四川大学

博士学位论文

题　目　$\aleph_0$ 弱基及相关问题的研究

作　者　沈　荣　鑫　完成日期　2009年 3 月 25 日

培养单位　四川大学数学学院

指导教师　林　寿　教授

专　　业　基　础　数　学

研究方向　拓　扑　学

授予学位日期　　年　　月　　日

引 言

度量化问题是产生广义度量空间的重要起源之一 [26]. 自从上世纪 50 年代初 R. H. Bing [19], J. Nagata [95] 和 Yu. Smirnov [106] 给出了度量空间的内在刻画以来，对 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理的各种推广形成了形形色色的广义度量空间. 如， A. V. Arhangel'skiĭ [5] 定义了网络作为基的推广并研究了具有可数网络的空间. 进一步， A. V. Arhangel'skiĭ [9] 引进了弱基， O' Meara [87] 引进了 k 网， J. A. Guthrie [47] 引进了 cs 网，高智明 [39] 引进了 cs^* 网. $\aleph_0$ 弱基的概念是刘川和林寿 2007 年在 [80] 中提出的，然而，其定义的本质可以追溯到 1980 年 R. Sirois-Dumais 在 [105] 中引入的弱拟第一可数空间. 事实上，弱拟第一可数空间可以被特征为在每一点处都具有可数的局部 $\aleph_0$ 弱基的空间. 作为弱基的推广， $\aleph_0$ 弱基有着更加灵活的性质，例如，它可以被用来研究象序列扇 S_ω 这样的典型广义度量空间，以及刻画度量空间的某些可数到一映象. R. Sirois-Dumais [105] 证明了空间 X 具是弱拟第一可数空间当且仅当它是度量空间的商边界可数映象. 刘川和林寿 [80] 证明了空间 X 具有可数 (点可数) $\aleph_0$ 弱基当且仅当它是可分度量空间 (度量空间) 的商可数到一映象. 至此， $\aleph_0$ 弱基作为一种新的网络，与度量空间的各种可数到一映象紧密联系了起来. 刘川和 Y. Tanaka [83] 中提出问题：是否每一 Fréchet, 弱拟第一可数的 $\aleph$ 空间都是某一度量空间的闭可数到一映象？刘川和林寿 [80] 提出问题：是否每一度量空间的商 σ 紧映象都是某一度量空间的商可数到一映象？这两个问题都与 $\aleph_0$ 弱基息息相关. 围绕这两个问题，本文第二章和第三章系统讨论了 $\aleph_0$ 弱基以及具有特定 $\aleph_0$ 弱基的空间的各种性质，特别是他们和度量空间各种商映象之间的联系. 第二章介绍 $\aleph_0$ 弱基和弱拟第一可数空间的各种基本性质. 第三章第一节讨论具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的空间以及与此相关的度量空间的某些商映象. 在这一节我们所建立的定理 3.1.5 和定理 3.1.8, 部分回答了上述的问题. 第三章第二节我们主要讨论具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间和具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基的空间，以及它们之间的关系. 第三章第三节讨论具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间上的覆盖性质和具有 cs* 正则的 $\aleph_0$ 弱基的空间的度量化定理.

广义度量空间的另一重要起源是空间和映射的相互分类问题 [26]. 近来，M. Sakai [102, 103] 研究了使映满其上的每一序列覆盖映射都是双商映射的空间，以及使映满其上的每一序列覆盖映射都是弱开映射的空间，给出了它们的

内在刻画. 序列商映射是序列覆盖映射最直接的推广，如果将 M. Sakai 结果中的序列覆盖映射换为序列商映射，情形如何？在第四章第一节中我们证明了这样的空间正是离散空间.

AP 空间 [116] 是 G. T. Whyburn [120] 早在 1970 年就引进的一类空间，在 [120] 中，它们被特征为使映满其上的每一商映射都是伪开映射的空间. 在历史文献中， AP 空间曾有过许多不同的名称，如， accessibility 空间 [120], Whyburn 空间 [97]. 近来，人们发现这一空间类在范畴拓扑和函数空间理论中有着深刻的应用 [100, 116, 99]. 在本文第四章第二节中，我们利用弱拓扑给出了 AP 空间一个新的刻画，证明了如果正则空间中所有聚点组成的集合是一个离散集的话，那么这个空间必然是 AP 空间，作为应用，每一个空间都可以表示成某个 AP 空间的几乎开映象. 在 [116] 中， V. V. Tkachuk 和 I. V. Yaschenko 详细讨论了赋予点开拓扑的函数空间 $C_p(X)$ 中的 AP 性质. 我们将其结果推广到更一般的赋予集开拓扑的函数空间 $C_\alpha(X)$ 中，这里 α 是 Tychonoff 空间 X 的一个紧网络且关于有限并封闭.

拓扑群理论是现代数学的重要分支，它对数论，李群，表示论，微分几何与调和分析等数学分支影响深远. 对拓扑群中的拓扑性质的研究始于 20 世纪上半叶 P. S. Alexandroff, P. Urysohn, G. Birkhoff 和 S. Kakutani 等人的工作 [3, 23, 55, 56, 57, 117]. 此后，一批拓扑学家们投入了这个领域的研究，如， M. Jr. Hall [48], E. Hewitt [49], E. Hewitt 和 K. A. Ross [50], D. Montgomery 和 L. Zippin [93], S. Grosser 和 M. Moskowitz [44], T. Wilcox [121], B. E. Šapirovskiĭ [104], A. V. Arhangel'skiĭ [11, 12], M. Ismail [52], W. W. Comfort 和 K. A. Ross [31, 32] 等. W. W. Comfort 在 [29] 中很好地总结和归纳了这些结果. 近来， A. V. Arhangel'skiĭ, V. V. Uspenskij, T. Banakh, L. Zdomskyi 和刘川等人研究了拓扑群中的一些广义度量性质 [14, 16, 17, 78]. A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij [16] 证明了在一定条件下商群的拓扑性质能反射出初始群的拓扑性质，并提出问题：设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是层空间，空间 G 是否一定是层空间？在本文第五章第一节中，我们证明了：设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是层空间 (半层空间， k 半层空间， σ 空间), 则空间 G 也是层空间 (半层空间， k 半层空间， σ 空间). 从而肯定回答了这个问题. 刘川在一次学术会议上提出不含闭子空间同胚于 S_ω 的弱拟第一可数拓扑群是否可度量化的问题. 在第五章第二节中，我们证明了 cs 第一可数的序列拓扑群是度量化的当且仅当它不含闭子空间同胚于 S_ω, 肯定地回答了这一问题.

摘　要

$\aleph_0$ 弱基及相关问题的研究

基础数学专业

研究生 沈荣鑫　　**指导教师** 林寿

本文主要致力于广义度量空间理论中关于 $\aleph_0$ 弱基及相关问题的讨论，共分四部分.

第一部分 (即第二章): 讨论 $\aleph_0$ 弱基和弱拟第一可数空间的基本性质.

第 1 节讨论 $\aleph_0$ 弱基和各种常用网络之间的关系以及相关的弱拟第一可数空间的基本性质. $\aleph_0$ 弱基蕴涵 cs^* 网，但是 $\aleph_0$ 弱基和 cs 网以及 k 网互不蕴涵. 正则空间是弱第一可数的当且仅当它是具有序列点 G_δ 性质的弱拟第一可数空间并且不含闭子空间同胚于序列扇空间 S_ω.

第 2 节讨论弱拟第一可数空间的遗传性和可积性. 弱拟第一可数空间不具有遗传性和可积性，对空间 X, X 是遗传弱拟第一可数的当且仅当它是拟第一可数的；如果空间 X 和 Y 都是弱拟第一可数的，则 $X \times Y$ 是弱拟第一可数的当且仅当 $X \times Y$ 是序列空间或者 k 空间.

第 3 节讨论弱拟第一可数空间的映射性质. 弱拟第一可数空间被商，边界可数映射和商， 1 序列覆盖映射保持，但是不被完备映射保持. 对于 k 半层的 k 空间上的闭映射，如果象空间是弱拟第一可数的，则该映射每一纤维的边界是某个 σ 紧集的闭包，这部分回答了 Y. Tanaka 和刘川在 [*Topology Proc.*, **24** (1999), 323–344] 中提出的一个问题.

第二部分 (即第三章): 系统讨论具有特定 $\aleph_0$ 弱基的空间类的性质以及它们与各种广义度量空间类之间的联系.

第 1 节研究具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的空间的性质并将其表示成度量空间确定的商映像. 对于正则空间 X, 下面的条件等价： (i) X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基； (ii) X 具有 σ 离散 $\aleph_0$ 弱基， (iii)X 是弱拟第一可数的 $\aleph$ 空间； (iv) X 是某个度量空间的商， σ, 可数到一 (σ 紧，边界可数，边界 σ 紧) 映像. 空间是某个度量空间的商 σ 紧映像当且仅当它具有点有限 $\aleph_0$ 弱展开. 空间是某个度量空间的商 s, 边界可数映像当且仅当它具有点可数 $\aleph_0$ 弱基. 这些结果部分回答了刘川和林寿在 [*Topology Appl.*, **154** (2007), 449–454] 中提出的一个问题.

第 2 节主要研究具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间以及它们和具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基的空间的关系. 空间具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基当且仅当它是具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的弱拟第一可数 (k) 空间. 在连续统假设下，每一具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正则可分空间 X 都具有可数 $\aleph_0$ 弱基，这里连续统假设可以用条件 "X 是 $\aleph_1$ 紧的" 或者 "X 的序列式序可数" 来代替.

第 3 节讨论具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间上的覆盖性质和具有 cs* 正则 $\aleph_0$ 弱基的空间的度量化定理. 我们证明了每一具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 的以及每一具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正规空间是遗传仿紧的. 这改进了高智明 [*Math. Japonica*, **37** (1992), 323–328] 和林寿 [*数学进展*, **32** (2003), 118–120] 中的结果. 正则空间 X 是可度量化的当且仅当 X 具有 cs* 正则的 $\aleph_0$ 弱基. 这改进了燕鹏飞和林寿 [*Topology Proc.*, **30** (2006), 627–634] 中的结果.

第三部分 (即第四章): 给出离散空间的映射刻画并研究了 AP 空间及其在函数空间中的应用.

空间 X 是离散的当且仅当每一映满 X 的序列商映射是双商的 (弱开的，开的). AP 空间是 Fréchet 空间的推广，它可以看成是使映满其上的每一商映射都是伪开映射的空间. 我们给出 AP 空间的一个新刻画，并利用其证明了每一空间都是某一 AP 空间的几乎开映像.

设 α 是 Tychonoff 空间 X 的一个紧网络且关于有限并封闭， $C_\alpha(X)$ 是其上的函数空间，我们证明了如果 $C_\alpha(X)$ 是一个 AP 空间且 X 是仿紧的，则 X 是一个 Hurewicz 空间；假设 $C_\alpha(X)$ 是一个具有可数 tightness 的 AP 空间，则 $C_\alpha(X)$ 是离散生成的. 这些结果改进了 V. V. Tkachuk 和 I. V. Yaschenko [*Comment. Math. Univ. Carolinae*, **42** (2001), 393–403] 中关于点开拓扑的结果.

第四部分 (即第五章): 研究了拓扑群上的层空间，半层空间， k 半层空间，以及 cs 第一可数空间的性质，回答了两个问题.

第 1 节证明了：设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是层空间 (半层空间， k 半层空间， σ 空间), 则空间 G 也是层空间 (半层空间， k 半层空间， σ 空间). 这肯定回答了 A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij 在 [*Applied General Topology*, **7** (2006), 67–72] 中提出的一个问题.

第 2 节证明了：对序列的， cs 第一可数的，正则仿拓扑群 G, G 是第一可

数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝．作为应用，弱拟第一可数的拓扑群 G 可度量化当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝．这回答了刘川在 2008' 漳州一般拓扑学学术会议上提出的一个问题.

关键词：$\aleph_0$ 弱基；离散空间； AP 空间；函数空间；层空间；拓扑群.

Abstract

Researches on $\aleph_0$-weak bases and related matters

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: SHEN Rong-Xin **Supervisor:** LIN Shou

This thesis is devoted to studying $\aleph_0$-weak bases and related matters in the theory of generalized metrizable spaces. The contents are arranged into four parts.

In the first part (Chapter 2), we discuss the basic properties of $\aleph_0$-weak bases and the weakly quasi-first-countable spaces.

In Section 2.1, we discuss the relations between $\aleph_0$-weak bases and some other familiar forms of networks of the topological spaces, and the related properties of the weakly quasi-first-countable spaces. For a space, every $\aleph_0$-weak base is a cs^*-network. However, every $\aleph_0$-weak base for a spaces is unnecessary to be a cs-network (k-network), and every cs-network (k-network) for a spaces is unnecessary to be an $\aleph_0$-weak base. The weakly quasi-first-countable spaces are the spaces each point of which has a countable local $\aleph_0$-weak base. A regular space is weakly first-countable if and only if it is a weakly quasi-first-countable space which has the sequentially point-G_δ property and has no closed copies of S_ω.

In Section 2.2, we discuss the hereditary property and productive property of weakly quasi-first-countable spaces. The subspaces or products of the weakly quasi-first-countable spaces are unnecessary to be weakly quasi-first-countable. For a space X, X is hereditarily weakly quasi-first-countable if and only if X is quasi-first-countable. If the spaces X and Y are weakly quasi-first-countable, then $X \times Y$ is weakly quasi-first-countable if and only if $X \times Y$ is a sequential space (k-space).

In Section 2.3, we discuss the mapping property of weakly quasi-first-countable spaces. The weakly quasi-first-countable spaces are preserved by quotient, boundary-countable mappings and quotient, 1-sequence-covering mappings. The perfect mappings do not preserve the weakly quasi-first-countable spaces. For a closed mapping $f : X \to Y$, if X is a k-semi-stratifiable, k-space and Y is weakly quasi-first-countable, then each boundary of the fibers of f is the closure of some σ-compact subset of Y. This gives a partial answer to a question raised by Y. Tanaka and C. Liu in [*Topology Proc.*, **24** (1999), 323–344].

In the second part (Chapter 3), we systemically investigate the properties of the spaces with certain $\aleph_0$-weak bases and their communications with some classic generalized metrizable spaces.

In Section 3.1, we discuss the spaces with σ-locally finite $\aleph_0$-weak bases and characterize them by the certain quotient images of metric spaces. For a regular space X, the following conditions are equivalent: (i) X has a σ-locally finite $\aleph_0$-weak base; (ii) X has a σ-discrete $\aleph_0$-weak base, (iii) X is a weakly quasi-first-countable, $\aleph$-space; (iv) X is an image of a metric space under a quotient, σ, countable-to-one (σ-compact, boundary-σ-compact, boundary-countable) mapping. X is a quotient, σ-compact image of a metric space if and only if X has a point-finite $\aleph_0$-weak development. X has a point-countable $\aleph_0$-weak if and only if X is a quotient, boundary-countable, s-image of a metric space. These results partially answer a question posed by C. Liu and S. Lin in [*Topology Appl.*, **154** (2007), 449–454].

In Section 3.2, we discuss the spaces with σ-weakly hereditarily closure-preserving $\aleph_0$-weak bases and their communications with the spaces with σ-compact-finite $\aleph_0$-weak bases. A space has a σ-compact-finite $\aleph_0$-weak base if and only if it is an $\aleph_0$-weakly first-countable space (k-space) with a σ-weakly hereditarily closure-preserving $\aleph_0$-weak base. Under the continuum hypothesis (CH), every regular, separable space with a σ-weakly hereditarily closure-preserving $\aleph_0$-weak base has a countable $\aleph_0$-weak base, where the continuum hypothesis can be omitted if one of the following holds: (i) X is $\aleph_1$-compact; (ii) The sequential order of X is countable.

In Section 3.3, we discuss the covering properties on spaces with σ-closure-preserving $\aleph_0$-weak bases and the metrizable theorem on the spaces with cs*-regular $\aleph_0$-weak bases. We prove that every regular space (resp., normal space) with a σ-closure-preserving $\aleph_0$-weak base is a hereditarily meta-Lindelöf (resp., hereditarily paracompact) space, which improves the results of Z. Gao [*Math. Japonica*, **37** (1992), 323–328] and S. Lin [*Chinese Math. Adv.*, **32** (2003), 118–120] . A regular space X is metrizable if and only if X has a cs*-regular $\aleph_0$-weak base, which improve the result of P. Yan and S. Lin [*Topology Proc.*, **30** (2006), 627–634].

In the third part (Chapter 4), we characterize the discrete spaces by mappings and investigate the AP-spaces and their applications in the theory of function spaces.

A space X is discrete if and only if every sequentially quotient mapping onto X is bi-quotient (weak-open, open). AP spaces is the generalizations of the Fréchet spaces. They can be characterized to be the spaces every quotient mapping onto which is pseudo-open. We also find a new characterization of AP spaces. As an application, we prove that every space can be enumerated to be an almost-open image of some AP-space.

For a Tychonoff space X and a compact network α for X which is closed under finite unions, we denote by $C_\alpha(X)$ the space of all real-valued continuous functions on X with the set-open topology. We prove the following results: If $C_\alpha(X)$ is an AP-space and X is paracompact, then X is a Hurewicz space. Suppose that $C_\alpha(X)$ is an AP-space with countable tightness. Then $C_\alpha(X)$ is discretely generated. These results improve the results of V. V. Tkachuk and I. V. Yaschenko [*Comment. Math. Univ. Carolinae*, **42** (2001), 393–403] .

In the fourth part (Chapter 5), we discuss some generalized metrizable properties in topological groups. Two problems are solved.

In Section 5.1, we prove that for a topological group G and a locally compact metrizable subgroup H of G, if the quotient space G/H is stratifiable (resp. semi-stratifiable, k-semi-stratifiable, a σ-space) then the space G is stratifiable (resp. semi-stratifiable, k-semi-stratifiable, a σ-space), which gives an affirmative answer to a question raised by A. V. Arhangel'skiĭ and V. V. Uspenskij in [*Applied General Topology*, **7** (2006), 67–72].

In Section 5.2, we prove that for a sequential and cs-first-countable, regular paratopological group G, G is first-countable if and only if G contains no closed copy of S_ω. As an application, an $\aleph_0$-weakly first-countable topological group G is metrizable if and only if G contains no closed copy of S_ω. This gives the affirmative answer to a question raised by C. Liu in 2008' Zhangzhou Topology Seminar.

Key Words: $\aleph_0$-weak bases; discrete spaces; AP-spaces; function spaces; stratifiable spaces; topological groups.

目　录

第一章　预备知识

§1.1　记号和术语

约定：空间均指满足 $\mathbf{T}_2$ 分离公理的拓扑空间，映射均是连续满的.

本节定义文中常用的一些记号和术语.

1.1.1 实数子集

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线，$\omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{I}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的自然数集，正整数集，有理数集，无理数集，单位闭区间和非负实数集 . ω 也表示最小的无限序数. ω_1 表示最小的不可数序数. 记 $\mathbb{S}_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. $\aleph_0, \mathbf{c}$ 分别表示 $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 的基数；$\aleph_1$ 表示第一个不可数基数.

1.1.2 拓扑空间子集的运算

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑，$\tau^c(X)$ 表示 X 中闭集的全体. 在不引起混淆时，分别记 $\tau(X)$ 和 $\tau^c(X)$ 为 τ 和 τ^c. $\mathrm{I}(X)$ 表示 X 中所有孤立点组成的集合. 对 X 的子集 A 及 X 的子空间 (Y, τ') 的子集 Z,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包;

A° 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部;

∂A 表示 A 在 X 中的边界;

A^d 表示 A 在 X 中的聚点的集合;

$\mathrm{cl}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{cl}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的闭包;

$\mathrm{int}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{int}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的内部.

1.1.3 拓扑空间的集族

对空间 X, X 中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的，若各 x_n 是互不相同的. $\{x_n\}$ 称为是终于子集 $A \subset X$ 的，如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_n : n > m\} \subset A$.

对 X 的集族 $\mathcal{P}$, 记

$\mathcal{P}^{<\omega} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P} : \mathcal{F}$ 有限 $\}$;

$\mathcal{P}^F = \{\cup\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}\}$;

$\cup\mathcal{P} = \cup\{P : P \in \mathcal{P}\}$, $\mathcal{P}$ 的并;

$\cap\mathcal{P}=\cap\{P:P\in\mathcal{P}\},\mathcal{P}$ 的交;

$\mathcal{P}^{-}=\overline{\mathcal{P}}=\{\overline{P}:P\in\mathcal{P}\},\mathcal{P}$ 的闭包;

$\mathcal{P}^{\circ}=\{P^{\circ}:P\in\mathcal{P}\},\mathcal{P}$ 的内部;

$\bigoplus\mathcal{P}=\bigoplus\{P:P\in\mathcal{P}\},\mathcal{P}$ 的拓扑和.

对 $A\subset X,x\in X$, 记

$(\mathcal{P})_A=\{P\in\mathcal{P}:P\cap A\neq\emptyset\}$, $(\mathcal{P})_x=(\mathcal{P})_{\{x\}}$;

$\mathrm{st}(A,\mathcal{P})=\cup(\mathcal{P})_A$, $\mathrm{st}(x,\mathcal{P})=\cup(\mathcal{P})_x$;

$\mathcal{P}_{|A}=\{P\cap A:P\in\mathcal{P}\}$.

1.1.4 空间上的映射

设 X,Y 是空间, $f:X\to Y$.

对 $A\subset X$, f 在 A 处的限制 $f_{|A}:A\to f(A)$ 定义为对 $x\in A, f_{|A}(x)=f(x)$.

对 $B\subset Y,f$ 在 B 处的限制 $f_B=f_{|f^{-1}(B)}$.

若 $\mathcal{P}$ 是 X 的集族, 则 $f(\mathcal{P})=\{f(P):P\in\mathcal{P}\}$ 为 $\mathcal{P}$ 关于 f 的象.

若 $\mathcal{F}$ 是 Y 的集族, 则 $f^{-1}(\mathcal{F})=\{f^{-1}(F):F\in\mathcal{F}\}$ 为 $\mathcal{F}$ 关于 f 的逆象或原象.

1.1.5 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为可加的, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 具有性质 Φ.

(2) Φ 称为遗传的 (开遗传的, 闭遗传的), 若空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一子空间 (开子空间, 闭子空间) 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(4) Φ 称为被映射类 $\mathcal{L}$ 保持 (逆保持), 若映射 $f:X\to Y$, 其中 $f\in\mathcal{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

为了叙述方便起见, 术语 "Φ 空间" 、 "Φ 性质" 或 "Φ 空间性质" 将表示同一含意交换使用.

