的网, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$ 及 x 在 X 中递减的邻域基 $\{B_n\}$ 使得对任意的 $n\in N$ 有 $f(B_n)=A_n$.

在 F. Siwiec[12]中描述了空间 Y 是可数双序列空间当且仅当映满 Y 的每一序列覆盖映射是可数双商映射, 然而对于 Y 是双序列空间当且仅当映满 Y 的每一序列覆盖映射是双商映射的描述是不成立的, 对本章中的弱双序列空间亦不成立. 但将序列覆盖映射加强为集列覆盖映射时, 相应的结论却是成立的.

定理 4.2.6 $f:X\to Y$ 是集列覆盖映射, Y 是弱双序列空间, 则 f 是弱双商映射.

证明: Y 是弱双序列空间. 设 $\mathcal{F}$ 是以 $y\in Y$ 为聚点的 ω 滤子基, 则存在可数的滤子基 $\mathcal{G}$, 使得 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{F}$ 相交且收敛于 $y\in Y$. 因为 f 是集列覆盖映射, 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 及 X 中收敛于 x 的递减集列 $\{B_n\}$ 且对每一 $n\in N$, 对于 $G_n\in\mathcal{G}$ 有 $G_n=f(B_n)$. 由于 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{F}$ 相交, 于是 $\{B_n\}$ 与 $f^{-1}(\mathcal{F})$ 相交. 若 $F\in\mathcal{F}$ 且 U 是 x

在 X 中的任意邻域，那么存在 $n \in N$，使得 $B_n \subset U$ 有 $B_n \bigcap f^{-1}(F) \neq \varnothing$，所以有 $U \bigcap f^{-1}(F) \neq \varnothing$，从而 $x \in \overline{f^{-1}(F)}$. 故 x 是 $f^{-1}(\mathcal{F})$ 的聚点. 由引理 4.2.4, 所以 f 是弱双商映射.

下面给出集列覆盖映射是弱双商映射的等价刻画, 并由此得出弱双序列空间的映射刻画的推论.

推论 4.2.7 下列条件相互等价:

(1) X 是弱双序列空间;

(2) 映满 X 的每一集列覆盖映射是弱双商映射;

(3) X 是度量空间的弱双商映像.

证明: (1)$\Rightarrow$(2). 由定理 4.2.6 可得.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由引理 4.2.5, 存在度量空间 M 及连续的集列覆盖映射 $f: M \to X$，由(2)得 f 是弱双商映射.

(3)$\Rightarrow$(1). 由于弱双商映射保持弱双序列空间.

参考文献

[1] Arhangel'skiǐ A.V., Mappings and spaces[J]. Russian Math. Surveys, 1966, 21: 115-162.

[2] Hodel R.E., k-structures and topology[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1994, 278: 50-63.

[3] Arhangel'skiǐ A.V., Franklin S.P., Ordinal invariants for topological spaces[J]. Michigan Math. J., 1968, 15: 313-320.

[4] Hong W.C., A note on weakly first countable spaces[J]. Commun. Korean Math. Soc., 2002, 17: 531-534.

[5] Hong W.C., A note on spaces which have countable tightness[J]. Coummun. Korean Math. Soc., 2011, 26(2): 297-304.

[6] Boone J.R., Siwiec F., Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math. J., 1976, 26: 174 -182.

[7] Arhangel'skiǐ A.V., Factor mappings of metric spaces[J]. Soviet Math. Dokl., 1964, 5: 368-371.

[8] Boone J.R., On k-quotient mappings[J]. Pacific J. Math., 1974, 5l(2): 369-377.

[9] Lin Shou, Zheng Chunyan, The k-quotient images of metric spaces[J]. Commun. Korean Math. Soc., 2012, 27: 377-384.

[10] Arhangel'skiǐ A.V., Bisequential spaces, tightness of products, and metrizability conditions in topological group[J]. Trans. Moscow Math. Soc., 1994, 55: 207-219.

[11] Liu Chuan, On weakly bisequential spaces[J]. Comment Math. Univ. Carolin., 2006, 41(3): 611-617.

[12] Siwiec F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl., 1971, 1: 143-154.

[13] Yanagimoto A., On set-sequence-covering maps and bi-sequential spaces[J]. Math. Japon., 1978, 23: 393-399.