§1.2 广义度量空间类

定理 1.2.1 *(Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理)* 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 具有 σ 离散基 *[19]*;

(3) X 具有 σ 局部有限基 *[95, 106]*.

对上述定理中条件的各种弱化构成了形形色色的广义度量空间类, 下面我们列举本文所涉及到的几类广义度量空间以及一些常用的结论.

定义 1.2.2 空间 X 的集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 *[5]*, 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $P \in \mathcal{P}$, 使 $x \in P \subset U$. 具有 σ 局部有限网的正则空间称为 σ 空间 *[98]*.

σ 空间是最优美, 最有用的广义度量空间类, 从下面这个定理我们可以窥见一斑.

定理 1.2.3 *[110]* 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 σ 空间;

(2) X 具有 σ 离散闭网;

(3) X 具有 σ 局部有限 (闭) 网;

(4) X 具有 σ 闭包保持 (闭) 网.

定义 1.2.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一个覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为是 X 的一个 k 网 *[87]*, 如果对任意 X 中的紧集 K 和开集 U 满足 $K \subset U$, $K \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$ 对某个有限子族 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 成立;

(2) $\mathcal{P}$ 称为是 X 的一个 cs 网 *[47]*, 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L \subset U$, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $P \subset U$ 并且 L 终于 P;

(3) $\mathcal{P}$ 称为是 X 的一个 cs^* 网 *[39]*, 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L \subset U$, 存在 L 的子列 L' 以及 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $L' \subset P \subset U$.

X 称为是一个 $\aleph_0$ 空间 [89] ($\aleph$ 空间 [87]), 如果 X 是正则的并且具有可数 (σ 局部有限) k 网.

定理 1.2.5 *[36, 124]* 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 $\aleph$ 空间;

(2) X 具有 σ 离散 (σ 局部有限) cs 网;

(3) X 具有 σ 离散 (σ 局部有限) k 网;

(4) X 具有 σ 离散 (σ 局部有限) cs^* 网;

(5) X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网;

(6) X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网且不含闭子空间同胚于序列扇空间 S_{ω_1}.

产生广义度量空间的另一重要途径是利用 1966 年 Borges 的 "层对应 " 的方法，这联系着一般拓扑学中著名的 "M_i 空间 " 问题 [27, 92].

定义 1.2.6 *[21]* X 称为层空间，如果存在函数 $G:\mathbb{N}\times\tau\to\tau$ 满足:

(1) $n\in\mathbb{N},U\in\tau\Rightarrow\overline{G(n,U)}\subset U=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}G(m,U)$.

(2) $V\subset U\Rightarrow G(n,V)\subset G(n,U)$.

G 称为 X 的层对应. 可假设 G 关于 n 是递增的.

定义 1.2.7 X 称为半层空间 *[33]*, 如果存在函数 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 满足:

(1) $U\in\tau\Rightarrow U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(n,U)$.

(2) $V\subset U\Rightarrow F(n,V)\subset F(n,U)$.

若更设 X 还满足下述条件，则称 X 是 k 半层空间 *[84]*.

(3) 对 X 的紧集 $K\subset U$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $K\subset F(m,U)$.

上述函数 F 分别称为 X 的半层对应和 k 半层对应. 可假设 F 关于 n 是递增的.

对于以上几类广义度量空间，我们有如下蕴涵关系 [45, 72]:

$$\begin{array}{c}\text{层空间}\Rightarrow\ k\text{ 半层空间}\Rightarrow\sigma\text{ 空间}\Rightarrow\text{半层空间}\\ \Uparrow\\ \aleph\text{ 空间}\end{array}$$

对空间 X, X 称为是 *次仿紧*[24] 的，如果 X 的每一开覆盖都有 σ 离散的闭加细; X 称为是 *完全*[45] 的，如果 X 中每一闭集都是 G_δ 集 (即可数个开集的交); X 称为是具有 *点 G_δ 性质*[45], 如果 X 中每一单点集都是 G_δ 集; X

称为是具有 G_δ 对角线[45], 如果对角线 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 是 $X\times X$ 的一个 G_δ 子集. [27] 中证明了空间 X 具有 G_δ 对角线 当且仅当存在一个开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)$. 由此可见, 如果空间 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 具有 点 G_δ 性质.

引理 1.2.8 *[45, 72]* 半层空间是次仿紧的，完全的，且具有 G_δ 对角线.

下面几个空间是第一可数空间的常见推广，它们在广义度量空间理论中发挥着至关重要的作用.

定义 1.2.9 *[35]* 空间 X 称为是 *Fréchet* 空间，如果对每一 $A\subset X$ 以及 $x\in\overline{A}$, 存在 A 中序列收敛于 x.

定义 1.2.10 X 称为强 *Fréchet* 空间 *[108]*, 若 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在 $x_n\in A_n$, 使 $\{x_n\}$ 收敛于 x;

定义 1.2.11 *[35]* 空间 X 的子集 P 称为是点 x 的序列邻域，如果 X 中任意收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 都终于 P. 子集 $U\subset X$ 称为是序列开集，如果 U 是其中每一个点的序列邻域. 序列开集的补集称为是序列闭集. X 称为是序列空间，如果 X 中每一个序列开集是开的.

定义 1.2.12 *[37]* 空间 X 称为是 k 空间，如果 X 中子集 A 是闭的当且仅当对 X 中每一紧集 K, $A\cap K$ 子空间 K 中的闭集.

注 1.2.13 *(1) [34]* 显然，第一可数空间 $\Rightarrow$ 强 *Fréchet* 空间 $\Rightarrow$ *Fréchet* 空间 $\Rightarrow$ 序列空间 $\Rightarrow$ k 空间.

(2) [59, 定理 *48.10]* 空间 X 是 *Fréchet* 空间当且仅当 X 的每一子空间都是序列空间.

§1.3 映射类

定义 1.3.1 设 $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1) f 称为是伪开映射 *[8]*, 如果对每一 $y\in Y$ 以及 X 中开集 $U\supset f^{-1}(y)$, $f(U)$ 是 y 的开邻域;

(2) f 称为是几乎开映射 *[7]*, 如果对每一 $y\in Y$, 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使得对 x 的每一开邻域 U, $f(U)$ 是 y 的邻域;

(3) f 称为可数双商映射 *[108]*, 若对 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开集的可数族 $\mathcal{U}$, 存在 $P\in\mathcal{U}^F$, 使 $y\in f(P)^\circ$;

(4) f 称为双商映射 *[90]*, 若对 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开集族 $\mathcal{U}$, 存在 $P\in\mathcal{U}^F$, 使 $y\in f(P)^\circ$;

(5) f 称为是完备映射，如果 f 是闭的并且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 中紧集;

(6) f 称为是序列商映射 *[20]*, 如果对 Y 中任一收敛序列 S, 存在 X 中收敛序列 L 使得 $f(L)$ 是 S 的子列;

(7) f 称为是序列覆盖映射 *[108]*, 如果对 Y 中任一收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中收敛序列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)=y_n$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立;

(8) f 称为是 *1* 序列覆盖映射 *[65]*, 如果对任一 $y\in Y$, 存在点 $x\in X$ 使得对 Y 中任一收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)=y_n$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

对于上述映射类，从定义可以看出如下的蕴涵关系：

$$
\begin{array}{lllllllllll}
(1)\ \text{开} & \Rightarrow & \text{几乎开} & \Rightarrow & \text{双商} & \Rightarrow & \text{可数双商} & \Rightarrow & \text{伪开} & \Rightarrow & \text{商;} \\
 & & & & \Uparrow & & & & \Uparrow & & \\
 & & & & \text{完备} & & \Rightarrow & & \text{闭} & &
\end{array}
$$

(2) 1 序列覆盖 $\Rightarrow$ 序列覆盖 $\Rightarrow$ 序列商.

以下这个引理展示了商映射和序列商映射之间的转换关系.

引理 1.3.2 *[20]* 设 $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1) 如果 X 是序列空间并且 f 是商映射，则 f 是序列商映射.

(2) 如果 Y 是序列空间并且 f 是序列商映射，则 f 是商映射.

注 1.3.3 易验证 *[71]*, 商映射保持序列空间，伪开映射保持 *Fréchet* 空间，可数双商映射保持强 *Fréchet* 空间.

第二章 $\aleph_0$ 弱基和弱拟第一可数空间

1980 年， R. Sirois-Dumais 在 [105] 中引入了拟第一可数空间和弱拟第一可数空间，成功地刻画了度量空间的商边界可数映像和伪开边界可数映像. 刘川和林寿在 [80] 中引入了 $\aleph_0$ 弱基的定义，一般化了这两类空间. 作为基的推广， $\aleph_0$ 弱基可以被有效地用来研究象序列扇 S_ω 这样的典型广义度量空间.

本章讨论关于 $\aleph_0$ 弱基和弱拟第一可数空间的一些基本性质.

§2.1 $\aleph_0$ 弱基和弱拟第一可数空间

定义 2.1.1 设 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X 中的一个集族，满足对任意 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_x(n)$ 关于有限交封闭并且 $x\in\cap\mathcal{B}_x(n)$.

(1) 若对 X 的每一子集 A 及任意 $x\in A$, A 是 x 的邻域当且仅当对每一 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $B\in\mathcal{B}_x(n)$ 使得 $B\subset A$ 成立，则称 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 基. 此时如果每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的，则称空间 X 是拟第一可数的 *[105]*.

(2) 若对 X 的每一子集 A, A 是开集当且仅当对任意 $x\in A$ 及 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $B\in\mathcal{B}_x(n)$ 使得 $B\subset A$ 成立，则称 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基 *[80]*. 此时如果每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的，则称空间 X 是弱拟第一可数的 *[105]*.

(3) 在 $\aleph_0$ 弱基的定义中，若 $\mathcal{B}_x(n)=\mathcal{B}_x(1)$ 对每一 $n\in\mathbb{N}$ 成立，则称 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 弱基 *[9]*. 此时如果每一 $\mathcal{B}_x(1)$ 都是可数的，则称空间 X 是弱第一可数的 *[9]*.

首先讨论 $\aleph_0$ 弱基与 k 网， cs 网， cs^* 网之间的精确关系. 下面这个引理是处理 $\aleph_0$ 弱基的有力工具，我们在后面会多次用到.

引理 2.1.2 设 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X 的一个子集族，对任意 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_x(n)$ 是 X 在点 x 处的一个关于有限交封闭的网. 对于以下条件：

(1) $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基;

(2) 对任意 $x\in X$ 以及收敛于 x 的序列 L, 存在 L 的一个子序列 L' 和 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $\mathcal{B}_x(n_0)$ 中每一元,

我们有 *(1)*$\Rightarrow$*(2)*. 如果更设 X 是序列空间，则 *(2)*$\Rightarrow$*(1)*.

证明 先证 (1)⇒(2). 假设不然，存在非平凡序列 $L = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 收敛于 x 使得对 L 的任一子序列 L' 以及 $n \in \mathbb{N}$, 都存在 $B \in \mathcal{B}_x(n)$ 满足 L' 不终于 B. 于是我们可以找到 L 的一个子序列 L_1 以及 $B_1 \in \mathcal{B}_x(1)$ 使得 $B_1 \cap L_1 = \emptyset$. 归纳地，我们可以选择序列 L_i 和 $B_i \in \mathcal{B}_x(i)$ 使得 $B_i \cap L_i = \emptyset$ 并且 L_{i+1} 是 L_i 的子序列对任意 $i \in \mathbb{N}$ 成立. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 取 $x_{n_k} \in L_k$ 满足 $n_{k+1} > n_k$. 则 $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是 L 的一个子序列且对任意 $i \in \mathbb{N}$, $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cap B_i$ 是有限集. 由于 $\mathcal{B}_x(i)$ 关于有限交封闭并且 $\mathcal{B}_x(i)$ 是点 x 处的网，存在 $B'_i \in \mathcal{B}_x(i)$ 使得 $B'_i \cap \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. 因此根据 $\aleph_0$ 弱基的定义， $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个闭集，矛盾.

现在假设 X 是序列空间，我们来证明 (2)⇒(1). 设 U 是 X 的一个子集满足：对任一 $x \in U$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $B \in \mathcal{B}_x(n)$ 使得 $B \subset U$. 由于 X 是序列空间，我们只需证明 U 在 X 中是序列开的. 假设不然，存在序列 $L \subset X - U$ 使得 L 收敛于 $x \in U$. 由 (2), 存在 L 的子序列 L' 和某 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $\mathcal{B}_x(n_0)$ 中每一个元. 于是 L' 终于 U, 矛盾. 综上， $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

注 2.1.3 由引理 *2.1.2* 可以看出，空间的每一 $\aleph_0$ 弱基都是 cs^* 网，于是，由定理 *1.2.5,* 每一具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是 $\aleph$ 空间. 然而，需要注意的是，对于空间 X, X 的 $\aleph_0$ 弱基未必是 X 的 cs 网 *(*见例 *2.1.14);* 同时，刘川在 *[77,* 例 *2.1]* 中指出，空间的弱基未必是 k 网. 此外， X 的 cs 网和 k 网也未必是 X 的 $\aleph_0$ 弱基 *(*见例 *2.1.13).* 空间的弱基和 $\aleph_0$ 基互不蕴涵 *(*见例 *2.2.6* 和例 *2.1.12).*

注 2.1.4 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是 X 的一个弱基，容易验证 $\mathcal{P}_x$ 中每一个元都是 x 的序列邻域. 此时， $\mathcal{P}_x$ 是 X 在 x 处的由 x 的序列邻域构成的一个网，我们称此为 X 在 x 处的一个序列邻域网，也称 sn 网 *[42].*

问题 2.1.5 是否存在具有点可数 $\aleph_0$ 基而不具有点可数 cs 网的空间？

结论 2.1.6 设 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基， 如果 X 是一个 *Fréchet* 空间，则 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 基.

证明 任取 $x \in X$, 设对 $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{B}_x(n)$, 我们只需证明 $x \in \mathrm{int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. 假设不然，由于 X 是一个 Fréchet 空间，存在序列 $L \subset X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ 收敛于 x,

由引理 2.1.2, 存在其收敛子列 L' 以及 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 B_{n_0}, 矛盾. 这说明 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ 是 x 的一个邻域. $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 基.

下面讨论弱拟第一可数空间以及与其密切相关的拟第一可数空间.

引理 2.1.7 *(1) 空间 X 是第一可数的当且仅当 X 是 Fréchet 的弱第一可数空间 [109];*

(2) 空间 X 是拟第一可数的当且仅当 X 是 Fréchet 的弱拟第一可数空间 [105];

(3) 若空间 X 是弱拟第一可数的, 则 X 是序列空间 [105].

以上所涉及到的第一可数性的各种弱形式之间的精确关系见下图及注 2.1.8:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{第一可数空间} & \Rightarrow & \text{拟第一可数空间} & \Rightarrow & \text{Fréchet 空间} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{弱第一可数空间} & \Rightarrow & \text{弱拟第一可数空间} & \Rightarrow & \text{序列空间} \\
 & & & & \Downarrow \\
 & & & & k\ \text{空间}
\end{array}$$

注 2.1.8 *Fréchet 空间未必是弱拟第一可数空间的例见例 2.1.13; 拟第一可数空间不是弱第一可数空间的例见例 2.1.12; 弱第一可数空间不是 Fréchet 空间的例见例 2.2.6.*

由上注我们知道, 序列扇空间 S_ω 是典型的弱拟第一可数而非弱第一可数的空间. 于是, 由弱第一可数空间的闭遗传性 [72] 知, 如果空间 X 含有 S_ω 的闭拷贝 (即含有闭子空间同胚于 S_ω), 那么 X 肯定不是弱第一可数的. 一个自然的问题是: 如果避免了这类空间, 在何种条件下, 弱拟第一可数性和弱第一可数性是等价的? 下面我们给出一个回答.

对于空间 X, 及 $x \in X$. X 的子集 F 称为空间 X 在点 x 处的 *扇* [66], 如果 $F = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$, 其中对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 序列 $\{x_{nm}\}_m$ 收敛于 x, 且 x 及 $\{x_{nm}\}$ 的各项是两两互不相同的. 设 F 是 X 的扇, F 的子集 D 称为 F 的 *对角*, 如果 D 是 F 的收敛序列且 D 与无限个关于 m 的序列 $\{x_{nm}\}_m$ 相交. 空间 X 称为 *α_4 空间* [10], 如果对于 $x \in X$, X 的每一在 x 处的扇有对角收敛于 x. 称空间 X 具有 *序列点 G_δ 性质*, 如果 X 中每一点都可以表示成可数个它的闭的序列邻域的交.

引理 2.1.9 *[76] 对空间 X, X 是弱第一可数空间当且仅当 X 是弱拟第一可数的 α_4 空间.*

定理 2.1.10 *对正则空间 X, X 是弱第一可数空间当且仅当 X 是具有序列点 G_δ 性质的弱拟第一可数空间且不含 S_ω 的闭拷贝.*

证明　必要性. 设 X 是弱第一可数空间, 显然 X 是不含 S_ω 的闭拷贝的弱拟第一可数空间. 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是 X 的一个弱基, 其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 X 在 x 处可数的弱基. 由于 X 是正则的, 容易验证 $\overline{\mathcal{P}} = \cup\{\overline{\mathcal{P}_x} : x \in X\}$ 也是 X 的弱基. 从而对每一 $x \in X$, $x = \cap\overline{\mathcal{P}_x}$, 其中 $\overline{\mathcal{P}_x}$ 中每一个元都是 x 的闭的序列邻域. 这说明 X 具有 序列点 G_δ 性质.

充分性. 由引理 2.1.9, 我们只需证明 X 是 α_4 空间. 设 $F = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ 是 X 在点 x 处的扇, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 这里每一 U_n 是 x 的闭的序列邻域且 $U_{n+1} \subset U_n$. 不妨设 $\{x_{nm} : m \in \mathbb{N}\} \subset U_n$ 对每一 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 设 $L \subset F$ 是 X 中一个收敛序列, 如果 L 收敛于 $y \neq x$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $y \notin U_{n_0}$, 由于 U_{n_0} 是闭的, 我们有 L 终于 $X - U_{n_0}$, 从而 L 终于 $\{x_{nm} : n < n_0, m \in \mathbb{N}\}$, 这样 L 只能收敛于 x, 矛盾. 这说明 F 是序列闭的. 由于 X 是序列空间, F 是闭的. 如果 F 没有对角, 容易证明 F 同胚于 S_ω, 这和 X 不含 S_ω 的闭拷贝矛盾. 从而 F 有对角, X 是 α_4 空间. 证毕.

推论 2.1.11 *对正则空间 X, X 是第一可数空间当且仅当 X 是具有点 G_δ 性质的拟第一可数空间且不含 S_ω 的闭拷贝.*

例 2.1.12 *存在空间具有可数 $\aleph_0$ 基, 但不是弱第一可数的.*

取 $S_\omega = \{0\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ 序列扇空间 [15], 即将可数个收敛序列 $\{\{(n, m) : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$ 的收敛点粘成一点 0 所得到的商空间. 令

$$B_x(n,m) = \begin{cases} \{x\}, & x \neq 0 \\ \{0\} \cup \{(n,i) : i \geq m\}, & x = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_x(n) = \{B_x(n,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

则 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in S_\omega, n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_ω 的一个可数的 $\aleph_0$ 基. 然而, 由引理 2.1.7(1) 知 S_ω 不是弱第一可数的.

例 2.1.13 *存在 Fréchet 空间使得具有可数 cs 网，但不是弱拟第一可数的.*

刘川和林寿在 [80, 例 6] 中构造了一个空间 X, X 是可分度量空间的闭映象，从而具有可数的 cs 网，但是 X 不是弱拟第一可数的.

例 2.1.14 *存在空间具有点可数 $\aleph_0$ 弱基，但不具有点可数 cs 网.*

林寿在 [72, 例 3.1.11] 中构造了空间 X, X 是度量空间的商有限到一映象，从而根据引理 2.3.2 具有点可数 $\aleph_0$ 弱基，但是 X 不具有点可数 cs 网. 因此，根据定理 3.1.2, X 也不具有 σ 局部有限的 $\aleph_0$ 弱基. 易见此空间不是 Fréchet 的，因此由引理 2.1.7, X 不具有点可数 $\aleph_0$ 基.

§2.2 遗传性与可积性

容易验证拟第一可数空间具有遗传性，弱拟第一可数空间具有开遗传性和闭遗传性 [119]. 弱拟第一可数空间不具有遗传性见例 2.2.6; 拟第一可数空间和弱拟第一可数空间不具有可积性见例 2.2.7, 例 2.2.8 和例 2.2.9.

定理 2.2.1 *空间 X 是遗传弱拟第一可数空间当且仅当 X 是拟第一可数的.*

证明 充分性由拟第一可数空间的遗传性得知. 设 X 是遗传弱拟第一可数空间，由引理 2.2.6, X 是遗传序列空间，从而是 Fréchet 空间 [59, 定理 48.10], 由引理 2.2.6, X 是拟第一可数的.

引理 2.2.2 *[111] 设空间 X 和 Y 都是序列空间. 则积空间 $X \times Y$ 是序列的当且仅当 $X \times Y$ 是 k 空间.*

定理 2.2.3 *设空间 X 和 Y 都是弱拟第一可数空间. 则下述等价:*

(1) $X \times Y$ 是弱拟第一可数空间;

(2) $X \times Y$ 是序列空间;

(3) $X \times Y$ 是 k 空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. (3) $\Rightarrow$ (2) 由引理 2.1.7 和引理 2.2.2 可得. 下证 (2) $\Rightarrow$ (1).

设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{Q} = \cup\{\mathcal{Q}_y(n) : y \in Y, n \in \mathbb{N}\}$ 分别是空间 X 和 Y 的 $\aleph_0$ 弱基, 其中每一 $\mathcal{P}_x(n)$, $\mathcal{Q}_y(n)$ 都是可数集族. 对任意 $z = (x, y) \in X \times Y$ 以及 $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{R}_z(m, n) = \{P \times Q : P \in \mathcal{P}_x(m), Q \in \mathcal{Q}_y(n)\}$$

$$\mathcal{R} = \cup\{\mathcal{R}_z(m, n) : z \in X \times Y, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

下证 $\mathcal{R}$ 是积空间 $X \times Y$ 的 $\aleph_0$ 弱基.

设 $\{z_i\} = \{(x_i, y_i)\}$ 是 Z 中收敛于点 $z_0 = (x_0, y_0)$ 的一个序列, 则 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 分别是 X 和 Y 中收敛于点 x_0 和 y_0 的序列. 由引理 2.1.2, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\{x_i\}$ 的子列 $\{x_{i_k}\}_k$ 使得 $\{x_{i_k}\}_k$ 终于 $\mathcal{P}_{x_0}(m_0)$ 中每一个元. 同样地, 由于序列 $\{y_i\}$ 收敛于点 y_0, 存在其子列 $\{y_{i_{k_l}}\}_l$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\{y_{i_{k_l}}\}_l$ 终于 $\mathcal{Q}_{y_0}(n_0)$ 中每一个元. 于是, $\{z_i\}$ 的子列 $\{z_{i_{k_l}}\}_l$ 终于 $\mathcal{R}_{z_0}(m_0, n_0)$ 中每一个元. 由引理 2.1.2, $\mathcal{R}$ 是 $X \times Y$ 的 $\aleph_0$ 弱基, 从而 $X \times Y$ 是弱拟第一可数的.

推论 2.2.4 *设空间 X 和 Y 都是拟第一可数空间. 则 $X \times Y$ 是拟第一可数空间当且仅当 $X \times Y$ 是 Fréchet 空间.*

注 2.2.5 *注意到例 2.2.7 中的积空间 $X \times \mathbb{I}$ 是 k 空间 (局部紧空间和 k 空间的积是 k 空间 [28]), 从而根据引理 2.2.2, $X \times \mathbb{I}$ 是序列空间. 这说明对拟第一可数空间 X 和 Y, 即使 $X \times Y$ 是序列空间, $X \times Y$ 也未必是拟第一可数空间.*

最后给出几个例.

例 2.2.6 *存在正则空间 X 具有可数弱基, 但是其子空间 Y 不是弱拟第一可数的.*

证明 $\mathbb{N}$ 是收敛于点 0 的序列, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 将收敛序列 $\{(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$ 的收敛点和 n 粘合所得到的商空间 X 称为 Aren 扇空间 S_2 [4]. X 具有可数弱基, 但不是 Fréchet 空间 [72, 例 1.8.6].

令 $Y = X - \mathbb{N}$. 容易验证子集 $Y - \{0\}$ 在 Y 中是序列闭的但不是闭的, 从而 Y 不是序列空间. 由引理 2.1.7, Y 不是弱拟第一可数空间.

例 2.2.7 存在正则空间 X 具有可数 $\aleph_0$ 基，但是积空间 $X\times\mathbb{I}$ 不是拟第一可数的.

证明 取 X 为商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{N}$. 显然 X 是正则的. 对 $x\in X$ 以及 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{B}_x(n)=\begin{cases}\{(p,q):p,q\in\mathbb{Q},x\in(p,q)\subset\mathbb{R}-\mathbb{N}\}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}\\ \{\{x\}\cup(n-1/m,n)\cup(n,n+1/m):m\in\mathbb{N}\}, & x=\mathbb{N}.\end{cases}$$

易见 $\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的可数 $\aleph_0$ 基，下证 $X\times\mathbb{I}$ 不是 Fréchet 空间，从而不是拟第一可数的.

对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $A_n=\{(x,1/n):n-1/3<x<n+1/3,x\neq n\}$, $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 则点 $(\mathbb{N},0)\in\overline{A}$. 假设 A 中存在序列 $\{p_n\}$ 收敛于点 $(\mathbb{N},0)$, 不妨设对任意 $n\in\mathbb{N}$, $p_n\in A_n$, 记 $p_n=(x_n,1/n)$, 这里 $n-1/3<x_n<n+1/3,x_n\neq n$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛于点 $\mathbb{N}$, 矛盾. 从而 $X\times\mathbb{I}$ 不是 Fréchet 空间.

对上例适当改造后，可以看见，对具有可数 $\aleph_0$ 基的空间 X 和 Y, 积空间 $X\times Y$ 甚至可能不是序列空间.

例 2.2.8 存在空间 X 具有可数 $\aleph_0$ 基，但是积空间 $X\times X$ 不是序列空间.

证明 令 $X=\mathbb{R}/\mathbb{N}\cup\{p\}$. 对 $x\in X$, 定义 x 点处的邻域基如下：

$$\mathcal{B}_x=\begin{cases}\mathcal{B}'_x, & x\in\mathbb{R}/\mathbb{N}\\ \{\{p\}\cup(n,+\infty)-\mathbb{N}:n\in\mathbb{N}\}, & x=p.\end{cases}$$

这里 $\mathcal{B}'_x$ 是 x 在商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ 中的邻域基. 由于空间 X 在点 p 处具有可数邻域基, 类似于例 2.2.7 的证明，X 具有可数 $\aleph_0$ 基. 易验证 X 是 T_1 空间而不是 T_2 空间. 因此，在积空间 $X\times X$ 中，对角线 $\{(x,x):x\in X\}$ 是序列闭的而不是闭的. 这说明 $X\times X$ 不是序列空间.

例 2.2.9 存在正则空间 X 和 Y 都具有可数 $\aleph_0$ 弱基，但是积空间 $X\times Y$ 不是弱拟第一可数的.

证明 取 X 为例 2.2.6 中的 Aren 空间 S_2, $Y=\mathbb{P}\cup\{0\}$ 为实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间. 则 X 和 Y 都是具有可数 $\aleph_0$ 弱基的正则空间, 但 $X\times Y$ 不是序列空间 (见 [72], 例 1.8.6(6.3)), 从而 $X\times Y$ 不是弱拟第一可数的.

§2.3 映射性质

引理 2.3.1 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个映射，则对任意 $z \in Z$, $\partial(g \circ f)^{-1}(z) \subset \cup\{\partial f^{-1}(y) : y \in \partial g^{-1}(z)\}$.

证明 设 $x \in \partial(g\circ f)^{-1}(z)$, 我们只需证明 $x \in \partial f^{-1}(f(x))$ 以及 $f(x) \in \partial g^{-1}(z)$. $x \in \partial f^{-1}(f(x))$ 显然成立，否则 $x \in \operatorname{int}(f^{-1}(f(x))) \subset \operatorname{int}(f^{-1}(g^{-1}(z)))$, 矛盾. 如果 $f(x) \in \operatorname{int}(g^{-1}(z))$, 则 $U = f^{-1}(\operatorname{int}(g^{-1}(z)))$ 是 x 的一个开邻域且 $U \subset f^{-1}(g^{-1}(z))$. 这与 $x \in \partial(g\circ f)^{-1}(z)$ 矛盾. 因此 $f(x) \in \partial g^{-1}(z)$.

引理 2.3.2 *[105]* 空间 X 是弱拟第一可数空间当且仅当存在度量空间 M 和商映射 $q: M \to X$ 使得对任意 $x \in X$, $\partial q^{-1}(x)$ 是可数 *(*σ 紧*)* 的.

定理 2.3.3 设空间 X 是弱拟第一可数空间， $f: X \to Y$ 是一个商映射并且对任意 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 可数，则 Y 也是弱拟第一可数空间.

证明 由引理 2.3.2, 存在度量空间 M 和商映射 $q: M \to X$ 使得对任意 $x \in X$, $\partial q^{-1}(x)$ 是可数的，则 $p = f \circ q: M \to Y$ 是一个商映射. 根据引理 2.3.1, 对任意 $y \in Y$, $\partial p^{-1}(y)$ 可数. 再由引理 2.3.2, Y 是弱拟第一可数空间.

推论 2.3.4 设空间 X 是拟第一可数空间， $f: X \to Y$ 是一个伪开映射并且对任意 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 可数，则 Y 也是拟第一可数空间.

定理 2.3.5 设 $f: X \to Y$ 是一个商， *1* 序列覆盖映射，如果空间 X 是弱拟第一可数空间，则 Y 也是弱拟第一可数空间.

证明 设 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基，其中每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的. 对 $y \in Y$, 存在 $x_y \in X$ 使得如果 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 则存在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_y 且 $f(x_n) = y_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 令 $\mathcal{P}_y(n) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_{x_y}(n)\}$, $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_y(n) : y \in Y, n \in \mathbb{N}\}$. 下证 $\mathcal{P}$ 是 Y 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

由于 f 是商映射， Y 是序列空间. 设 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于点 y_0 的序列，存在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x_{y_0} 且 $f(x_n) = y_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 由引理 2.1.2, 存在 n_0 和 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\{x_{n_k}\}$ 终于 $\mathcal{B}_{x_{y_0}}(n_0)$ 中每一个元. 于是 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}$ 终于 $\mathcal{P}_{y_0}(n_0)$ 中每一个元. 由引理 2.1.2, $\mathcal{P}$ 是 Y 的一个 $\aleph_0$ 弱基，故 Y 是弱拟第一可数的.

推论 2.3.6 *设 $f : X \to Y$ 是一个伪开，1 序列覆盖映射，如果空间 X 是拟第一可数空间，则 Y 也是拟第一可数空间.*

下面这个例说明闭序列覆盖映射和完备映射都不能保持弱拟第一可数空间. 回忆序列扇空间 S_{ω_1} 是指将 ω_1 个互不相交的收敛序列 $\{\{x_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}} : \alpha < \omega_1\}$ 的收敛点粘成一点 0 所得到的商空间.

例 2.3.7 *存在序列覆盖，完备映射 $g : X \to Y$, X 是弱拟第一可数空间，但是 Y 不是弱拟第一可数空间.*

证明 取 [68] 中例 1.5.6 中的空间 X, Y 和映射 $g : X \to Y$, 此时 X 是度量空间的商二到一映象，从而是弱拟第一可数的 (引理 2.3.2), 空间 Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, f 是序列覆盖，完备映射. 下面证明 S_{ω_1} 不是弱拟第一可数的，从而由弱拟第一可数空间的闭遗传性知 Y 不是弱拟第一可数的.

已知 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间 [124]. 现在假设 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in S_{\omega_1}, n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_{ω_1} 的一个 $\aleph_0$ 弱基，其中每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的. 对 $x \in S_{\omega_1}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{P}_x(n) = \begin{cases} \{\{x\}\}, & x \neq 0 \\ \mathcal{B}_x(n), & x = 0, \end{cases}$$

则 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in S_{\omega_1}, n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_{ω_1} 的一个 σ 局部有限的 $\aleph_0$ 弱基. 由注 2.1.3, S_{ω_1} 是 $\aleph$ 空间，矛盾. 因此 S_{ω_1} 不是弱拟第一可数的.

众所周知，对于度量空间上的闭映射，如果象空间是第一可数的，则该映射每一纤维的边界是紧的. 在 [112] 中， Y. Tanaka 证明了对于度量空间上的闭映射，如果象空间不含闭子空间同胚于 $S_\omega(S_{\omega_1})$, 则该映射每一纤维的边界是紧 (Lindelöf) 的. 1999 年， Y. Tanaka 和刘川 [113] 提出下述问题：

问题 2.3.8 *设 $f : X \to Y$ 是闭映射. 空间 X 和 Y 附加什么条件, 对每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 具有较好性质？*

对此问题，恽自求 [125], 刘川 [79] 和林寿 [72] 分别给出了部分回答，他们改进了 [112] 中的结果. 目前最精细的结果是林寿在 [72, 定理 3.4.16] 中所证明的对于 k 半层的 k 空间上的闭映射，如果象空间不含闭子空间同胚于 $S_\omega(S_{\omega_1})$, 则该映射每一纤维的边界是紧 (Lindelöf) 的. 注意到 $S_\omega(S_{\omega_1})$ 和弱拟第一可数空间类密切相关. 事实上， S_ω 是典型的弱拟第一可数空间而 S_{ω_1} 不是弱拟第一可数空间 (见例 2.1.12 和例 2.3.7). 因此，我们感兴趣于当象空间是弱拟第一可数时情形如何.

引理 2.3.9 *[72, 引理 3.4.15]* 设 X 是 k 半层空间. 若 $D = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散子集, 则存在 D 的互不相交序列邻域扩张 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足: 对 $\Lambda' \subset \Lambda$, $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} \cup \overline{D}$ 是 X 的序列闭集, 其中 $y_\alpha \in U_\alpha$.

定理 2.3.10 设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 k 半层的 k 空间. 若 Y 是弱拟第一可数的, 则对任意 $y \in Y$, 存在 X 中 σ 紧集 A 使得 $\partial f^{-1}(y) = \overline{A}$.

证明 设 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_y(n) : y \in Y, n \in \mathbb{N}\}$ 是 Y 的一个 $\aleph_0$ 弱基, 其中每一 $\mathcal{B}_y(n) = \{B_y(n,i) : i \in \mathbb{N}\}$. 对 $y \in Y$, 置

$$A = \{x \in \partial f^{-1}(y) : \text{存在 } X - f^{-1}(y) \text{ 中的序列收敛于 } x\}$$

$$A_n = \{x \in \partial f^{-1}(y) : \text{存在 } X - f^{-1}(y) \text{ 中的序列 } L \text{ 收敛于 } x\text{且}$$
$$f(L) \text{ 的某个子列终于 } \mathcal{B}_y(n) \text{ 中每个元}\}$$

由引理 2.1.2 知 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 下证每一 A_n 都是紧的.

由于 X 是 k 半层空间, 我们只需证明每一 A_n 是可数紧的. 假设不然, 存在子空间 A_n 中无限闭离散子集 $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, 取 $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ 为 D 的互不相交的序列邻域扩张满足引理 2.3.9 中的要求. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 设 L_i 是 $X - f^{-1}(y)$ 中收敛于点 x_i 的序列且 $f(L_i)$ 的某个子列终于中 $\mathcal{B}_y(n)$ 每一个元. 我们可以归纳地选取 $y_i \in L_i$ 使得 $f(y_i) \in B_y(n,i)$, 于是 $\{f(y_i)\}$ 是收敛于 y 的序列. 断言 $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ 中不含序列收敛于 $\overline{D}$ 中的点. 否则, 存在 $\{y_i\}$ 的子列 $\{y_{i_k}\}$ 收敛于点 $x \in \overline{D}$. 由于 D 是 A_n 的闭集, $x \in \overline{D} \cap A_n = D$. 于是存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x = x_{i_0}$, 从而 $\{y_{i_k}\}$ 终于 U_{i_0}, 矛盾. 由引理 2.3.9, $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 中序列闭集, 从而是闭集. 这样 $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 中的一个闭离散集, 而 f 是闭映射, 这与 $\{f(y_i)\}$ 收敛于 y 矛盾, 故 A_n 是紧的.

最后我们证明 $\partial f^{-1}(y) = \overline{A}$. 若不然, 令 $B = f^{-1}(y) - \overline{A}$, $C = \partial f^{-1}(y) - \overline{A}$. 那么 $\emptyset \neq C \subset B$. 若 X 的序列 L 收敛于某点 $x \in B$, 如果 $x \in \mathrm{int}(f^{-1}(y))$, 则 L 是终于 B 的; 如果 $x \in C$, 那么 $\overline{A} \cup (X - f^{-1}(y))$ 仅含 L 中的有限项, 则 L 也是终于 B 的. 从而 B 是 X 的序列开集, 因此 B 是 X 的开集, 所以 $B \subset \mathrm{int}(f^{-1}(y))$, 故 $C = C \cap \mathrm{int}(f^{-1}(y)) = \emptyset$, 矛盾.

第三章　具有特定 $\aleph_0$ 弱基的空间

从上章我们可以看出， $\aleph_0$ 弱基的引入本质上是弱拟第一可数空间类的推广，刘川和林寿在 [80] 中研究了几类具有特定形式的 $\aleph_0$ 弱基的空间，他们证明了空间 X 具有可数 (点可数) $\aleph_0$ 弱基当且仅当它是可分度量空间 (度量空间) 的商可数到一映像．这些工作深化了并发展了早期 R. Sirois-Dumais 的结果.

本章系统讨论了具有特定 $\aleph_0$ 弱基的空间的性质，并给出它们和度量空间以及常见的广义度量空间类之间的联系.

§3.1　具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的空间

本节主要讨论具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的空间以及与此相关的度量空间的某些商映象．从 $\aleph_0$ 弱基的定义以及 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理可以看出，具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是度量空间的自然推广并且蕴涵 $\aleph$ 空间．对这类空间的有效刻画有助于我们更好地认识度量空间在一定条件下的商映象.

设 $f: X \to Y$ 是一个映射． f 称为是一个紧映射 (相应地， s 映射, σ 紧映射) 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 在 X 中是紧的 (可分的， σ 紧的).

引理 3.1.1 设 X 是一个弱拟第一可数空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 cs 网．如果 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭，则存在 $\mathcal{P}$ 的子族 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

证明　设 $\cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基，这里每一 $\mathcal{B}_x(n) = \{B_x(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ 并且 $B_x(n,m+1) \subset B_x(n,m)$ 对任意的 $m \in \mathbb{N}$ 成立．对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{P}_x(n) = \{P \in \mathcal{P} : B_x(n,m) \subset P \text{ 对某个 } m \in \mathbb{N} \text{ 成立}\};$$

$$\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}.$$

则 $\mathcal{P}_x(n)$ 关于有限交封闭且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个子族．为了证明 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基，我们只需验证下面两个断言.

断言 1　对任意 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_x(n)$ 是 X 在 x 处的一个网.

假设不然, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 以及 x 的一个邻域 U 使得 $P \not\subset U$ 对每一 $P \in \mathcal{P}_x(n)$ 成立. 令

$$\{P \in \mathcal{P} : x \in P \subset U\} = \{P_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

则对任意 $m, k \in \mathbb{N}$, $B_x(n,m) \not\subset P_k$. 对每一 $m \geq k$, 选取 $x_{mk} \in B_x(n,m) - P_k$. 令 $y_i = x_{mk}$, 这里 $i = k + m(m-1)/2$. 则序列 $\{y_i\}$ 收敛于 x. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 cs 网，存在 $k, j \in \mathbb{N}$ 使得 $\{y_i : i \geq j\} \subset P_k$. 取 $i \geq j$ 使得 $y_i = x_{mk}$ 对某个 $m \geq k$, 则 $x_{mk} \in P_k$, 矛盾.

断言 2 如果对任意 $x \in U \subset X$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $P_x(n) \in \mathcal{P}_x(n)$ 使得 $P_x(n) \subset U$, 则 U 开于 X.

假设不然，由于 X 是弱拟第一可数的， X 是序列空间. 因此存在序列 $L \subset X - U$ 收敛于点 $x \in U$. 根据引理 2.1.2, 存在 L 的子列 L' 和 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $B_x(n_0, m)$ 对每一 $m \in \mathbb{N}$ 成立. 然而， $B_x(n_0, m) \subset P_x(n_0)$ 对某一 $m \in \mathbb{N}$ 成立，因此 L' 终于 $P_x(n_0) \subset U$, 矛盾.

综上， $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

定理 3.1.2 对于正则空间 X, 下述等价：

(1) X 具有 σ 离散 $\aleph_0$ 弱基;

(2) X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基;

(3) X 是一个弱拟第一可数的 $\aleph$ 空间.

证明 (1)⇒(2) 显然成立.

(2)⇒(3) 假设 X 具有一个 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基 $\mathcal{P}$. 显然 X 是弱拟第一可数的. 根据注 2.1.3, X 是一个 $\aleph$ 空间.

(3)⇒(1) 假设 X 是一个弱拟第一可数的 $\aleph$ 空间. 由定理 1.2.5, X 具有 σ 离散的 cs 网，从而由引理 3.1.1, X 具有 σ 离散的 $\aleph_0$ 弱基.

在 [79] 中，刘川将度量空间的闭 σ 紧映象刻画为 Fréchet 的，弱拟第一可数的 $\aleph$ 空间. 由结论 2.1.6, 引理 2.1.7 和定理 3.1.2, 我们有以下推论：

推论 3.1.3 对于正则空间 X, 下述等价：

(1) X 具有 σ 离散 $\aleph_0$ 基;

(2) X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 基;

(3) X 是一个拟第一可数的 $\aleph$ 空间;

(4) X 是某个度量空间的闭 σ 紧映象.

再由引理 2.1.11, 我们得到

推论 3.1.4 *正则空间 X 可度量化当且仅当 X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 基且不含 S_ω 的闭拷贝.*

自然地，我们关心如何刻画度量空间的商 σ 紧映象以及如何将具有 σ 局部有限的 $\aleph_0$ 弱基的空间刻画为度量空间的确定的商映象，这两者是不是等价的？回答是否定的. 事实上，取例 2.1.14 中的空间 X, X 是度量空间的商，二到一映象，然而 X 不具有点可数 cs 网，从而不是 $\aleph$ 空间. 下面我们分别给出这两类空间的刻画.

映射 $f: X \to Y$ 称为是一个 σ 映射 [64], 如果存在 X 的一个基 $\mathcal{B}$ 使得 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的一个 σ 局部有限的集族.

定理 3.1.5 *对正则空间 X, 下述等价:*

(1) X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基;

(2) 存在度量空间 M 以及商， σ, 可数到一映射 $f: M \to X$;

(3) 存在度量空间 M 以及商， σ, σ 紧映射 $f: M \to X$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 σ 局部有限的 $\aleph_0$ 弱基，这里每一 $\mathcal{P}_x(n) = \{P_x(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ 并且对任意 $m \in \mathbb{N}$, $P_x(n,m+1) \subset P_x(n,m)$. 记 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_i : i \in \mathbb{N}\}$, 其中每一 $\mathcal{P}_i$ 是局部有限的，对任意 $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_{i+1}$. 对 $x \in X, n, m \in \mathbb{N}$, 选取 $i(x,n,m) \in \mathbb{N}$ 使得 $P_x(n,m) \in \mathcal{P}_{i(x,n,m)}$ 以及 $i(x,n,m) < i(x,n,m+1)$. 令

$$B_x(n,i) = \begin{cases} X, & i < i(x,n,1) \\ P_x(n,m), & i(x,n,m) \le i < i(x,n,m+1), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_x(n) = \{B_x(n,i) : i \in \mathbb{N}\}, \\ &\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

则 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基满足 $B_x(n,i+1) \subset B_x(n,i)$ 且 $B_x(n,i) \in \mathcal{P}_i$ 对任意 $x \in X, n, i \in \mathbb{N}$ 成立.

对 $i \in \mathbb{N}$, 我们记 $\mathcal{P}_i = \{B_\alpha : \alpha \in I_i\}$, 赋予 I_i 离散拓扑. 集族 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为是 *共尾的* [80] 如果存在 $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $R_{n_0+i} = P_{m_0+i}$. 令

$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}I_i$: 存在 $x_\alpha\in X, n\in\mathbb{N}$ 使得 $\{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 共尾于 $\mathcal{B}_{x_\alpha}(n)$ 且 $\{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 在点 x_α 处的网 $\}$.