[14] Michael E.A., A quintuple quotient quest[J]. General Topology Appl., 1972, 2: 91-138.

[15] Michael E.A., On representing spaces as images of metrizable and related spaces[J].General

Topology Appl., 1971, 1: 329-343.

[16] 林寿, 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[17] 林寿, 度量空间与函数空间的拓扑[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[18] 高国士, 拓扑空间论(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[19] Siwiec F., On defining a space by a weak base[J]. Pacific J. Math., 1974, 52: 133-145.

[20] Arhangel'skiǐ A.V., Pontryagin L.S. (Eds.), General Topology I[M]. Springer-Verlage EMS17, 1990.

[21] 林寿, 关于序列覆盖 s 映射[J]. 数学进展, 1996, 25(6): 548-551.

[22] Engelking R., General Topology (revised and completed edition) [M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[23] Franklin S.P., Spaces in which sequences suffice[J]. Fund. Math., 1965, 57: 107-115.

[24] Siwiec F., Generalizations of the first axiom of countability[J]. Rocky Mountain J. Math., 1975, 5: 1-60.

[25] Steen L.A., Jr. Seebach J.A., Counterexamples in topology (Second Edition)[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.

[26] 林寿, 广义度量空间与映射(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[27] Guthrie J.A., A characterization of $\aleph_0$ -spaces[J]. General Topology Appl.,1971, 1: 105-110.

[28] Lin Shou, A note on the Arens' spaces and sequential fan[J]. Topology Appl., 1997, 81: 185-196.

[29] Sirois-Dumais R., Quasi- and weakly-quasi-first-countable space[J]. Topology Appl., 1980, 11: 223-230.

[30] Arhangel'skiǐ A.V., The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces[J]. Soviet Math. Dokl., 1972, 13: 265-268.

[31] Franklin S. P., Rajagopalan M., Some examples in topology. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 155: 305–314.

致　谢

秋去春来，寒暑易节，三年时光匆匆而过。我再次坐在熟悉自习室，听着潺潺流水夹杂着鸟儿欢叫声，周围的一切都是那么的熟悉。学校的木棉花开了，似乎比往年更多、更红，看着随风飘舞的木棉花絮，我知道我即将毕业了。留不住的岁月，留下的是三年来的求学之路上鼓励和支持过我的老师和同学带给我的回忆，我想在此表达我最真诚的谢意。

首先衷心感谢我的导师林寿教授，本论文是在林老师的亲切关怀和悉心指导下完成的。在整个研究生学习期间，林老师为我创造了良好的学习环境和学习氛围，始终给予我严格的要求、充分的信任、热情的鼓励和全面锻炼的机会，所有这些一起奠定了我顺利完成论文的坚实基础。林老师严肃的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风深深地感染和激励着我，从您身上我学到了许多处事之理、做人之道，并将在以后的人生道路上给予我无限的启迪。三年来，林老师不仅在学业上给予我精心指导，同时在思想上、生活上给我以无微不至的关怀。在这即将完成学业之际，谨向导师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

感谢李进金院长时常对我关心和教导！

感谢李克典教授三年来对我的学习和实践上的指导与关怀！

感谢我的师兄林福财、谢利红，师姐郑春燕和张静以及朱忠景同学给我的关心和帮助！

感谢数学与信息科学系的领导和老师们三年来的关心和帮助，是他们的教育和鼓励不断激励着我．感谢 09 级同学们及学长、学姐、学弟、学妹们在漳州师范学院的共同的美好回忆，是你们的欢笑使得在枯燥的科研路上增添了活力与快乐。

感谢我的家人给予我精神上、生活上、学习上的关怀和支持，是他们给了我前进的动力，在此祝他们身体健康，快乐幸福！

攻读硕士学位期间完成的论文

[1] 张金煌, 严格 p 空间的可数积. 漳州师范学院学报, 2011, 30: 1-3.

[2] Lin Shou, Zhang Jinghuang, Star operators on sn-networks. 已被"Commun. Korean Math. Soc."录用.

[3] 林寿, 张金煌, 关于 sq 空间及其结论. 已完成.

[4] 张金煌, 弱双序列空间的一些性质. 已完成.