定义 $f:M\to X$ 为 $f(\alpha_i)=x_\alpha$. 由于每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是 X 在点 x 处的网，f 是良定义的并且是满的. 易见 M 是一个度量空间，f 是连续映射. 注意到每一 $\mathcal{P}_i$ 是局部有限的，于是 f 是可数到一的.

对 $i\in\mathbb{N},\alpha_i\in I_i$, 令 $D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\{\beta=(\beta_i)\in M:\beta_i=\alpha_i, i\leq n\}$ 以及 $\mathcal{D}=\{D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in I_i, i\leq n, n\in\mathbb{N}\}$. 容易验证 $\mathcal{D}$ 是 M 的一个基并且对每一 $i\in\mathbb{N},\alpha_i\in I_i$, $f(D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leq n}B_{\alpha_i}$. 因此 $f(\mathcal{D})=\{f(D):D\in\mathcal{D}\}$ 是 X 的 σ 局部有限的集族. 这说明 f 是一个 σ 映射.

为了证明 f 是一个商映射，根据引理 1.3.2, 我们只需证明 f 是一个序列商映射. 设 L 是 X 中收敛于 $x\notin L$ 的一个序列. 由引理 2.1.2, 存在其子列 L' 以及 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $B_x(n_0,m)$ 对任意 $m\in\mathbb{N}$ 成立，记 $L'=\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$. 对任意 $i\in\mathbb{N}$, 取 $\alpha_i\in I_i$ 使得 $B_{\alpha_i}=B_x(n_0,i)$. 令 $\alpha=(\alpha_i)$, 则 $\alpha\in M$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $n_k=\min\{m\in\mathbb{N}:x_k\notin B_x(n_0,m)\}$. 构造 $z_k=(\beta_i(k))\in\prod_{i\in\mathbb{N}}I_i$ 以如下方式：若 $i<n_k$, 取 $\beta_i(k)\in I_i$ 满足 $B_{\beta_i(k)}=B_x(n_0,i)$; 否则取 $\beta_i(k)\in I_i$ 使得 $B_{\beta_i(k)}=B_{x_k}(1,i-n_k+1)$. 于是，$\{B_{\beta_i(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 共尾于 $\mathcal{B}_{x_k}(1)$, 从而 $z_k\in M$ 并且 $f(z_k)=x_k$. 另一方面，对每一 $i\in\mathbb{N}$, 由于 L' 终于 $B_x(n_0,i)$, 所以存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得 $x_k\in B_x(n_0,i)$ 对任意 $k\geq k_0$ 成立. 这样由 n_k 的取法我们知道当 $k\geq k_0$ 时 $i<n_k$, 因此 $\beta_i(k)=\alpha_i$. 这就证明了 I_i 中序列 $\{\beta_i(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 α_i. 从而 M 中序列 $\{z_k\}$ 收敛于 α. 这说明 f 是一个序列商映射.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 由引理 2.3.2, X 是弱拟第一可数的. 由于度量空间的商 σ 映象是 $\aleph$ 空间 [114], 根据定理 3.1.2, X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基.

林寿在 [63] 中证明了空间 X 是度量空间的商紧映象当且仅当 X 具有点有限的弱展开. 下面这个定理给出了度量空间的商 σ 紧映象的一个内部刻画.

定义 3.1.6 对空间 X, 覆盖列 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为是一个 $\aleph_0$ 弱展开 如果对任意 $x\in X, i\in\mathbb{N}$, 集族 $(\mathcal{U}_i)_x=\{U\in\mathcal{U}_i:x\in U\}$ 可以表示成 $\cup\{\mathcal{U}_x(n,i):n\in\mathbb{N}\}$ 使得 $\mathcal{P}=\{\mathcal{P}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基，这里 $\mathcal{P}_x(n)=\{P_x(n,i):i\in\mathbb{N}\}$, $P_x(n,i)=\cup\mathcal{U}_x(n,i)$. 如果此时每一 $\mathcal{U}_x(n,i)$ 都是有限的，则称 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为 X 的一个 点有限的 $\aleph_0$ 弱展开.

定理 3.1.7 空间 X 是度量空间的商 σ 紧映象当且仅当 X 具有点有限的 $\aleph_0$ 弱展开.

证明 必要性. 设 X 是度量空间 M 在商 σ 紧映射 f 下的象. 由于 M 是度量空间, 存在 M 的开覆盖列 $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得对每一 X 中紧集 K, 集族 $\{\mathrm{st}(K,\mathcal{B}_i): i\in\mathbb{N}\}$ 构成 K 在 X 中的一个局部邻域基, 即, 若 $K\subset U$ 且 U 开于 X, 则 $\mathrm{st}(K,\mathcal{B}_i)\subset U$ 对某个 $i\in\mathbb{N}$ 成立 [54]. 由于 M 是仿紧的, 不妨假设对任意 $i\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_i$ 是 M 的局部有限的开覆盖并且 $\mathcal{B}_{i+1}$ 加细 $\mathcal{B}_i$. 对 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{U}_i=\{f(B): B\in\mathcal{B}_i\},$$

则 $\mathcal{U}_i$ 是 X 的一个覆盖. 对 $x\in X, i\in\mathbb{N}$, 我们记 $f^{-1}(x)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_x(n)$, 这里每一 $K_x(n)$ 是 M 中的紧集. 于是我们有 $(\mathcal{U}_i)_x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f(B): B\cap K_x(n)\neq\emptyset, B\in\mathcal{B}_i\}$. 对 $x\in X, n, i\in\mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_x(n,i) &= \{f(B): B\cap K_x(n)\neq\emptyset, B\in\mathcal{B}_i\};\\ P_x(n,i) &= \cup\mathcal{U}_x(n,i);\\ \mathcal{P}_x(n) &= \{P_x(n,i): i\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

下面证明 $\mathcal{P}=\{\mathcal{P}_x(n): x\in X, n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基. 易见每一 $\mathcal{P}_x(n)$ 是 X 在 x 处的网. 设 L 是收敛于 x 的一个序列. 由于 f 是商映射从而是序列商的, 存在序列 S 收敛于某个 $y\in f^{-1}(x)$ 使得 $f(S)$ 是 L 的一个子列, 所以存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $y\in K_x(n_0)$, 因此 S 终于 $\mathrm{st}(K_x(n_0),\mathcal{B}_i)$ 对任意 $i\in\mathbb{N}$ 成立, 于是 $f(S)$ 终于 $f(\mathrm{st}(K_x(n_0),\mathcal{B}_i))=P_x(n_0,i)$. 由引理 2.1.2, $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基. 对每一 $x\in X, n, i\in\mathbb{N}$, 因为 $K_x(n)$ 是紧的, $\mathcal{U}_x(n,i)$ 是有限的. 这就证明了 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个点有限的 $\aleph_0$ 弱展开.

充分性. 设 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个点有限的 $\aleph_0$ 弱展开. 对每一 $x\in X, i\in\mathbb{N}$, $(\mathcal{U}_i)_x=\cup\{\mathcal{U}_x(n,i): n\in\mathbb{N}\}$ 满足 $\mathcal{U}_x(n,i)$ 是有限的且 $\cup\{\mathcal{P}_x(n): x\in X, n\in\mathbb{N}\}$ 构成 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基, 这里 $\mathcal{P}_x(n)=\{P_x(n,i): i\in\mathbb{N}\}$ 并且 $P_x(n,i)=\cup\mathcal{U}_x(n,i)$. 对 $i\in\mathbb{N}$, 我们记 $\mathcal{U}_i=\{P_\alpha: \alpha\in I_i\}$ 并赋予 I_i 离散拓扑. 令

$M=\{\alpha=(\alpha_i)$: 存在 $x_\alpha\in X$ 以及 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $P_{\alpha_i}\in\mathcal{U}_x(n,i)$ 对每一 $i\in\mathbb{N}$ 成立 $\}$.

定义 $f: M \to X$ 为 $f(\alpha) = x_\alpha$. 易见 M 是一个度量空间， f 是良定义的，连续满的 σ 紧映射. 下面证明 f 是商映射. 注意到 X 是弱拟第一可数的，我们只需证明 f 是序列商的.

设 L 是 X 中收敛于点 x 的一个序列. 由引理 2.1.2, 存在其子列 L' 以及 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $P_x(n_0, i)$ 对每一 $i \in \mathbb{N}$ 成立. 由于 $\mathcal{U}_x(n_0, 1)$ 是有限的，存在 L' 的一个子列 L_1 使得 L_1 终于某个 $P_{\alpha_1} \in \mathcal{U}_x(n_0, 1)$. 归纳地，我们可以选择序列 L_i 和 $\alpha_i \in I_i$ 使得对任意 $i \in \mathbb{N}$, L_i 终于 $P_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_x(n_0, i)$ 且 L_{i+1} 是 L_i 的一个子列. 取 $x_i \in L_i$ 和 $\beta(i) \in f^{-1}(x_i)$ 使得当 $k \leq i$ 时 $\beta(i)$ 的第 k 个坐标为 α_k. 因此 $\{\beta(i) : i \in \mathbb{N}\} \to (\alpha_i)$ 且 $f(\{\beta(i) : i \in \mathbb{N}\}) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是 L 的一个子列. 这就证明了 f 是序列商的. 证明完毕.

定理 3.1.8 *对于空间 X, 下述等价：*

(1) X 具有点可数 $\aleph_0$ 弱基；

(2) 存在度量空间 M 和商可数到一映射 $f: M \to X$ [80];

(3) 存在度量空间 M 和商 s 映射 $f: M \to X$ 使得对任意 $x \in X$, $\partial f^{-1}(x)$ 是可数的.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 见 [80]. (2)$\Rightarrow$(3) 是显然的. 下面我们证明 (3)$\Rightarrow$(1).

设 $\mathcal{B}$ 是空间 M 的一个点可数基. 对每一非孤立点 $x \in X$, 记 $\partial f^{-1}(x) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 设 $\mathcal{B}_x(n) = \{B_x(n,m) : m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ 点 $x_n \in M$ 处可数的局部基使得对每一 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, $B_x(n, m+1) \subset B_x(n,m)$. 令

$$P_x(n,m) = \begin{cases} f(B_x(n,m)), & x \text{ 是一个非孤立点} \\ \{x\}, & x \text{ 是一个孤立点.} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_x(n) = \{P_x(n,m) : m \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}.$$

由于 f 是一个 s 映射， $\mathcal{P}$ 是点可数的. 容易验证 X 是序列空间并且对任意 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_x(n)$ 是 x 处单调下降的网. 下面证明对任意收敛于 x 的序列 L, 存在其子列 L' 和 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $P_x(n_0, m)$ 对每一 $m \in \mathbb{N}$ 成立. 这样，根据引理 2.1.2, $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

不失一般性，我们假设 $x \notin L$, 于是 x 是 X 中的非孤立点. 由于 f 是商映射，从而是序列商映射，存在 M 中序列 S 使得 $f(S)$ 是 L 的一个子列且 S 收

敛于某个 $y \in f^{-1}(x)$. 显然, $y \in \partial f^{-1}(x)$, 因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $y = x_{n_0}$, 所以 $f(S)$ 终于 $P_x(n_0, m)$ 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 成立.

问题 3.1.9 *[80]* 是否每一度量空间的商 σ 紧映象都是某一度量空间的商可数到一映象?

问题 3.1.10 *[83]* 是否每一度量空间的闭 σ 紧映象都是某一度量空间的闭可数到一映象?

问题 3.1.11 完备映射 (或闭序列覆盖映射) 是否保持具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基的空间?

§3.2 具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间

对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 称为是 *闭包保持的*[88], 如果对任意 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, $\overline{\cup\mathcal{P}'} = \cup\{\overline{P} : P \in \mathcal{P}'\}$; $\mathcal{P}$ 称为是 *遗传闭包保持的*[60], 若对 $H(P) \subset P \in \mathcal{P}$, 集族 $\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是闭包保持的. $\mathcal{P}$ 称为 *弱遗传闭包保持的*[25], 若对 $x(P) \in P \in \mathcal{P}$, $\{x(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是 X 的闭离散子空间. 易见每一局部有限集族都是遗传闭包保持的; 每一遗传闭包保持集族都是闭包保持的和弱遗传闭包保持的.

将 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理条件中的局部有限或者离散集族换成上面的几种集族的讨论构成了广义度量空间理论中最辉煌的一页. 1975 年, D. K. Burke, R. Engelking 和 D. J. Lutzer [25] 证明了具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间是度量空间 (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理), 以及具有 σ 弱遗传闭包保持基的正则空间未必是度量空间. 具有 σ 闭包保持基的正则空间称为 M_1 空间, 这是一类经典的广义度量空间, 著名的 M_i 问题就是 M_1 空间与层空间 (也称 M_3 空间) 的等价性问题. 此外, 在 [22] 中, J. R. Boone 证明了具有 σ 紧有限基的正则空间是度量空间.

受上述工作影响, 我们自然地关心具有 σ 遗传闭包保持 (σ 弱遗传闭包保持, σ 闭包保持, σ 紧有限) $\aleph_0$ 弱基的空间. 最近刘川和林寿证明了下述定理, 出于完整性的考虑, 我们将其证明列在这里.

定理 3.2.1 *[81]* 对正则空间 X, 下述等价:

(1) X 具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基;

(2) X 具有 σ 遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基.

证明 (1)⇒ (2) 显然. 下证 (2)⇒ (1). 设 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_m$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基. 由于任一空间的 σ 遗传闭包保持 cs^* 网都是 k 网 [96], X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网. 因此，由定理 1.2.5, 例 2.3.7 和定理 3.1.2, 我们只需证明 X 是弱拟第一可数的. 由于 X 是正则的，不妨设 $\mathcal{B}$ 中每一元都是闭的. 对 $n\in\mathbb{N}$ 以及非孤立点 $x\in X$, 下证 $\mathcal{B}_x(n)$ 是可数的. 由于对每一 $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_m\cap\mathcal{B}_x(n)$ 是遗传闭包保持的，我们只需证明存在非平凡收敛序列 L 收敛于 x 且 L 终于每一 $B\in\mathcal{B}_x(n)$.

注意到 X 是 σ 空间， X 中每一点都是 G_δ 集，从而存在 X 中开集序列 $\{U_i\}$ 使得 $\{x\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_i$ 且 $\overline{U}_{i+1}\subset U_i$. 对每一 $m\in\mathbb{N}$ 和 $B\in\mathcal{B}_m\cap\mathcal{B}_x(n)$, 取 $x(B,m)\in U_m\cap B-\{x\}$. 令 $M=\{x\}\cup\{x(B,m):m\in\mathbb{N},B\in\mathcal{B}_m\cap\mathcal{B}_x(n)\}$. 则 M 是 X 的闭子空间且 x 是 M 中唯一的非孤立点. 不难看出 M 具有一个 σ 遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基 $\{B\cap M:B\in\mathcal{B}\}$. 赋予 M 一个新的拓扑如下： M 中除 x 外都是孤立点， x 的邻域基为 $\{B\cap M:B\in\mathcal{B}_x(n)\}$. 我们记此空间为 M'. 易见 M' 是正则的且 M' 上的拓扑细于 M 上拓扑. 因此 $\{B\cap M:B\in\mathcal{B}_x(n)\}$ 在 M' 中是 σ 遗传闭包保持的, 从而 M' 具有 σ 遗传闭包保持基. 这说明 M' 是可度量化的. 因此, 存在 M' 中非平凡序列 L 收敛于 x. 由于 $\{B\cap M:B\in\mathcal{B}_x(n)\}$ 是 x 在 M' 中的局部基， L 终于 $\{B\cap M:B\in\mathcal{B}_x(n)\}$ 中每一元，从而 L 终于每一 $B\in\mathcal{B}_x(n)$. 这就证明了 X 是弱拟第一可数的.

在 [25] 中， D. K. Burke, R. Engelking 和 D. J. Lutzer 给出了一个具有 σ 弱遗传闭包保持基的正则空间不是 k 空间，从而不是可度量化的. 同时，他们证明了具有 σ 弱遗传闭包保持基的正则 k 空间是可度量化的. 因此，我们知道具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正则空间未必具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基. 这也诱发了我们对具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的 k 空间的讨论. 下面将证明这样的空间正是具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基的空间.

引理 3.2.2 设 X 是一个序列空间， $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基. 则 X 具有一个 $\aleph_0$ 弱基 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 使得

(1) $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}$;

(2) 对任意 $x\in X-I(X)$ 以及 $n\in\mathbb{N}$, 存在一个非平凡的序列 L 收敛于 x 终于 $\mathcal{B}_x(n)$ 中每一个元;

(3) 对任意 $x \in X$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 如果 $P \in \mathcal{B}_x(n)$ 且 $P \subset Q \in \mathcal{B}$, 则 $Q \in \mathcal{B}_x(n)$.

证明 对 $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, 如果 $x \in I(X)$, 则令 $\mathcal{P}'_x(n) = \mathcal{P}_x(n)$. 如果 $x \in X - I(X)$, 由于 X 是一个序列空间, 存在非平凡序列 L_0 收敛于 x. 由引理 2.1.2, 存在其子列 L_1 以及 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L_1 终于 $\mathcal{P}_x(n_0)$ 中每一个元. 对 $n \in \mathbb{N}$, 如果不存在非平凡序列 L 使得 L 收敛于 x 并且终于 $\mathcal{P}_x(n)$ 中每一个元, 则令 $\mathcal{P}'_x(n) = \mathcal{P}_x(n_0)$, 否则令 $\mathcal{P}'_x(n) = \mathcal{P}_x(n)$. 由引理 2.1.2, 容易验证 $\mathcal{P}' = \cup\{\mathcal{P}'_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基并且满足条件 (1) 和 (2).

对 $x \in X$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 再令

$$\mathcal{B}_x(n) = \{B \in \mathcal{P} : P \subset B \text{ 对某个 } P' \in \mathcal{P}'_x(n)\text{成立}\},$$

则 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基满足条件 (1)–(3).

引理 3.2.3 *[74] 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个弱遗传闭包保持的子集族. 取 $D = \{x \in X : \mathcal{P}$ 在 x 处不是点有限的 $\}$. 则 $\{P - D : P \in \mathcal{P}\} \cup \{\{x\} : x \in D\}$ 是紧有限的.*

定理 3.2.4 *对空间 X, 下述条件等价:*

(1) X 具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基;

(2) X 是一个弱拟第一可数空间并且具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基;

(3) X 是一个 k 空间并且具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3) 是显然的. 我们下面证明 (3)$\Rightarrow$(1).

设 X 是一个 k 空间并且具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基, 则根据引理 3.2.3, X 具有 σ 紧有限网, 因此 X 的任一紧子空间都具有可数网, 从而 X 的每一紧子空间都是可度量化的 [34, 定理 3.1.19]. 所以 X 是一个序列空间.

设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup\{\mathcal{P}_x(m) : x \in X, m \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基, 这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是弱遗传闭包保持集族并且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 由引理 3.2.2, 我们不妨设 $\mathcal{P}$ 满足:

(i) 对任意 $x \in X - I(X)$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, 存在非平凡序列 $L_{x,m}$ 收敛于 x 并且终于 $\mathcal{P}_x(m)$ 中每一个元.

(ii) 对 $x \in X$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, 若 $P \in \mathcal{P}_x(m)$ 且 $P \subset Q \in \mathcal{P}$, 则 $Q \in \mathcal{P}_x(m)$.

如果 $x \in I(X)$, 则 $\{x\}$ 开于 X, 所以 $\{x\} \in \mathcal{P}$. 从而 $I(X)$ 是 X 的一个 σ 闭离散的子空间. 对 $n, m \in \mathbb{N}$ 以及 $P \in \mathcal{P}_n$, 令

$$D_n = \{x \in X : \mathcal{P}_n \text{ 在 } x\text{点处不是点有限的}\}$$

以及

$$W_{n,m}(P) = (P - D_n) \cup \{x \in X - I(X) : P \in \mathcal{P}_x(m)\}.$$

则 $W_{n,m}(P) \subset P$. 下面证明每一 $\{W_{n,m}(P) : P \in \mathcal{P}_n\}$ 是紧有限的. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的，我们只需证明 $\{W_{n,m}(P) : P \in \mathcal{P}_n\}$ 是点有限的. 任取 $x \in X$, 由于 $\{P - D_n : P \in \mathcal{P}_n\}$ 是点有限的，不妨设 $x \in X - I(x)$. 若 $\{P \in \mathcal{P}_n : x \in W_{n,m}(P)\}$ 是无限的，则 $\mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$ 是无限的. 选取 $\{P_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$. 因为 $L_{x,m}$ 终于 $\mathcal{P}_x(m)$ 中每一个元，我们可以选择 $L_{x,m}$ 的子序列 $\{x_i\}$ 使得 $x_i \in P_i$ 对任意 $i \in \mathbb{N}$ 成立. 这与 $\mathcal{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的矛盾. 因此 $\{W_{n,m}(P) : P \in \mathcal{P}_n\}$ 是紧有限的.

对 $x \in X$ 和 $m \in \mathbb{N}$. 取

$$\mathcal{B}_x(m) = \begin{cases} \{\{x\}\}, & x \in I(X) \\ \{W_{n,m}(P) : P \in \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N}\}, & x \in X - I(X) \end{cases}$$

则 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(m) : x \in X, m \in \mathbb{N}\}$ 是 σ 紧有限的. 下面证明 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基.

首先，对任意 $x \in X$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_x(m)$ 是 x 处的一个网. 事实上，若 U 是 x 的一个开邻域，则存在 $P \in \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立且使得 $P \subset U$. 于是 $x \in W_{n,m}(P) \subset P \subset U$. 其次，对 $x \in X - I(X)$ 和 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x(m)$, 我们记 $B_i = W_{n_i,m}(P_i)$ 使得 $P_i \in \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_{n_i}$ 对 $i = 1, 2$ 成立. 因此存在 $P_3 \in \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_{n_3}$ 使得 $P_3 \subset P_1 \cap P_2$ 且 $n_3 \geq \max\{n_1, n_2\}$. 取 $B_3 = W_{n_3,m}(P_3)$. 显然 $D_{n_3} \supset D_{n_1} \cup D_{n_2}$. 如果 $y \in \{x \in X - I(X) : P_3 \in \mathcal{P}_x(m)\}$, 则 $P_3 \in \mathcal{P}_y(m)$, 由 (ii), $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_y(m)$, 从而 $y \in \{x \in X - I(X) : P_1, P_2 \in \mathcal{P}_x(m)\}$. 因此 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. 再次，假设 L 是一个非平凡序列收敛于 $x \in X$. 根据引理 2.1.2, 存在其子列 L' 以及 $m \in \mathbb{N}$ 使得 L' 终于 $\mathcal{P}_x(m)$ 中每一个元. 由引理 3.2.3, $(L' \cup \{x\}) \cap D_n$ 是有限的，因此 L' 终于 $\mathcal{B}_x(m)$ 中每一个元. 综上， $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 σ 紧有限的 $\aleph_0$ 弱基.

推论 3.2.5 每一具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正则强 *Fréchet* 空间是可度量化的.

证明 设 X 是一个具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的强 Fréchet 空间. 根据定理 3.2.4, X 具有 σ 紧有限的 $\aleph_0$ 弱基. 则 X 是弱拟第一可数的. 由 [101, 引理 2.14], X 是第一可数的. 由于第一可数空间的任一紧有限集族都是局部有限的, X 具有 σ 局部有限的 $\aleph_0$ 弱基, 从而是 $\aleph$ 空间. 因此, X 是度量化的.

问题 3.2.6 具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是否具有 σ 局部有限 $\aleph_0$ 弱基?

注 3.2.7 刘川 *[75]* 提出问题: 具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否具有 σ 局部有限弱基? 注意到如果问题 *3.2.6* 的回答是肯定的, 则该问题也可以被肯定地回答.

引理 3.2.8 如果空间 X 具有 σ 弱遗传闭包保持 cs^* 网, 则 X 具有 σ 弱遗传闭包保持 k 网和 σ 紧有限 k 网.

证明 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的 σ 弱遗传闭包保持的 cs^* 网, 这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是弱遗传闭包保持集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 令

$$D_n = \{x \in X : \mathcal{P}_n\text{在 } x \text{ 处不是点有限的}\},$$

$$\mathcal{P}'_n = \{P - D_n : P \in \mathcal{P}_n\} \cup \{\{x\} : x \in D_n\}.$$

根据引理 3.2.3, $\mathcal{P}' = \cup\{\mathcal{P}'_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的 σ 紧有限的网. 因此 X 的每一紧子空间都是可度量化的. 设 K 是一个紧集, U 是开集且 $K \subset U$, 则存在有限集 $K' \subset K$ 使得 $\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap (K - K') \neq \emptyset\}$ 是有限的对每一 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 否则的话, 我们可以选取无限序列 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset K$ 以及 $\{P_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}_n$ 使得 $x_i \in P_i$ 且 P_i 两两不同. 由于 K 是可度量化的, $\{x_i\}$ 具有收敛子序列, 这与 $\mathcal{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的矛盾.

令 $F_n = \cup\{P \in \mathcal{P}_n : P \subset U\}$. 断言 $K \subset \bigcup_{n \le n_0} F_n$ 对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 成立. 否则我们可以选取序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \in K - \bigcup_{i \le n} F_i$. 由于 K 是可度量化的, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于点 $x \in X$. 于是存在 $P \in \mathcal{P}_m$ 使得 $\{x\} \cup \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 成立. 因此 $x_{n_m} \in F_m$, 矛盾. 从而存在有限集族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ 使得 $K \subset \cup\mathcal{F} \subset U$. 这表明 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 σ 弱遗传闭包保持

k 网. 取 m_0 使得 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_{m_0}$. 令 $\mathcal{F}' = \{P - D_{m_0} : P \in \mathcal{F}\} \cup \{\{x\} : x \in K \cap D_{m_0}\}$. 则 $K \subset \cup\mathcal{F}' \subset U$. 由引理 3.2.3, $\mathcal{F}'$ 是有限的. 这说明 $\mathcal{P}'$ 是 X 的一个 σ 紧有限的 k 网.

定理 3.2.9 *在连续统假设 (CH) 下，每一具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的可分正则空间都具有可数的 $\aleph_0$ 弱基.*

证明 设 X 是一个具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的可分空间. 由 (CH), X 的特征不大于 ω_1. 令 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup\{\mathcal{P}_x(m) : x \in X, m \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 σ 弱遗传闭包保持的 $\aleph_0$ 弱基，这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是弱遗传闭包保持集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 不妨设对每一 $m \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X$, 若 $x \in I(X)$ 则 $\mathcal{P}_x(m) = \{\{x\}\}$, 否则 $\{x\} \notin \mathcal{P}_x(m)$. 现在对 $x \in X - I(x)$ 以及 $n, m \in \mathbb{N}$, 假设 $\mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$ 是不可数的. 取 $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 为 x 点处的局部基. 注意到对 x 的任意开邻域 V, $V \cap (P - \{x\}) \neq \emptyset$ 对每一 $P \in \mathcal{P}_x(m)$ 成立. 于是，归纳地，存在集合 $S = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X$ 以及子族 $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$ 使得 $x_\alpha \in V_\alpha \cap P_\alpha$, 这里 $x_\alpha \neq x$ 和 P_α 都是两两不同的. 因此 $x \in \overline{S}$, 这和 $\mathcal{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的矛盾. 所以 X 是弱拟第一可数的，从而是序列空间.

由引理 3.2.8, X 具有 σ 紧有限 k 网. 在 (CH) 下，每一具有 σ 紧有限 k 网的可分序列空间是一个 $\aleph_0$ 空间 [111]. 因此， X 具有可数的 $\aleph_0$ 弱基 [80].

推论 3.2.10 *在 (CH) 下，对于具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间上的闭映射，如果象空间是正则的，则该映射是紧覆盖映射.*

证明 设 $f : X \to Y$ 是一个闭映射， X 具有 σ 弱遗传闭包保持的 $\aleph_0$ 弱基, Y 是正则的. 假设 L 是 Y 中的一个紧集. 由于 X 具有 σ 弱遗传闭包保持网, Y 也具有 σ 弱遗传闭包保持网. 由引理 3.2.3, Y 具有 σ 紧有限的网. 于是 L 是 Y 的一个紧度量子空间. 这样我们可以找到可数的 $D \subset L$ 使得 $L = \overline{D}$. 对 $y \in D$, 取 $x_y \in f^{-1}(y)$. 令 $E = \{x_y : y \in D\}$. 则 E 是可数的且 $f(\overline{E}) = L$. 于是 $\overline{E}$ 是一个具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的可分空间. 由定理 3.2.9, $\overline{E}$ 具有 $\aleph_0$ 弱基, 因此 $\overline{E}$ 是一个仿紧空间. 从而存在紧集 $K \subset \overline{E}$ 使得 $f(K) = L$ [34].

空间 X 称为是 $\aleph_1$ 紧的如果 X 中每一闭离散子空间至多是可数的. 设 S 是 X 的一个子集. 我们按以下方式归纳地定义算子 seq cl: seq $\mathrm{cl}^0(S)$=S; seq cl(S)=$\{x : x$ 是 S的一个极限点$\}$; 对序数 α , 令 seq $\mathrm{cl}^{\alpha+1}(S)$=seq cl(seq $\mathrm{cl}^\alpha(S)$);

如果 α 是一个极限序数，则令 seq $\mathrm{cl}^{\alpha+1}(S)=\bigcup_{\beta<\alpha}$seq $\mathrm{cl}^{\beta}(S)$. 空间 X 的 *序列式序* 是指最小的序数 α 使得对任意 $S\subset X$, $\mathrm{cl}(S)$=seq $\mathrm{cl}^{\alpha}(S)$.

引理 3.2.11 *设空间 X 具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基. 如果 $A\subset X$ 是 $\aleph_1$ 紧的，则 seq cl(A) 也是 $\aleph_1$ 紧的.*

证明　假设不然，存在 seq $\mathrm{cl}(A)-A$ 中闭离散子集 $D=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 对 $\alpha<\omega_1$, 令 $\{x_n^\alpha\}\subset A$ 是收敛于 x_α 的一个序列. 取 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}=\cup\{\mathcal{P}_x(m):x\in X,m\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 σ 弱遗传闭包保持的 $\aleph_0$ 弱基, 这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是弱遗传闭包保持集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对每一 $\alpha<\omega_1$, 我们取 $m_\alpha\in\mathbb{N}$ 以及 $\{x_n^\alpha\}$ 的子序列 $\{y_n^\alpha\}$ 使得 $\{y_n^\alpha\}$ 终于 $\mathcal{P}_{x_\alpha}(m_\alpha)$ 中每一个元. 由于 D 是闭离散的，我们可以取 $P_\alpha\in\mathcal{P}_{x_\alpha}(m_\alpha)$ 使得 $P_\alpha\cap D=\{x_\alpha\}$ 对每一 $\alpha<\omega_1$ 成立. 不妨设对每一 $\alpha<\omega_1$ 以及某个 $n_0\in\mathbb{N}$, $\{y_n^\alpha:n\in\mathbb{N}\}\subset P_\alpha$ 且 $\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathcal{P}_{n_0}$.

如果 $\{y_n^\alpha:n\in\mathbb{N},\alpha<\omega_1\}$ 是不可数的，我们选不可数集 $S=\{y_\beta:\beta<\omega_1\}\subset\{y_n^\alpha:n\in\mathbb{N},\alpha<\omega_1\}$ 使得 $y_\beta\in P_\beta$. 这样 S 就是 A 中的一个不可数的闭离散集，矛盾.

如果 $\{y_n^\alpha:n\in\mathbb{N},\alpha<\omega_1\}$ 是可数的. 对每一 $\alpha<\omega_1$, 取 $k(\alpha)\in\mathbb{N}$ 使得 $\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 在 $y_{k(\alpha)}^\alpha$ 点处是点有限的. 则 $T=\{y_{k(\alpha)}^\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是可数集. 这样 T 与 $\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 中至多有限个元相交，从而 $\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是可数的，矛盾.

综上， seq $\mathrm{cl}(A)$ 是 $\aleph_1$ 紧的.

定理 3.2.12 *设 X 是一个具有 σ 弱遗传闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的可分正则空间. 如果下述条件之一成立，则 X 具有可数的 $\aleph_0$ 弱基:*

(1) X 是 $\aleph_1$ 紧的;

(2) X 的序列式序是可数的.

证明　(1) 由引理 3.2.8, X 具有 σ 紧有限的 k 网. 由于每一具有 σ 紧有限 k 网的 $\aleph_1$ 紧空间都是 $\aleph_0$ 空间 [62], 我们只需证明 X 是弱拟第一可数的.

设 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}=\cup\{\mathcal{P}_x(m):x\in X,m\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 σ 弱遗传闭包保持的 $\aleph_0$ 弱基，这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是弱遗传闭包保持集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对每一 $x\in X-I(X)$ 以及 $m\in\mathbb{N}$, 不妨设 $\{x\}\notin\mathcal{P}_x(m)$. 假设对 $n,m\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X-I(X)$, $\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_n$ 是可数的. 则我们可以选取不可数集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$

以及 $\{\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}\} \subset \mathcal{P}_x(m) \cap \mathcal{P}_n$ 使得 $\{x, x_\alpha\} \subset P_\alpha$ 并且 P_α 是两两不同的. 这样的话, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是 X 中不可数的闭离散子集, 这与 X 是 $\aleph_1$ 紧的矛盾. 所以 X 是弱拟第一可数的.

(2) 由于 X 是可分空间, 取可数集 $D \subset X$ 使得 $X = \overline{D}$. 由于 X 的序列式序可数, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{seq}\ \mathrm{cl}^n(D)$. 由引理 3.2.11, 每一 $\mathrm{seq}\ \mathrm{cl}^n(D)$ 是 $\aleph_1$ 紧的. 从而 X 也是 $\aleph_1$ 紧的. 由 (1), X 具有可数的 $\aleph_0$ 弱基.

§3.3 $\aleph_0$ 弱基，覆盖性质和度量化定理

本节由两部分组成, 第一部分讨论具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的空间上的覆盖性质; 第二部分讨论具有 cs* 正则的 $\aleph_0$ 弱基的空间的度量化定理.

空间 X 称为是*仿紧的 (亚 Lindelöf 的)* [24], 如果 X 的每一开覆盖都具有一个局部有限的 (点可数) 开加细.

林寿 [70] 和高智明 [40] 分别证明了每一具有 σ 闭包保持弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 的以及每一具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是遗传仿紧的. 下面两个定理改进了他们的结果.

定理 3.3.1 *每一具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 的.*

证明 设 X 是一个正则空间, $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(m) : x \in X, m \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个闭的 $\aleph_0$ 弱基, $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$, 这里每一 $\mathcal{P}_n$ 是闭包保持的闭集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 由于 X 具有 σ 闭包保持的网, X 是一个完全空间. 容易验证每一完全的亚 Lindelöf 空间都是遗传亚 Lindelöf 的 [24]. 所以我们只需证明 X 是一个亚 Lindelöf 空间.

断言 1 *X 中的每一离散闭集族都存在点可数开扩张.*

设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 中的一个离散闭集族. 对 $\alpha \in \Lambda$, 令 $E_\alpha(\emptyset) = G_\alpha(\emptyset) = F_\alpha$ 且 $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}$.

对自然数组成的有限序列 δ 和 $\alpha \in \Lambda$, 设 $E_\alpha(\delta)$, $G_\alpha(\delta)$ 和 $\mathcal{F}(\delta)$ 都已经定义好, 对 $n \in \mathbb{N}$, 我们按以下方式来定义 $E_\alpha(\delta n)$, $G_\alpha(\delta n)$ 和 $\mathcal{F}(\delta n)$:

$$\begin{aligned} E_\alpha(\delta n) &= \cup\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap E_\beta(\delta) = \emptyset, \beta \in \Lambda - \{\alpha\}\}; \\ G_\alpha(\delta n) &= E_\alpha(\delta n) - \cup\{E_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda - \{\alpha\}\}; \\ \mathcal{F}(\delta n) &= \{G_\alpha(\delta n) : \alpha \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

则 $\mathcal{F}(\delta n)$ 是互不相交的集族并且对每一 $\delta\in\mathbb{N}^{<\omega}, n\in\mathbb{N}, \Lambda'\subset\Lambda, \bigcup_{\beta\in\Lambda'}E_\beta(\delta n)$ 是 X 中闭集. 令 $U_\alpha=\cup\{G_\alpha(\delta):\delta\in\mathbb{N}^{<\omega}\}, \mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 我们证明 $\mathcal{U}$ 就是所需要的集族.

首先, 对每一 $\alpha\in\Lambda, F_\alpha=G_\alpha(\emptyset)\subset U_\alpha$. 给定 $x\in U_\alpha$ 以及 $m\in\mathbb{N}$, 存在一个自然数组成的有限序列 δ 使得 $x\in G_\alpha(\delta)$, 则 $x\in X-\cup\{E_\beta(\delta):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\}$, 因此存在 $P_1\in\mathcal{P}_x(m)$ 使得 $P_1\cap(\cup\{E_\beta(\delta):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\})=\emptyset$, 从而 $P_1\subset E_\alpha(\delta n)$. 因为 $x\in E_\alpha(\delta)$, 根据 $E_\beta(\delta n)$ 的构造, 我们有 $x\in X-\cup\{E_\beta(\delta n):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\}$, 于是存在 $P_2\in\mathcal{P}_x(m)$ 使得 $P_2\cap(\cup\{E_\beta(\delta n):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\})=\emptyset$, 因此 $P_1\cap P_2\subset G_\alpha(\delta n)\subset U_\alpha$. 由 $\aleph_0$ 弱基的定义， U_α 是开的.

下面证明 $\mathcal{U}$ 是点可数的. 假设不然， $|\{\alpha\in\Lambda:x\in\mathcal{U}_\alpha\}|>\omega$ 对某个 $x\in X$ 成立, 于是, 存在自然数组成的有限序列 δ 以及不可数集 $\Lambda'\subset\Lambda$ 使得 $x\in G_\alpha(\delta)$ 对每一 $\alpha\in\Lambda'$ 成立，这与 $\{G_\alpha(\delta):\alpha\in\Lambda\}$ 互不相交矛盾.

断言 2 *X 是亚 Lindelöf 空间.*

设 $\mathcal{W}$ 是 X 的一个开覆盖. 注意到由于 X 具有 σ 闭包保持网，所以 X 是次仿紧的. 因此 $\mathcal{W}$ 具有一个闭加细 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i$, 这里每一 $\mathcal{F}_i=\{F_{i\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$ 是 X 的离散闭集族. 对 $i\in\mathbb{N}$, 由断言 1, $\mathcal{F}_i$ 可以被扩张成一个点可数开集族 $\mathcal{U}_i=\{U_{i\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$. 对 $\alpha\in\Lambda_i$, 取 $W_{i\alpha}\in\mathcal{W}$ 使得 $F_{i\alpha}\subset W_{i\alpha}$. 这样 $\bigcup_{i\in\mathbb{N},\alpha\in\Lambda_i}(W_{i\alpha}\cap U_{i\alpha})$ 是 $\mathcal{W}$ 的一个点可数的开加细. 这说明 X 是一个亚 Lindelöf 空间.

定理 3.3.2 *每一具有 σ 闭包保持 $\aleph_0$ 弱基的正规空间是遗传仿紧的.*

证明　设 X 是一个正规空间， $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x(m):x\in X, m\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个闭的 $\aleph_0$ 弱基， $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$, 这里每一 $\mathcal{P}_n$ 都是闭包保持闭集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 类似于定理 5.1.11, X 是完全的. 因为每一完全的仿紧空间是遗传仿紧的 [24], 所以我们只需证明 X 是仿紧的.

设 $\mathcal{F}=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 中的一个离散闭集族. 为了叙述的方便起见, 我们称 X 的子集 B 为子集 A 的一个 $\aleph_0$ 弱邻域如果对每一 $x\in A, m\in\mathbb{N}$, 存在 $P\in\mathcal{P}_x(m)$ 使得 $P\subset B$.

断言 1 *$\mathcal{F}$ 有互不相交的 $\aleph_0$ 弱邻域扩张.*

对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} E_\alpha(n) &= \cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\beta=\emptyset, \beta\in\Lambda-\{\alpha\}\};\\ G_\alpha(n) &= E_\alpha(n)-\cup\{E_\beta(n):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\};\\ G_\alpha &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_\alpha(n). \end{aligned}$$

则 $G_\alpha\cap G_\beta=\emptyset$ 对每一 $\alpha,\beta\in\Lambda,\alpha\neq\beta$ 成立. 对 $\alpha\in\Lambda$, 取 $L_\alpha=\cup\{F_\beta:\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\}$, 则 L_α 是 X 中闭集且 $F_\alpha\cap L_\alpha=\emptyset$. 对 $x\in F_\alpha, m\in\mathbb{N}$, 存在 $n_1\in\mathbb{N}$ 和 $P_1\in\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_{n_1}$ 使得 $P_1\cap L_\alpha=\emptyset$, 因此 $P_1\subset E_\alpha(n_1)$. 由于 $x\notin\cup\{E_\beta(n):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\}$, 存在 $n_2\in\mathbb{N}$ 和 $P_2\in\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_{n_2}$ 使得 $P_2\cap(\cup\{E_\beta(n):\beta\in\Lambda-\{\alpha\}\})=\emptyset$, 因此 $P_1\cap P_2\subset G_\alpha$. 这样 G_α 是 F_α 的一个 $\aleph_0$ 弱邻域.

断言 2 $\mathcal{F}$ 具有离散的闭 $\aleph_0$ 弱邻域扩张.

对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 令

$F^*_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\subset G_\alpha$ 以及 $P\in\mathcal{P}_x(m)$ 对某个 $x\in F_\alpha$ 和 $m\in\mathbb{N}\}$.
由于 $\mathcal{P}_n$ 是闭包保持的，易见 $F^*_\alpha(n)\subset G_\alpha$ 和 $\{F^*_\alpha(n):\alpha\in\Lambda\}$ 都是离散的. 令 $P_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha=\emptyset\}$, 则 $P_\alpha(n)$ 是 X 中闭集且 $P_\alpha(n)\cap F_\alpha=\emptyset$. 由 X 的正规性，存在开集 $V_\alpha(n)\subset X$ 使得 $F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset\overline{V_\alpha(n)}\subset X-P_\alpha(n)$. 取 $F_\alpha(n)=F^*_\alpha(n)\cap\overline{V_\alpha(n)}$ 以及 $W_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_\alpha(n)$, 则 $\{F_\alpha(n):\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的离散闭集族. 对于任意的 $x\in F_\alpha, m\in\mathbb{N}$, 由断言 1, 存在 $n_3\in\mathbb{N}$ 和 $P_3\in\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_{n_3}$ 使得 $P_3\subset G_\alpha$, 因此 $P_3\subset F^*_\alpha(n_3)$. 同样的，存在 $n_4\in\mathbb{N}$ 和 $P_4\in\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_{n_4}$ 使得 $P_4\subset V_\alpha(n_4)$. 不妨设 $n_3=n_4$. 于是 $P_3\cap P_4\subset F_\alpha(n_4)\subset W_\alpha$, 这说明 W_α 是 F_α 的一个 $\aleph_0$ 弱邻域. 为了完成断言 2 的证明，我们只需验证 $\{W_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是闭包保持的. 对每一 $\Lambda'\subset\Lambda, m\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X-\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$, $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$, 所以存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $P'\in\mathcal{P}_x(m)\cap\mathcal{P}_k$ 使得 $P'\cap\overline{V_\alpha(n)}=\emptyset$ 对每一 $n\geq k$ 和 $\alpha\in\Lambda'$ 成立，于是 $P'\subset\bigcap_{n\geq k,\alpha\in\Lambda'}P_\alpha(n)$, 从而 $P'\cap(\cup\{F_\alpha(n):\alpha\in\Lambda', n\geq k\})=\emptyset$. 进一步，由于 $\{F_\alpha(n):\alpha\in\Lambda', n<k\}$ 是离散闭集族的有限并，存在 $P''\in\mathcal{P}_x(m)$ 使得 $P''\cap(\cup\{F_\alpha(n):\alpha\in\Lambda', n<k\})=\emptyset$. 所以 $P'\cap P''\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha)=\emptyset$, 这就证明了 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$ 是闭的. 这样， $\{W_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个离散的闭 $\aleph_0$ 弱邻域扩张.

断言 3 X 是集态正规空间.

设 $\mathcal{H}_1$ 是 X 的一个离散闭集族. 由断言 2, 存在由 X 的离散闭集族组成的序列 $\{\mathcal{H}_n\}$ 使得每一 $\mathcal{H}_{n+1}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的一个 $\aleph_0$ 弱邻域扩张. 对 $n\in\mathbb{N}$, 记 $\mathcal{H}_n=$

$\{H_\alpha(n):\alpha\in\Lambda\}$. 令 $\mathcal{H}=\{H_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 这里每一 $H_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_\alpha(n)$. 对 $\alpha\in\Lambda$, $x\in H_\alpha$ 和 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in H_\alpha(j)$, 于是存在 $P\in\mathcal{P}_x(m)$ 使得 $P\subset H_\alpha(j+1)\subset H_\alpha$, 因此 H_α 开于 X. 这样， $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}_1$ 的一个离散开扩张，这说明 X 是集态正规的.

由于 X 是次仿紧的，由断言 3, X 是仿紧空间 [24].

具有正则覆盖的空间的度量化理论溯源于 A. V. Arhangel'skiĭ [6], 他证明了具有正则基的正则空间是可度量化的．此后，若干学者们致力于这个方面的研究，他们先后改进了 A. V. Arhangel'skiĭ 的结果 (见 H. W. Martin [85], 蒋继光 [53], 林寿 [69], 燕鹏飞和林寿 [123]). 接下来我们证明具有 cs* 正则的 $\aleph_0$ 弱基的正则空间是可度量化的，这改进了前面的结果．本节下面部分中，我们假设空间都是正则的.

定义 3.3.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一个覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为是 正则的 *[6]*, 如果对任意开集 $U\subset X$, $\{P\in\mathcal{P}:P\not\subset U\}$ 在 U 中每一点处都是局部有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为是 点正则的 *[1]*, 如果对任意开集 $U\subset X$, $\{P\in\mathcal{P}:P\not\subset U\}$ 在 U 中每一点处都是点有限的.

(3) $\mathcal{P}$ 称为是 cs 正则的 *[53]*, 如果对任意 $x\in X$, 收敛于 x 点的序列 $\{x_n\}$, 以及 x 的任意开邻域 U, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{P\in\mathcal{P}:P\cap(\{x\}\cup\{x_n:n>m\})\neq\emptyset,P\not\subset U\}$ 是有限的.

(4) $\mathcal{P}$ 称为是 cs^* 正则的, 如果对任意 $x\in X$, 收敛于 x 点的序列 $\{x_n\}$, 以及 x 的任意开邻域 U, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_k$ 使得 $\{P\in\mathcal{P}:P\cap(\{x\}\cup\{x_{n_k}\}_k)\neq\emptyset,P\not\subset U\}$ 是有限的.

显然，正则 $\Rightarrow$ cs 正则 $\Rightarrow$ cs* 正则 $\Rightarrow$ 点正则.

注 3.3.4 类似的，我们可以定义覆盖 $\mathcal{P}$ 为 wcs^* 正则的 如果对任意 $x\in X$, 收敛于 x 点的序列 $\{x_n\}$, 以及 x 的任意开邻域 U, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_k$ 使得 $\{P\in\mathcal{P}:P\cap\{x_{n_k}\}_k\neq\emptyset,P\not\subset U\}$ 是有限的．事实上， wcs^* 正则性等价于 cs^* 正则性．因为 wcs^* 正则性蕴涵点正则性，而一个覆盖是 cs^* 正则的当且仅当它是 wcs^* 正则的且是点正则的.

设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的一个开覆盖列． $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为是 X 的 弱展开 [118] 如果 $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{P}_n):n\in\mathbb{N}\}$ 构成 X 在 x 点处的弱基.

引理 3.3.5 *[123]* 设 X 是一个序列空间, $\mathcal{P}$ 是一个关于有限交封闭的点正则 cs^* 网. 则存在 X 的开覆盖列 $\{\mathcal{P}_n\}$ 使得 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 且 $\{\mathcal{P}_n\}$ 构成 X 的一个弱展开.

引理 3.3.6 *[123]* 序列空间 X 是度量化的当且仅当 X 具有一个弱展开 $\{\mathcal{P}_n\}$ 满足对任意 $x\in X$, 收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 以及包含 $\{x\}\cup\{x_n\}_n$ 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $st(\{x\}\cup\{x_n\},\mathcal{P}_n)\subset U$.

下面的定理 3.3.7 属于李克典 [61], 出于完整性的考虑，我们列出其证明.

定理 3.3.7 序列空间 X 是可度量化的当且仅当 X 具有一个 cs^* 正则的 cs^* 网.

证明 由于每一度量空间都具有正则基 [6], 必要性是显然的. 下证充分性. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs^* 正则的 cs^* 网. 不妨设 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭，则根据引理 3.3.5, $\mathcal{P}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_m$ 且 $\{\mathcal{P}_m\}$ 构成 X 的弱展开. 不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{P}_{m+1}$ 加细 $\mathcal{P}_m$ 对每一 $m\in\mathbb{N}$ 成立. 则对任意的有限集 $F\subset U\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{st}(F,\mathcal{P}_m)\subset U$. 为完成证明，我们只需证明对任意 $x\in X$, 收敛于 x 的序列 $\{x\}\cup\{x_n\}$, 以及开集 $U\supset\{x\}\cup\{x_n\}_n$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{st}(\{x\}\cup\{x_n\}_n,\mathcal{P}_n)\subset U$. 假设不然，由于 $\{\mathcal{P}_m\}$ 是 X 的一个弱展开，存在 $m_1\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{st}(x,\mathcal{P}_{m_1})\subset U$. 根据假设， $\mathrm{st}(\{x_n\}_n,\mathcal{P}_{m_1})\not\subset U$, 因此可以选取 $n_1\in\mathbb{N}$ 和 $P_{m_1}\in\mathcal{P}_{m_1}$ 使得 $x_{n_1}\in P_{m_1}\not\subset U$. 存在 $m_2>m_1$ 使得 $\mathrm{st}(\{x,x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}\},\mathcal{P}_{m_2})\subset U$. 类似地， $\mathrm{st}(\{x_n:n>n_1\},\mathcal{P}_{m_2})\not\subset U$, 从而可以选择 $n_2>n_1$ 和 $P_{m_2}\in\mathcal{P}_{m_2}$ 使得 $x_{n_2}\in P_{m_2}\not\subset U$. 归纳地，可以选择子列 $\{x_{n_k}\}_k\subset\{x_n\}$ 和 $P_{m_k}\in\mathcal{P}_{m_k}$ 使得 $x_{n_k}\in P_{m_k}\not\subset U$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs^* 正则的 cs^* 网，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}_i\subset\{x_{n_k}\}_k$ 使得 $\{P\in\mathcal{P}:P\cap\{x_{n_{k_i}}\}_i\neq\emptyset,P\not\subset U\}$ 是有限的. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, $\{m\in\mathbb{N}:P_{m_{k_i}}\in\mathcal{P}_m\}$ 是有限的，因此 $\{P_{m_{k_i}}:i\in\mathbb{N}\}$ 是无限的. 这是一个矛盾. 根据引理 3.3.6, X 是可度量化的.

定理 3.3.8 空间 X 是可度量化的当且仅当 X 具有 cs^* 正则的 $\aleph_0$ 弱基.

证明 只需证明充分性.

设 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 cs^* 正则的 $\aleph_0$ 弱基. 由引理 2.1.2, $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 cs^* 网.

断言 $\mathcal{P}$ 是点可数的.

对 $x \in X$, 置 $(\mathcal{P})_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$. 假设对某个 $x \in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是不可数的．由于 $\mathcal{P}$ 是点正则的，容易验证下述成立：

(i) 对每一 $y \neq x$, $\{P \in (\mathcal{P})_x : y \in P\}$ 是有限的；

(ii) 对每一无限子族 $\mathcal{P}' \subset (\mathcal{P})_x$, $\mathcal{P}'$ 构成 x 点处的一个网.

对任意 $P \in (\mathcal{P})_x$, 取 $y(P) \in P - \{x\}$, 则由 (i) $(\mathcal{P})_x \cap (\mathcal{P})_{y(P)}$ 是有限的．因为 $(\mathcal{P})_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{P \in (\mathcal{P})_x : |(\mathcal{P})_x \cap (\mathcal{P})_{y(P)}| = n\}$ 是不可数的，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{P}_0 = \{P \in (\mathcal{P})_x : |(\mathcal{P})_x \cap (\mathcal{P})_{y(P)}| = k_0\}$ 是不可数的．根据 (i), $\{y(P) : P \in \mathcal{P}_0\}$ 是不可数的．因此我们可以选择 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathcal{P})_x$ 以及 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $x_n \in P_n - \{x\}$ 以及 $|(\mathcal{P})_x \cap (\mathcal{P})_{x_n}| = k_0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立，这里 $P_n \neq P_{n'}$, $x_n \neq x_{n'}$ 对 $n \neq n'$ 成立．于是由 (ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 因为 $\mathcal{P}$ 是的 X 一个 cs* 网，存在 $\{Q_i : i \in \mathbb{N}\} \subset (\mathcal{P})_x$ 和 $\{n_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ 使得 $\{x_{n_j} : j \geq i\} \subset Q_i \subset X - \{x_{n_j} : j < i\}$ 对每一 $i \in \mathbb{N}$ 成立．取 $i_0 > k_0$, 则有 $|(\mathcal{P})_x \cap (\mathcal{P})_{x_{n_{i_0}}}| \geq i_0 > k_0$, 矛盾．这样就证明了 $\mathcal{P}$ 是点可数的.

由断言，我们知道 X 是弱拟第一可数的从而是序列空间．根据定理 3.3.7, X 是可度量化的.

推论 3.3.9 空间 X 是可度量化的当且仅当 X 具有 cs 正则的 $\aleph_0$ 弱基.

推论 3.3.10 *[85]* 空间 X 是可度量化的当且仅当 X 具有正则的弱基.

第四章　离散空间和 AP 空间

本章取材于作者与导师林寿教授的合作文章 “On discrete spaces and AP-spaces”. 映射和空间的相互分类问题是广义度量空间理论的重要起源之一 [26]. 面对众多由不同背景产生的形形色色的拓扑空间类, 通过适当的映射, 找出其内在联系, 进而给出其刻画是认识它们本质的有效途径, 这就是著名的 Alexandroff 设想 [2]. 在这个意义下，我们可以检验哪些空间类以及映射类是 “好的 ”. 实践表明 [20, 65, 90, 102, 103, 108, 120], 我们在定义 1.3.1 中给出的映射确实达到了 “好的 ” 映射的要求，而以度量空间作为起点，在这些映射下的象或逆象得到了 “好的 ” 空间类. 本章可以看成是 [20, 102, 103, 120] 的发展. 我们主要讨论两类利用映射类刻画的空间，一是使映满其上的每一序列商映射都是双商映射 (弱开映射) 的空间，我们证明这就是离散空间；二是使映满其上的每一商映射都是伪开映射的空间 — AP 空间. 我们给出 AP 空间的一个新刻画及其在函数空间理论中的一些应用.

§4.1　离散空间的映射刻画

定义 4.1.1 *映射 $f: X \to Y$ 称为是弱开的 [43, 122], 如果存在 Y 的一个弱基 $\mathcal{P} = \bigcup_{y\in Y} \mathcal{P}_y$ 且对每一 $y \in Y$, 存在点 $x_y \in f^{-1}(y)$ 使得对每一 x_y 的开邻域 U, $f(U)$ 包含 $\mathcal{P}_y$ 中某个元.*

M. Sakai 在 [102] 和 [103] 中讨论了使映满其上的每一序列覆盖映射都是双商映射的空间，以及使映满其上的每一序列覆盖映射都是弱开映射的空间. 我们感兴趣于如果把序列覆盖映射换成序列商映射情形如何. 本节证明了这样的空间都是离散空间. 其主要证明思想, 是构造原象空间中的 Isbell-Mrówka 空间嵌入.

由空间 X 中无限集组成的集族 $\mathcal{C}$ 称为是*几乎互不相交的*, 如果对任意 $A \neq B \in \mathcal{C}$, $A \cap B$ 是有限的.　$\mathcal{C}$ 称为是*极大几乎互不相交的*, 如果 $\mathcal{C}$ 是几乎互不相交的且对任意 $A \subset X$, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ 不是几乎互不相交的. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{N}$ 的极大几乎互不相交族，则 $|\mathcal{A}| > \omega$ [58]. *Isbell-Mrówka* 空间 $\psi(\mathbb{N})$ [94] 是指集合 $\mathcal{A} \cup \mathbb{N}$ 赋予以下的拓扑： $\mathbb{N}$ 中每一点都是孤立的，对 $A \in \mathcal{A}$, A 的开邻域为形如 $\{A\} \cup (A - F)$ 的集合，其中 F 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集.

引理 4.1.2 *[103]* 对空间 Y, 下述等价:

(1) 每一映满 Y 的序列覆盖映射都是双商的;

(2) Y 中每一非孤立点都具有一个开邻域是一个收敛序列.

定理 4.1.3 对空间 Y, 下列等价:

(1) Y 是离散的;

(2) 每一映满 Y 的序列商映射是双商的;

(3) 每一映满 Y 的序列商映射是开的.

证明　(1)⇒(3)⇒(2) 显然. 下面证明 (2)⇒(1).

假设 y 是 Y 的一个非孤立点. 由引理 4.1.2, 存在非平凡序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y 使得 $K=\{y\}\cup\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$ 开于 Y. 于是 $Y=K\bigoplus(Y-K)$. 令 $\psi(\mathbb{N})=\mathcal{A}\cup\mathbb{N}$ 为 Isbell-Mrówka 空间, $X=\psi(\mathbb{N})\bigoplus(Y-K)$. 定义 $f:X\to Y$ 为:

$$f(x)=\begin{cases} y, & x=A\in\mathcal{A} \\ y_n, & x=n\in\mathbb{N} \\ x, & x\in Y-K. \end{cases}$$

易见 f 是连续的. 下面证明两个断言.

断言 1. f 是序列商的.

假设 L 是 Y 中的一个收敛序列. 不妨设 L 收敛于 y 且 $L\subset K$. 记 $L=\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 由于 $\mathcal{A}$ 是极大几乎互不相交族, 存在 $A\in\mathcal{A}$ 使得 $A\cap\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是无限的. 易见 $A\cap\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是 X 中收敛于 $A\in\mathcal{A}$ 的序列并且 $f(A\cap\{n_k:k\in\mathbb{N}\})$ 是 L 的一个子序列. 因此 f 是序列商的.

断言 2. f 不是双商的.

反设 f 是双商的. 由于对任意 $A\in\mathcal{A}$, $\{A\}\cup A$ 开于 X 且

$$f^{-1}(y)\subset\cup\{\{A\}\cup A:A\in\mathcal{A}\},$$

存在有限子族 $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ 使得

$$y\in\mathrm{int}f(\cup\{\{A\}\cup A:A\in\mathcal{F}\})=\mathrm{int}(\{y\}\cup f(\cup\mathcal{F})).$$

故 $\mathbb{N}-\cup\mathcal{F}$ 是有限的. 由于 $\mathcal{A}$ 不可数, 我们可以选取 $B\in\mathcal{A}-\mathcal{F}$. 则

$$\mathbb{N}-\cup\mathcal{F}\supset B-\cup\mathcal{F}=B-\cup\{B\cap A:A\in\mathcal{F}\}$$

是无限的，矛盾．这说明 f 不是双商的．

根据断言 1 和断言 2, 我们知道 Y 没有非孤立点， Y 是离散的．

引理 4.1.4 *[102] 对空间 Y, 下述等价：*

(1) 每一映满 Y 的序列覆盖映射是弱开的；

(2) Y 是序列空间并且对每一 $y \in Y$, 存在序列 L_y 收敛于 y 使得对任意收敛于 y 的序列 L, $L - L_y$ 是有限的．

定理 4.1.5 *对空间 Y, 下述等价：*

(1) Y 是离散的；

(2) 每一映满 Y 的序列商映射是弱开的．

证明 (1)⇒(2) 显然．下面证明 (2)⇒(1).

由引理 4.1.4, Y 是序列空间．因此我们只需证明 Y 中不含非平凡收敛序列．假设 Y 含有一个非平凡序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y. 由引理 4.1.4, 我们不妨设 $K = \{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 y 的一个序列邻域．取 $\mathcal{A}$ 为 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的一个极大几乎互不相交族．对 $x \in Y - \{y\}$, 令 $\mathcal{B}_x = \{B \in \tau(Y) : B \cap K \subset \{x\}\}$. 再令 $X = \mathcal{A} \cup (Y - \{y\})$ 并且赋予 X 如下拓扑：对 $x \in Y - \{y\}$, 取 $\mathcal{B}_x$ 为 x 的邻域基；对 $A \in \mathcal{A}$, 取

$$\{\{A\} \cup \bigcup_{x \in A'} B_x : B_x \in \mathcal{B}_x, A' \subset A \text{ 且 } A - A' \text{ 是有限的}\}$$

为 A 的邻域基．定义 $f : X \to Y$ 为

$$f(x) = \begin{cases} y, & x \in \mathcal{A} \\ x, & x \in Y - \{y\}. \end{cases}$$

断言 1. f 是连续的．

显然 f 在每一点 $x \in Y - \{y\}$ 处是连续的．设 $A \in \mathcal{A}$, U 是 y 在 Y 中的开邻域．存在 n_0 使得 $\{y_n : n \geq n_0\} \subset U$. 对每一 $n \geq n_0$, 存在 $B_{y_n} \in \mathcal{B}_{y_n}$ 使得 $B_{y_n} \subset U$. 令

$$V = \{A\} \cup (\cup\{B_{y_n} : n \geq n_0,\ y_n \in A\}).$$

则 V 是 A 的一个开邻域且 $f(V) \subset U$.

断言 2. f 是序列商的.

设 L 是 Y 中的一个收敛序列. 不妨设 L 收敛于 y 且 $L \subset K$. 由于 $\mathcal{A}$ 是极大互不相交族, 存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $A \cap L$ 是无限的. 因此 $A \cap L$ 是 X 中收敛于 $A \in \mathcal{A}$ 的一个序列并且 $f(A \cap L)$ 是 L 的一个子序列. 这表明 f 是序列商的.

断言 3. f 不是弱开的.

对每一 $A \in \mathcal{A}$, 易见 $K - A$ 是无限的. 对 $x \in A$, 取 $B_x \in \mathcal{B}_x$. 则 $U = \{A\} \cup \bigcup_{x \in A} B_x$ 是 A 的一个开邻域, 然而, $f(U)$ 不是 y 的序列邻域. 因此 f 不是弱开的.

根据上面的三个断言, 我们知 Y 不含非平凡序列, 从而 Y 是离散空间.

§4.2 AP 空间

空间 X 称为是一个 *AP* 空间 [116] (*accessibility* 空间 [120]) 如果对 $A \subset X$ 以及 $x \in \overline{A} - A$, 存在几乎闭的子集 $F \subset A$ 收敛于 x, 这里几乎闭的子集 F 收敛于 x 是指 $\overline{F} - F = \{x\}$. [116] 中证明了 AP 空间的任意子空间是 AP 的以及序空间 $\omega_1 + 1$ 不是 AP 的. 在 [120] 中, G. T. Whyburn 证明了空间 X 是 AP 空间当且仅当每一映满 X 的商映射是伪开的. 下面我们给出 AP 空间的一个新刻画.

回忆空间 X 称为是关于覆盖 $\mathcal{P}$ *具有弱拓扑* [46], 如果 $U \subset X$ 开于 X 当且仅当对任意 $P \in \mathcal{P}$, $U \cap P$ 开于 P. 不难发现, k 空间或序列空间的定义事实上就是关于空间中所有紧集或所有收敛序列构成的集族具有弱拓扑的空间.

定理 4.2.1 *对正则空间 Y, 下述等价:*

(1) Y 是 AP 空间;

(2) 每一映满 Y 的商映射是伪开的;

(3) 如果 Y 关于覆盖 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑, 则 $y \in Int(st(y, \mathcal{P}))$ 对任一 $y \in Y$ 成立.

证明 (1)⇔(2) 见 [120].

(2)⇒(3). 设 Y 关于覆盖 $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 具有弱拓扑. 令 $X = \bigoplus_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ 以及 $f : X \to Y$ 为自然映射. 则 f 是商映射, 从而是伪开的. 对每一 $y \in Y$,

$\{P_\alpha : y \in P_\alpha\}$ 是 X 中开集族并且 $\{P_\alpha : y \in P_\alpha\}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 因此 $y \in \mathrm{int} f(\cup\{P_\alpha : y \in P_\alpha\}) = \mathrm{int}(\mathrm{st}(y, \mathcal{P}))$.

(3)⇒(2). 设 $f : X \to Y$ 是一个商映射. 对 $y \in Y$ 和开集 $U \subset X$, 如果 $f^{-1}(y) \subset U$, 则 $\mathcal{U} = \{U, X - f^{-1}(y)\}$ 是 X 的一个开覆盖. 从而 X 关于 $\mathcal{U}$ 具有弱拓扑. 根据 [46, 引理 1.7], Y 关于 $f(\mathcal{U}) = \{f(U), Y - \{y\}\}$ 具有弱拓扑. 于是 $y \in \mathrm{int}(\mathrm{st}(y, f(\mathcal{U}))) = \mathrm{int}(f(U))$, 这说明 f 是伪开映射.

推论 4.2.2 对正则空间 X, 如果 X^d 是离散的, 则 X 是 AP 空间.

证明 设 X 关于覆盖 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑. 由定理 4.2.1, 我们只需证明 $x \in \mathrm{int}(\mathrm{st}(x, \mathcal{P}))$ 对每一 $x \in X$ 成立. 不妨设 $x \in X^d$. 取 $F = (X - \mathrm{st}(x, \mathcal{P})) \cup (X^d - \{x\})$. 对任意 $P \in \mathcal{P}$, 如果 $x \in P$, 则 $P \cap F \subset X^d - \{x\}$ 是闭的. 如果 $x \notin P$, 则 $(P - F) \cap X^d = \emptyset$. 因此 $P - F$ 是开的, 从而 $P \cap F$ 闭于 P. 由于 X 关于覆盖 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑, F 是闭的. 因此 $\mathrm{st}(x, \mathcal{P}) - (X^d - \{x\})$ 是 x 的一个开邻域, 证明完毕.

推论 4.2.3 每一空间都是某一 AP 空间的几乎开映象.

证明 设 X 为任意空间, 对 $x \in X$, 取 $X_x = X$ 且赋予 X_x 如下拓扑: 除 x 外所有点都是孤立的, 取 $\{U : x \in U \in \tau(X)\}$ 为 x 处的开邻域基. 则 $Y = \bigoplus_{x \in X} X_x$ 是一个正则空间且 Y^d 是离散的. 根据推论 4.2.2, Y 是一个 AP 空间. 取 $f : Y \to X$ 为自然映射. 容易验证 f 是几乎开的. 证明完毕.

下面讨论 AP 空间在函数空间中的应用. 本节以下所有空间都假设为 Tychonoff 的. 对空间 X 和 X 的紧集组成的网络 α, 设 α 关于有限并封闭, 我们记 $C_\alpha(X)$ [86] 为 X 上所有实值连续函数组成的集合并赋予如下拓扑: $C_\alpha(X)$ 中的基本开集为形如 $\{f \in C_\alpha(X) : f(K_i) \subset U_i, i \leq n\}$ 的集合, 这里每一 $K_i \in \alpha$, U_i 是 $\mathbb{R}$ 的非空开子集. 当 α 为 X 中所有有限集组成的集族时, $C_\alpha(X)$ 就成为赋予点式收敛拓扑 (点开拓扑) 的函数空间 $C_p(X)$.

称空间 X 为 *Hurewicz* 空间 [86] 如果对 X 的任意开覆盖列 $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$, 存在有限子族列 $\{\mu_n\}$ 使得 $\mu_n \subset \gamma_n$ 且 $\cup\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的覆盖. X 称为是 *离散生成的* [116] 如果对任意 $x \in \overline{A} \subset X$, 存在离散集 $D \subset A$ 使得 $x \in \overline{D}$.

显然, 每一 Hurewicz 空间都是 Lindelöf 的, 每一 Fréchet 空间都是离散生成的. [116] 中证明了对仿紧空间空间 X, 如果 $C_p(X)$ 是 AP 的, 则 X 是

Hurewicz 空间；以及具有可数 tightness 的 AP 空间 $C_p(X)$ 是离散生成的．下面我们将这些推广到更一般的函数空间 $C_\alpha(X)$ 上，这里 α 是 X 的一个紧网络且关于有限并封闭.

定理 4.2.4 *如果 $C_\alpha(X)$ 是一个 AP 空间且 X 是仿紧的, 则 X 是一个 Hurewicz 空间.*

证明　断言 1. X 是一个 Lindelöf 空间.

由于 X 是仿紧的, 我们只需证明 X 中每一非空开集组成的离散集族是可数的. 假设不然, 存在不可数，离散的开集族 $\gamma = \{U_t : t < \omega_1\}$. 对每一 $t < \omega_1$, 取 $x_t \in U_t$ 以及连续映射 $f_t : X \to \mathbb{I} = [0,1]$ 使得 $f_t(x_t) = 1$ 且 $f_t(X - U_t) = \{0\}$. 对于任给函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 满足 $A = \{x_t : t < \omega_1\}$, 我们定义 $\varphi(f) : X \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(f)(x) = \sum_{t<\omega_1} f(x_t)f_t(x).$$

容易验证对每一 $f \in \mathbb{R}^A$, $\varphi(f)$ 是连续的以及 $\varphi : \mathbb{R}^A \to C_\alpha(X)$ 是开，一对一的映射．现在我们证明 φ 是连续的．对 $f \in \mathbb{R}^A$, $K \in \alpha$ 以及 $V \in \tau(\mathbb{R})$, 如果 $\varphi(f) \in [K,V] = \{h \in C_\alpha(X) : h(K) \subset V\}$, 则 $\varphi(f)(K) \subset V$. 由于 $\varphi(f)(K)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧子集，存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得

$$B(\varphi(f)(K), \varepsilon) = \bigcup_{x\in\varphi(f)(K)} B(x, \varepsilon) \subset V.$$

由 γ 的离散性,我们知 $\{t : K \cap U_t \neq \emptyset\}$ 是有限的,从而可以记其为 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. 令 $U = \bigcap_{i\leq n} p_{t_i}^{-1}(B(f(x_t), \varepsilon))$. 则 U 是 f 在 $\mathbb{R}^A$ 中的一个开邻域. 断言 $\varphi(U) \subset [K,V]$. 事实上，对任意 $x \in K$ 以及 $g \in \varphi(U)$, 如果 $x \in U_{t_i}$ 对某个 $i \leq n$ 成立，则

$$\begin{aligned} |\varphi(g)(x) - \varphi(f)(x)| &= |\textstyle\sum_{t<\omega_1} g(x_t)f_t(x) - \sum_{t<\omega_1} f(x_t)f_t(x)| \\ &= |(g(x_{t_i}) - f(x_{t_i}))f_{t_i}(x)| \\ &\leq |g(x_{t_i}) - f(x_{t_i})| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

如果 $x \in K - \cup\gamma$, 则 $\varphi(g)(x) = \varphi(f)(x) = 0$. 所以 $\varphi(g)(x) \in B(\varphi(f)(x), \varepsilon) \subset V$. 因此 φ 是连续，从而是一个嵌入.

这样，$\mathbb{R}^{\omega_1}$ 被嵌入到 $C_\alpha(X)$ 中，于是 $\mathbb{R}^{\omega_1}$ 是一个 AP 空间. 然而，我们知道 ω_1+1 可以被嵌入到 $\mathbb{R}^{\omega_1}$ 中，这与 ω_1+1 不是 AP 空间矛盾. 这就证明了 X 是 Lindelöf 空间.

断言 2. X 是一个 Hurewicz 空间.

设 $\{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X 的一个开覆盖列. 由于 X 是 Lindelöf 的，我们可以假设对每一 $n,m\in\mathbb{N}$, $\lambda_n=\{U_m^n : m\in\mathbb{N}\}$ 且 $U_m^n\subset U_{m+1}^n$. 由 [34, 定理 3.8.11], 对任意 $n,m\in\mathbb{N}$, 存在闭集 $F_m^n\subset U_m^n$ 使得 $F_m^n\subset F_{m+1}^n$ 且 $\{\mathrm{int}(F_m^n) : m\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 X.

由于 X 是正规的，存在 $f_m^n\in C_\alpha(X)$ 使得

$$f_m^n(F_m^n)=\{1/n\} \text{ 以及 } f_m^n(X-U_m^n)=\{1\} \text{ 对每一 } n,m\in\mathbb{N}.$$

容易验证对每一 $n\in\mathbb{N}$, 序列 $S_n=\{f_m^n : m\in\mathbb{N}\}$ 在 $C_\alpha(X)$ 中收敛于函数 $h_n\equiv 1/n$. 同时，序列 $\{h_n : n\in\mathbb{N}\}$ 在 $C_\alpha(X)$ 中收敛于 $h\equiv 0$. 于是，$h\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n}$. 这样我们就可以找到几乎闭集 $G\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$ 使得 $h\in\overline{G}$. 每一对 $n\in\mathbb{N}$, $G_n=G\cap S_n$ 是有限的，否则 $h_n\in\overline{G}-G$. 因此，对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $m_n\in\mathbb{N}$ 使得 $F_n\subset\{f_m^n : m\le m_n\}$. 下面证明 $\{U_{m_n}^n : n\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 X. 事实上，对每一 $K\in\alpha$, 存在 $f_m^n\in G\cap[K,[0,1)]$. 于是，根据 f_m^n 的取法，我们有 $K\cap(X-U_m^n)=\emptyset$, 从而 $K\subset U_m^n\subset U_{m_n}^n$. 断言成立.

由于无理数空间 $\mathbb{P}$ 不是 Hurewicz 的 [13], 我们有下面这个推论：

推论 4.2.5 $C_k(\mathbb{P})$ 和 $C_p(\mathbb{P})$ 都不是 *AP* 的.

定理 4.2.6 假设 $C_\alpha(X)$ 是一个具有可数 *tightness* 的 *AP* 空间，则 $C_\alpha(X)$ 是离散生成的.

证明 设 $f\in\overline{G}$. 不失一般性，我们设 $f\equiv 0$ 以及 $f\in\overline{A}-A$. 由于 $C_\alpha(X)$ 是 AP 的并且具有可数 tightness, 我们还可以假设 A 是可数的几乎闭集. 记 A 为 $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$. 存在实数列 $\{\varepsilon_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 且 $f_i+\varepsilon_i\ne f_j$, $f_i+\varepsilon_i\ne f$ 对不同的 $i,j\in\mathbb{N}$ 成立. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $g_n=f_n+\varepsilon_n$, $B=\{g_n : n\in\mathbb{N}\}$. 下证 $f\in\overline{B}$. 设 $[K,(-\varepsilon,\varepsilon)]$ 是 f 的一个基本邻域，这里 $K\in\alpha$ 且 $\varepsilon>0$. 由于 $f\in\overline{A}-A$, 集合

$$M=\{n\in\mathbb{N} : f_n\in[K,(-\varepsilon/2,\varepsilon/2)]\}$$

是无限的. 于是对任意 $x \in K$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\varepsilon_n < \varepsilon/2$, 我们有

$$|g_n(x)| = |f_n(x) + \varepsilon_n| \leq |f_n(x)| + \varepsilon_n < \varepsilon.$$

因此 $g_n \in [K, (-\varepsilon, \varepsilon)]$.

现在取几乎闭集 $P = \{g_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset B$ 使得 $f \in \overline{P} - P$. 令 $D = \{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$. 断言 $f \in \overline{D}$. 事实上，对 f 的任意基本邻域 $[K, (-\varepsilon, \varepsilon)]$, 这里 $K \in \alpha$ 以及 $\varepsilon > 0$, 由于 $f \in \overline{P} - P$, 集合 $M' = \{k \in \mathbb{N} : g_{n_k} \in [K, (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)]\}$ 是无限的. 取 $k \in M'$ 使得 $\varepsilon_{n_k} < \varepsilon/2$. 则对每一 $x \in K$

$$|f_{n_k}(x)| = |g_{n_k}(x) - \varepsilon_{n_k}| \leq |g_{n_k}(x)| + \varepsilon_{n_k} < \varepsilon.$$

从而 $f_{n_k} \in [K, (-\varepsilon, \varepsilon)]$.

为完成证明, 我们只需证明 D 是离散的. 对每一 $k \in \mathbb{N}$, $f_{n_k} \notin P \cup \{f\} = \overline{P}$. 存在 $l \in \mathbb{N}$ 以及 f_{n_k} $(\bigcap_{j \leq l}[K_j, V_j])$ 与 P 不交，这里 $K_j \in \alpha$ 且 V_j 开于 $\mathbb{R}$ 对每一 $j \leq l$ 成立. 选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(f_{n_k}(K_j), \varepsilon) \subset V_j$ 对每一 $j \leq l$ 成立. 于是 $\bigcap_{j \leq l}[K_j, B(f_{n_k}(K_j), \varepsilon)] \cap P = \emptyset$. 断言集合

$$M'' = \{i \in \mathbb{N} : f_{n_i} \in \bigcap_{j \leq l}[K_j, B(f_{n_k}(K_j), \varepsilon/2)]\}$$

是有限的. 否则的话，我们可以选择 $i \in M''$ 使得 $\varepsilon_{n_i} < \varepsilon/2$. 那么对任意 $j < l$ 和 $x \in K_j$ 我们有

$$\begin{aligned} |g_{n_i}(x) - f_{n_k}(x)| \quad &= |f_{n_i}(x) - f_{n_k}(x) + \varepsilon_{n_i}| \\ &\leq |f_{n_i}(x) - f_{n_k}(x)| + \varepsilon_{n_i} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

也即， $g_{n_i} \in \bigcap_{j \leq l}[K_j, B(f_{n_k}(K_j), \varepsilon)]$. 这和 $g_{n_i} \in P$ 矛盾. 所以 f_{n_k} 具有开邻域 $\bigcap_{j \leq l}[K_j, B(f_{n_k}(K_j), \varepsilon/2)]$ 与 D 中仅有限个元相交. 从而 D 是离散的.

问题 4.2.7 *[116, Problem 4.8]* 如果 $C_p(X)$ 是一个 *AP* 空间， $C_p(X)$ 是否一定是离散生成的？

第五章　有关拓扑群的几个结果

本章主体内容来自于作者与导师林寿教授的合作论文“关于拓扑群中广义度量性质的一个注记 ”, 主要介绍有关拓扑群的几个结果. 众所周知 [8, 29], 拓扑群或仿拓扑群具有着良好的拓扑性质，如每个仿拓扑群都是齐性的，每个第一可数的拓扑群是可度量化的. 在拓扑群中，各种广义度量性质往往能蕴涵更强有力的度量化因子. 因此，对拓扑群或仿拓扑群中的广义度量性质进行讨论是一件有趣的事情. 本章围绕 A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij 在 [16] 中，以及刘川在一次拓扑学学术会议中提出的两个问题，讨论了拓扑群中的层空间 (半层空间， k 半层空间) 和 cs 第一可数空间的一些性质，回答或部分回答这两个问题.

§5.1　关于 A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij 的问题

在 [14] 中， A. V. Arhangel'skiĭ 讨论了拓扑群关于其局部紧子群的商群，他发现在一定条件下商群的拓扑性质能反射出初始群的拓扑性质.

定理 5.1.1 *[14] 设 $\mathcal{P}$ 是一个具有闭遗传性关于和完备映射逆保持的拓扑性质，G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的子群使得商空间 G/H 具有性质 $\mathcal{P}$. 则存在单位元 e 的开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 具有性质 $\mathcal{P}$.*

作为应用， A. V. Arhangel'skiĭ 证明了下面的结论.

定理 5.1.2 *[14] 设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的子群使得商空间 G/H 是一个 k 空间. 则空间 G 是一个 k 空间.*

进一步， A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij 在 [16] 中证明了下面的结果.

定理 5.1.3 *[16] 设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的子群使得 G/H 是仿紧的 (亚紧的，次仿紧的， Dieudonné 完备的), 则空间 G 也是仿紧的 (亚紧的，次仿紧的， Dieudonné 完备的).*

自然地，我们关心上述结论对层空间能否成立．答案是否定的．事实上，我们取 G 为任意的局部紧的拓扑群以及子群 $H = G$, 则 G/H 是一个平凡的拓扑群．然而，G 未必是层空间．因此 A. V. Arhangel'skiĭ 和 V. V. Uspenskij 在 [16] 中提出下述问题：

问题 5.1.4 *[16, 问题 2.6] 设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是层空间，空间 G 是否一定是层空间？*

对此，我们将在本节的推论 5.1.8 中给予肯定的回答．我们还将类似的结果推广到半层空间，k 半层空间和 σ 空间中．

引理 5.1.5 *[14, 定理 1.2] 设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的子群，$\pi : G \to G/H$ 是自然商映射，则存在单位元 e 的一个开邻域 U 使得 $\pi(\overline{U})$ 闭于 G/H 且 π 在 $\overline{U}$ 上的限制是一个完备映射．*

引理 5.1.6 *[16, 定理 1.1] 设 $\mathcal{P}$ 是一个关于闭子空间和局部有限闭和保持的拓扑性质．则每一局部 $\mathcal{P}$ 的拓扑群是 $\mathcal{P}$ 的．*

众所周知，对于拓扑群 G, 如果 G 具有点 G_δ 性质，则 G 具有 G_δ 对角线．

定理 5.1.7 *设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是 $\mathcal{P}$ 的，这里 $\mathcal{P}$ 是一个拓扑性质．如果 $\mathcal{P}$ 满足以下条件，则空间 G 也是 $\mathcal{P}$ 的．*

(i) $\mathcal{P}$ 关于闭子空间和局部有限闭和保持；

(ii) $\mathcal{P}$ 蕴涵点 G_δ 性质；

(iii) 设 $f : X \to Y$ 是一个完备映射，如果 X 具有 G_δ 对角线且 Y 是 $\mathcal{P}$ 的，则 X 也是 $\mathcal{P}$ 的．

证明 设 $\pi : G \to G/H$ 是自然商映射．由于 G/H 是 $\mathcal{P}$ 的且 $\mathcal{P}$ 满足 (ii), $\{H\}$ 是 G/H 的一个 G_δ 子集．也即，存在 G/H 的开集列 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\{H\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 于是我们有 $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^{-1}(U_n)$. 由于 H 是 G 的一个度量子群，单位元 e 在 H 中具有可数开邻域基 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. 每一 V_n 可以表示为 $W_n \cap H$, 这里每一 W_n 开于 G. 因此 $\{e\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(W_n \cap H) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(W_n \cap \pi^{-1}(U_n))$. 从而 G 具有点 G_δ 性质，所以 G 具有 G_δ 对角线.

根据引理 5.1.5, 存在 e 的一个开邻域 U 使得 $\pi(\overline{U})$ 闭于 G/H 且 π 在 $\overline{U}$ 上的限制是一个完备映射. 因此由 (i) 和 (iii), 子空间 $\overline{U}$ 是 $\mathcal{P}$ 的. 从而 G 是局部 $\mathcal{P}$ 的. 由引理 5.1.6, G 是 $\mathcal{P}$ 的.

注意到层空间, 半层空间以及 σ 空间满足定理 5.1.7 中的条件 (见 [45, 72]), 我们有如下的推论:

推论 5.1.8 *设 G 是一个拓扑群, H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是层空间 (半层空间, σ 空间). 则空间 G 也是层空间 (半层空间, σ 空间).*

由于 k 半层空间是否满足满足定理 5.1.7 中的条件 (iii) 尚未可知 [72, 问题 3.4.17], 我们感兴趣于推论 5.1.8 的结论对 k 半层空间是否成立. 下面的推论 5.1.11 说明这是成立的.

空间 X 称为具有 *KG 序列* [67] 如果存在 X 的一个开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 满足如果 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$ 且 $p_n \in \mathrm{st}(q_n, \mathcal{U}_n)$, 则 $p = q$. 显然, 如果 X 具有 KG 序列, 则 X 具有 G_δ 对角线并且 X 的每一子空间都具有 KG 序列. 下面这个引理改进了 "每一具有点 G_δ 的拓扑群都具有 G_δ 对角线 " 这个结论.

引理 5.1.9 *设 G 是一个拓扑群. 如果 G 具有点 G_δ 性质, 则 G 具有 KG 序列.*

证明 设 $\{U_n\}$ 是单位元 e 的一个开邻域序列使得 $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{e\}$. 不失一般性, 我们假设 $\overline{U_n^{-1}U_n} \subset U_{n-1}$. 令 $\mathcal{U}_n = \{xU_n | x \in G\}$, 则每一 $\mathcal{U}_n$ 是一个 G 的一个开覆盖. 下面证明 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是 G 的一个 KG 序列.

设 $p_n \in \mathrm{st}(q_n, \mathcal{U}_n)$, $\{p_n\}$ 以及 $\{q_n\}$ 分别是收敛于 p 和 q 的序列, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in G$ 使得 $p_n, q_n \in x_nU_n$. 于是我们可以取 $u_n, v_n \in U_n$ 使得 $p_n = x_nu_n, q_n = x_nv_n$. 注意到 $p_nu_n^{-1} = x_n = q_nv_n^{-1}$, 我们有 $q_n^{-1}p_n = v_n^{-1}u_n \in U_n^{-1}U_n$. 由于序列 $\{q_n^{-1}p_n\}$ 收敛于 $q^{-1}p$, 所以 $q^{-1}p \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n^{-1}U_n} \subset \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{e\}$, 因此 $p = q$. 这说明 G 具有 KG 序列.

引理 5.1.10 *[67] 设 $f : X \to Y$ 是一个完备映射. 如果 X 具有 KG 序列且 Y 是 k 半层空间, 则 X 也是 k 半层空间.*

类似于定理 5.1.7 的证明, 根据引理 5.1.9 和引理 5.1.10, 我们有如下推论:

推论 5.1.11 设 G 是一个拓扑群， H 是 G 的一个局部紧的度量子群使得商空间 G/H 是 k 半层空间，则空间 G 也是 k 半层空间 k- 半层.

问题 5.1.12 在拓扑群中，

(1) 层空间与 k 半层空间是否等价？

(2) σ 空间和半层空间是否等价？

§5.2 cs 第一可数的仿拓扑群

在 2008' 漳州拓扑学学术会议上，刘川提出下面两个问题.

问题 5.2.1 对于弱拟第一可数的拓扑群 G, 如果 G 不含 S_ω 的闭拷贝，则 G 是否一定是可度量化的？

问题 5.2.2 对弱拟第一可数的仿拓扑群 G, 如果 G 不含 S_ω 的闭拷贝，则 G 是否一定是第一可数的的？

注意到如果问题 5.2.2 的回答是肯定的，则问题 5.2.1 的回答也是肯定的. 我们将证明对于序列的， cs 第一可数的正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝，这回答 (部分回答) 了上述问题.

定义 5.2.3 设 $\mathcal{P}$ 空间 X 的一个子集族， $x \in \cap\mathcal{P}$.

(1) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 sn 网 *[42]* 如果 $\mathcal{P}$ 中每一个元都是 x 的一个序列邻域且对 x 的任意邻域 U 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $P \subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 cs 网 *[47]* 如果对任意收敛于 x 的序列 L 以及 x 的开邻域 U, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $P \subset U$ 且 L 终于 P;

(3) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 cs^* 网 *[39]* 如果对任意收敛于 x 的序列 L 以及 x 的开邻域 U, 存在子序列 $L' \subset L$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $L' \subset P \subset U$.

X 称为是 sn 第一可数的 *(*cs 第一可数的，cs^*f 可数的*)* 如果对任意 $x \in X$, 存在可数的 x 点处的 sn 网 (cs 网， cs^* 网).

注 5.2.4 显然， sn 第一可数 $\Rightarrow$ cs 第一可数 $\Rightarrow$ cs^* 第一可数；由引理 *2.1.2,* 弱拟第一可数 $\Rightarrow$ cs^* 第一可数， *[101]* 中证明了 cs 第一可数 $\Leftrightarrow$ cs^* 第一可数. 因而，弱拟第一可数 $\Rightarrow$ cs 第一可数.

空间 X 称为是一个 *仿拓扑群* 如果它同时是一个群并且群上的乘积运算是连续的.

偏序集 $(T,\leq)$ 称为是一个 *树* 如果对任意 $t\in T$, 集合 $\downarrow t=\{\tau\in T:\tau\leq t\}$ 关于 $\leq$ 是良序集. 给定元素 $t\in T$, 记 $\uparrow t=\{\tau\in T:\tau\geq t\}$ 以及 $\mathrm{succ}(t)=\min(\uparrow t-\{t\})$ 为 t 在 T 中所有后续元组成的集合. T 的一个极大线性序子集称为是 T 的一个 *分支*. 记 $\max T$ ($\min T$) 为 T 中所有极大元 (极小元) 组成的集合. 拓扑空间 X 中的一个 *序列树* 是指树 $(T,\leq)$ 满足 (i) $T\subset X$, (ii) T 没有无限分支且 (iii) 任给 $t\notin\max T$, 集合 $\mathrm{succ}(t)$ 是可数的并且收敛于 t.

引理 5.2.5 *[17] 对序列空间 X, 点 $a\in X$ 属于子集 $A\subset X$ 的闭包当且仅当存在一个序列树 $T\subset X$ 使得 $minT=\{a\}$ 且 $maxT\subset A$.*

引理 5.2.6 *对仿拓扑群 G 及其序列子空间 $F\subset G$, 如果 $F^{-1}F$ 是 sn 第一可数的, 则 F 是第一可数的.*

证明 不失一般性, 我们可以假设单位元 $e\in F$. 设 $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 $F^{-1}F$ 中点 e 处单调下降的 sn 网. 首先我们证明对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $m>n$ 使得 $A_m^2\cap F^{-1}F\subset A_n$. 假设不然, 对每一 $m>n$ 存在 $x_m,y_m\in A_m$ 使得 $x_my_m\in F^{-1}F-A_n$. 考虑到序列 $\{x_m\},\{y_m\}$ 收敛于 e, 我们知 $\{x_my_m\}$ 收敛于 e. 这与 A_n 是 e 在 $F^{-1}F$ 中的一个序列邻域矛盾.

下证对每一 $n\in\omega$, 集合 $A_n\cap F$ 是 e 在 F 中的序列邻域. 假设不然, $e\in\mathrm{cl}_F(F-A_{n_0})$ 对某个 $n_0\in\mathbb{N}$ 成立. 根据引理 5.2.5, 存在一个序列树 $T\subset F$ 使得 $\min T=\{e\}$ 且 $\max T\subset F-A_{n_0}$. 下面我们构造 T 的无限分支, 从而得到矛盾.

取 $x_0=e$ 以及 $m_0=\min\{m\in\mathbb{N}:A_m^2\cap F^{-1}F\subset A_{n_0}\}$. 假设我们已经构造了 $\{A_{m_i}:i\leq j\}$ 和 $\{x_i:i\leq j\}\subset T$ 使得对每一 $i\leq j$, $A_{m_i}^2\cap F^{-1}F\subset A_{m_{i-1}}$ 且 $x_i\in\mathrm{succ}(x_{i-1})\cap(x_{i-1}A_{m_i})$. 则 $x_j\in F\cap(A_{m_0}A_{m_1}\cdots A_{m_j})\subset F\cap A_{m_0}^2\subset A_{n_0}$, 从而有 $x_j\notin\max(T)$. 这样我们得到一个收敛于 x_j 的序列 $\mathrm{succ}(x_j)$. 于是 $x_j^{-1}\mathrm{succ}(x_j)$ 收敛于 e 且 $x_j^{-1}\mathrm{succ}(x_j)\subset F^{-1}F$. 取 $m_{j+1}\in\mathbb{N}$ 使得 $A_{m_{j+1}}^2\cap F^{-1}F\subset A_{m_j}$. 由于 $A_{m_{j+1}}$ 是一个 e 在 $F^{-1}F$ 中的一个序列邻域, 我们可以取 $x_{j+1}\in\mathrm{succ}(x_j)\cap(x_jA_{m_{j+1}})$. 这样构造完成. T 具有一个无限分支 $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}$. 矛盾. 因此 $e\in\mathrm{int}_F(A_n\cap F)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立. F 是第一可数的.

引理 5.2.7 对 cs 第一可数的正则仿拓扑群 G 及其序列子空间 $F \subset G$, 如果 F 不含 S_ω 的闭拷贝，则 F 是 sn 第一可数的.

证明 不妨设 $e \in F$. 设 $\mathcal{A}$ 是 G 在点 e 处的 cs 网. 不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{A}$ 关于 G 的积运算，有限并和有限交封闭. 断言集族 $\mathcal{A}|_F = \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ 是 e 在 F 中的一个 sn 网.

假设不然, 我们可以找到 e 的一个开邻域 $U \subset G$ 使得对任意满足 $A \cap F \subset U$ 的 $A \in \mathcal{A}$, 集合 $A \cap F$ 不是 e 在 F 中的序列邻域. 令

$$\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : A \cap F \subset U\} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B_n = \bigcup_{k \le n} A_k.$$

由于 $B_0 \cap F$ 不是 e 在 F 中的序列邻域，存在 F 中序列 $L_0 = \{x_{0i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 收敛于 e 使得 $L_0 \cap B_0 = \emptyset$. 取 e 的闭邻域 $U_0 \subset G$ 使得 $U_0^2 \subset U$. 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得 L_0 终于 $A_{m_0} \cap F \subset U_0$. 不失一般性，我们假设 $L_0 \subset A_{m_0} \cap F$. 由归纳法，我们可以构造出序列 L_k, 自然数 m_k 以及 e 的闭邻域 U_k 使得对任意 $k \in \mathbb{N}$,

(i) $L_k = \{x_{ki}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 收敛于 e 且 $L_k \subset U_k \cap F - B_{m_{k-1}}$;

(ii) $L_k \subset A_{m_k} \subset B_{m_k}$;

(iii) $U_k \cap \{x_{ji} : j, i < k\} = \emptyset$ 且 $U_k^2 \subset U_{k-1}$.

令 $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$, $Y = \mathrm{cl}_F(X) - X$. 则 X 是 G 的一个离散子空间，从而 Y 闭于 F. 考虑以下两种情形.

情形 1. e 是 Y 的一个孤立点.

我们可以找到 e 在 G 中的闭邻域 $W \subset U$ 使得 $W \cap Y = \{e\}$. 对 $k \in \mathbb{N}$, 令 $S_k = L_k \cap W$, $X' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$. 则 $X' = X \cap W = (X \cup Y) \cap W = \mathrm{cl}_F(X) \cap W$ 闭于 F. 我们证明 X' 是 F 中一个 S_ω 的拷贝. 由于 F 是序列空间，存在 F 中收敛序列 $S \subset X'$ 使得 S 至多与有限个 S_k 相交. 注意到 S 必需收敛于 e, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 S 终于 $A_{m_{k_0}}$, 这和 (i) 矛盾. 因此 F 含有一个 S_ω 的闭拷贝.

情形 2. 存在 Y 非平凡序列收敛于 e.

根据 5.2.5, 存在序列树 $T \subset \mathrm{cl}_F(X)$ 使得 $\min T = \{e\}$, $\max T \subset X$ 且 $\mathrm{succ}(e) \subset Y$. 令 $t_0 = e$, 存在 $C_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $C_0 \subset U_0$ 且 $\mathrm{succ}(e)$ 终于 C_0. 取 $t_1 \in \mathrm{succ}(t_0) \cap C_0$. 由归纳法，我们可以构造一个有限分支 $\{t_i : i \le n+1\}$ 以及 $\{C_i : i \le n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{succ}(t_i)$ 终于 $t_i C_i$, $C_i \subset U_i$ and $t_{i+1} \in \mathrm{succ}(t_i) \cap t_i C_i$ 对

任意 $i \le n$ 成立. 注意 $M = \mathrm{succ}(t_n) \cap t_n C_n$ 收敛于 $t_n \ne e$. 然而, $M \subset t_n C_n \subset t_{n-1} C_{n-1} C_n \subset \cdots \subset t_0 C_0 C_1 \cdots C_n \subset U_0 U_1 \cdots U_n \subset U$. 由我们对 $\mathcal{A}$ 的假设, $C_0 C_1 \cdots C_n \subset \mathcal{A}$, 从而 $C_0 C_1 \cdots C_n \cap F \subset B_{m_{k_0}}$ 对某个 $k_0 \in \mathbb{N}$ 成立. 由于 e 是 $\{x_{ji} : j \le k_0, i \in \mathbb{N}\}$ 中唯一的聚点, M 不可能收敛于 $t_n \ne e$, 这是一个矛盾.

因此 F 是 sn 第一可数的.

根据引理 5.2.6, 引理 5.2.7 和注 5.2.4, 我们有下面的结论:

定理 5.2.8 对序列的, cs 第一可数的, 正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

推论 5.2.9 对弱拟第一可数的正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

注意到每一个 T_2 的拓扑群都是正则的以及每一个第一可数的拓扑群都是可度量化的 [29], 我们有

推论 5.2.10 对弱拟第一可数的拓扑群 G, G 可度量化当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

参考文献

[1] P. S. Aleksandroff, On the metrization of topological spaces (in Russian), *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, **8** (1960), 135–140.

[2] P. S. Aleksandroff, On some results concerning topological spaces and their continuous mappings. *Proc. 1st Topological Symp.*, Prague, 1961. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I. New York: Academic Press, 1962, 41–54.

[3] P. S. Aleksandroff and P. Urysohn, mémoire sur les espaces topologiques, *Verh. Koninkl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk., Sectie 1*, **14** (1929), 1–96.

[4] R. Arens, Note on convergence in topology, *Math. Mag.*, **23** (1950), 229–234.

[5] A. V. Arhangel'skiĭ, An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **126** (1959), 239–241.

[6] A. V. Arhangel'skiĭ, On the metrization of topological spaces (in Russian), *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, **8** (1960), 589–595.

[7] A. V. Arhangel'skiĭ, On open and almost open mappings of topological spaces (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **147** (1962), 999–1002.

[8] A. V. Arhangel'skiĭ, Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **153** (1963), 743–746.

[9] A. V. Arhangel'skiĭ, Mappings and spaces, *Russian Math. Surveys*, **21** (1966), 115–162.

[10] A. V. Arhangel'skiĭ, The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces(in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **206** (1972), 265–268.

[11] A. V. Arhangel'skiĭ, Cardinal invariants of topological groups, embeddings and condensations, *Soviet Math. Dokl.*, **20** (1979), 783–787.

[12] A. V. Arhangel'skiĭ, Relations among the invariants of topological groups and their subspaces, *Russian Math. Surveys*, **35**(3) (1980), 1–23.

[13] A. V. Arhangel'skiĭ, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1992.

[14] A. V. Arhangel'skiĭ, Quotients with respect to locally compact subgroups, *Houston J. Math.*, **31** (2005), 215–226.

[15] A. V. Arhangel'skiĭ and S. P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces, *Michigan Math. J.*, **15** (1968), 313–320.

[16] A. V. Arhangel'skiĭ and V. V. Uspenskij, Topological groups: local versus global, *Applied General Topology*, **7** (2006), 67–72.

[17] T. Banakh and L. Zdomskyi, The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs^*-character, *Applied General Topology*, **5** (2004), 25–48.

[18] A. Bella and I. V. Yaschenko, On AP and WAP-spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **40** (1999), 531–536.

[19] R. H. Bing, Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 175–186.

[20] J. R. Boone and F. Siwiec, Sequentially quotient mappings, *Czech. Math. J.*, **26** (1976), 174–182.

[21] C. R. Borges, On stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 1–16.

[22] J. R. Boone, Some characterizations of paracompactness in k-spaces, *Fund. Math.*, **72** (1971), 145–153.

[23] G. Birkhoff, A note on topological groups, *Compositio Math.*, **3** (1936), 427–430.

[24] D. K. Burke, *Covering properties*, Handbook of Set-theoretic Topology, (K. Kunen, J. E. Vaughan, Eds), North-Holland Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 347–422.

[25] D. K. Burke, R. Engelking and D. J. Lutzer, Hereditarily closure-preserving collections and metrization, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **51** (1975) 483–488.

[26] D. K. Burke and D. J. Lutzer, Recent advances in the theory of generalized metric spaces, *Topology: Proc. 9th Ann. Spring Topological Conf.*, Memphis State Univ., 1975. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 24. New York: Marcel Dekker Inc., 1976, 1–70.

[27] J. G. Ceder, Some generalizations of metric spaces, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 105–125.

[28] D. Cohen, Spaces with weak topology, *Quart. J. Math. Oxford*, **5** (1954), 77–80.

[29] W. W. Comfort, *Topological groups*, Handbook of Set-theoretic Topology, (K. Kunen, J. E. Vaughan, Eds), North-Holland Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 1145–1263.

[30] W. W. Comfort and G. L. Douglass, Cardinal invariants, pseudocompactness and minimality: some recent advances in the topological theory of topological groups, *Topology Proc.*, **6** (1981), 227–265.

[31] W. W. Comfort and K. A. Ross, Topologies induced by froups of characters, *Fund. Math.*, **55** (1964), 283–291.

[32] W. W. Comfort and K. A. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 483–496.

[33] G. D. Creede, Concerning semi-stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, **32** (1970), 47–54.

[34] R. Engelking, *General Topology*, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1977.

[35] S. P. Franklin, Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, **57** (1965), 107–115.

[36] L. Foged, Characterizations of $\aleph$-spaces, *Pacific J. Math.*, **110** (1984), 59–63.

[37] D. Gale, Compact sets of functions and function rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 303-308.

[38] 高国士, *拓扑空间论 (第 2 版)*, 北京：科学出版社, 2008.

[39] Z. Gao, $\aleph$-space is invariant under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, **5** (1987), 271–279.

[40] Z. Gao, Some remarks on the spaces with a σ-closure-preserving weak-base, *Math. Japonica*, **37** (1992), 323–328.

[41] Y. Ge, On spaces with a σ-locally-finite universal cs-network, *Questions Answers in General Topology*, **18** (2000), 93–96.

[42] 葛英, 关于 sn 度量空间, *数学学报*, **45** (2002), 355–360.

[43] Y. Ge and S. Lin, g-Metrizable spaces and the images of semi-metric spaces, *Czech. Math. J.*, **57** (2007), 1141–1149.

[44] S. Grosser and M. Moskowitz, on certain topological groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 317–340.

[45] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, Handbook of Set-theoretic Topology, (K. Kunen, J. E. Vaughan, Eds.), North-Holland Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 423–501.

[46] G. Gruenhage, E. A. Michael and Y. Tanaka, Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, **113** (1984), 303–332.

[47] J. A. Guthrie, A characterization of $\aleph_0$-spaces, *General Topology Appl.*, **1** (1971), 105–110.

[48] M. Jr. Hall, A topology for free groups and related groups, *Annals of Math.*, **52** (1950), 127–139.

[49] E. Hewitt, A remark on characters of locally compact Abelian groups, *Fund. Math.*, **53** (1963), 55–64.

[50] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. 1*, Grundlehren der Math., Vol. 115, Berlin: Springer-Verlag, 1963.

[51] R. E. Hodel, *A history of generalized metrizable spaces*, Handbook of the History of General Topology, 2, (C. E. Aull, R. Lowen eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, 541–576.

[52] M. Ismail, Cardinal functions of homogeneous spaces and topological groups, *Math. Japonica*, **26** (1981), 635–646.

[53] J. Jiang, Metrizability of topological space with a cs-regular base, *Questions Answers in General Topology*, **5** (1987), 243–248.

[54] F. B. Jones, R. L. Moore's axiom 1' and metrization, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 487–487.

[55] S. Kakutani, Über die Metrisation der topologischen Gruppen, *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, **12** (1936), 82–84.

[56] S. Kakutani, On cardinal numbers related with a compact Abelian group, *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, **19** (1943), 366–372.

[57] S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct product topological groups, *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, **20** (1944), 595–598.

[58] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[59] 儿玉之宏，永见启应著，方嘉琳译， *拓扑空间论*, 北京：科学出版社， 1984.

[60] N. Lašnev, Closed images of metric spaces (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **170** (1966), 505–507.

[61] K. Li, Cs*-regular covers and metrization, to appear.

[62] S. Lin, A study of pseudobases, *Questions Answers in General Topology*, **6** (1988), 81–97.

[63] S. Lin, On the quotient compact images of metric spaces, *数学进展*, **21** (1992), 93–96.

[64] 林寿， σ 映射和 Alexandorff 问题, *福建省科协首届青年学术年会论文集*, 福州：福建科学技术出版社， 1992, 5–8.

[65] 林寿，关于序列覆盖 s 映射， *数学进展*, **25** (1996), 548–551.

[66] S. Lin, A note on the Arens' spaces and sequential fan, *Topology Appl.*, **81** (1997), 185–196.

[67] S. Lin. Mapping theorems on k-semistratifiable spaces. *Tsukuba J. Math*, **21** (1997), 809–815.

[68] 林寿， *点可数覆盖与序列覆盖映射*, 北京：科学出版社， 2002.

[69] S. Lin, Regular covers and metrization, *Bull. Pol. Acad. Math.*, **50** (2002), 427–432.

[70] 林寿， 弱基和覆盖性质, *数学进展*, **32** (2003), 118–120.

[71] 林寿， *度量空间和函数空间的拓扑*, 北京：科学出版社， 2004.

[72] 林寿， *广义度量空间与映射 (第 2 版)*, 北京：科学出版社， 2007.

[73] S. Lin and Y. Tanaka, Point-countable k-networks, closed maps, and related results, *Topology Appl.*, **59** (1994), 79–86.

[74] S. Lin and L. Yan, A note on spaces with a σ-compact-finite weak base, *Tsukuba J. Math.*, **28** (2004), 85–91.

[75] C. Liu, Spaces with a σ-compact finite k-network, *Questions Answers in General Topology*, **10** (1992), 81–87.

[76] C. Liu, On weakly bisequential spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **41** (2000), 303–332.

[77] C. Liu, On weak bases, *Topology Appl.*, **150** (2005), 91–99.

[78] C. Liu, A note on paratopological groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **47** (2006), 633–640.

[79] C. Liu, Notes on closed mappings, *Houston J. Math.*, **33**(1) (2007), 249–259.

[80] C. Liu and S. Lin, On countable-to-one maps, *Topology Appl.*, **154** (2007), 449–454.

[81] C. Liu and S. Lin, $\aleph_0$-weak bases, to appear.

[82] C. Liu and Y. Tanaka, Spaces having σ-compact-finite k-networks, and related matters, *Topology Proc.*, **26** (2001-2002), 307–310.

[83] C. Liu and Y. Tanaka, Spaces and mappings: special networks, *Open Problems in Topology II*, (E. Pearl, Eds), North-Holland Elsevier Science Publishers B. V., 2007, 23–34.

[84] D. J. Lutzer, Semimetrizable and stratifiable spaces, *General Topology Appl.*, **1** (1971), 43-48.

[85] H. W. Martin, Weak bases and metrization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **222** (1976), 337–344.

[86] R. A. McCoy and I. Ntantu, *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Math., No. 1315, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[87] P. O'Meara, On paracompactness in function spaces with the compact open topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29** (1971), 183-189.

[88] E. A. Michael, Another note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 822–828.

[89] E. A. Michael, $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, **15** (1966),983–1002.

[90] E. A. Michael, Bi-quotient maps and cartesian products of quotient maps, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **18** (1968), 287–302.

[91] E. A. Michael, A quintuple quotient quest, *General Topology Appl.*, **2** (1972), 91–1382.

[92] J. van Mill and G. M. Reed, *Open Problems in Topology*, Elsevier Science Publishers B V, Amsterdam, 1990.

[93] D. Montgomery and L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Tract 1, New York: Interscience Publishers, 1955.

[94] S. G. Mrówka, On completely regular spaces, *Fund. Math.* **72** (1965), 998–1001.

[95] J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability, *J. Inst. Polyt. Osaka City Univ.*, **1** (1950) 93–100.

[96] J. Nagata, Metrizability, generalized metric spaces and g-functions, *Comment Math. Univ. Carolinae*, **29** (1988), 715–722.

[97] F. Obersnel, Some notes on weakly Whyburn spaces, *Topology Appl.* **128** (2003), 257–262.

[98] A. Okuyama, Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. *Sci. Rep. Tokyo Kyioku Daigaku*, **A9** (1968), 236–254.

[99] J. Pelant, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk and G. R. Wilson, Pseudocompact Whyburn spaces need not be Fréchet, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2002), 3257–3265.

[100] A. Pultr and A. Tozzi, Equuationally closed subframes and representations of quotient spaces, *Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques*, **34** (1993), 167–183.

[101] M. Sakai, Function spaces with a countable cs*-network at a point , *Topology Appl.*, (2008), doi 10.1016/j.topol.2007.10.012

[102] M. Sakai, Weak-open maps and sequence-covering maps, *Sci. Math. Jap.*, **66** (2007), 67–71.

[103] M. Sakai, Mizokami and Lin's conjecture on σ-CF* pseudo-bases, to appear.

[104] B. E. Šapirovskiĭ, On imbedding extremally disconnected spaces in compact Hausdorff spaces. b-points and weight of ointwise normal spaces (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **223** (1975), 1083–1086.

[105] R. Sirois-Dumais, Quasi- and weakly quasi-first countable spaces, *Topology Appl.*, **11** (1980), 223–230.

[106] Yu. Smirnov, On metrization of topological spaces (in Russian). *Uspechi. Mat. Nauk.*, **6**(6) (1951), 100–111.

[107] S. A. Svetlichny, Intersection of topologies and metrizability in topological groups (in Russian), *Vestnik Moskov Univ. Mate.*, **44** (1989), 79–81.

[108] F. Siwiec, Sequence-covering and countably bi-quotient maps, *General Topology Appl.*, **1**(1971), 143–154.

[109] F. Siwiec, On defining a space by a weak base, *Pacific J. Math.*, **52** (1974), 233–245.

[110] F. Siwiec and J. Nagata, A note on nets and metrization, *Proc. Japan. Acad.*, **44** (1968), 623–727.

[111] Y. Tanaka, On quasi-k-spaces, *Proc. Japan. Acad.*, **46** (1970), 1074–1079.

[112] Y. Tanaka, Metrizability of certain quotient spaces, *Fund. Math.*, **119** (1983), 157–168.

[113] Y. Tanaka and C. Liu, Fiber properties of closed maps, and weak topology, *Topology Proc.*, **24** (1999), 323–344.

[114] Y. Tanaka and Z. Li, Certain covering-maps and k-networks, and related matters, *Topology Proc.*, **27** (2003), 317–334.

[115] Y. Tanaka and Y. Ge, Around quotient compact images of metric spaces, and symmetric spaces, *Houston J. Math*, **32**(1) (2006), 99–117.

[116] V. V. Tkachuk and I. V. Yaschenko, Almost closed sets and topologies they determine, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **42** (2001), 393–403.

[117] P. Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusarnmenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, **94** (1925), 262–295.

[118] N. V. Veličko, Symmetrizable spaces (in Russian), *Mat. Zametki*, **12** (1972), 577–582.

[119] 王培，$\aleph_0$ 弱基及相关结果的推广 [硕士学位论文], 南宁：广西大学， 2007.

[120] G. T. Whyburn, Accessibility spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 181–185.

[121] T. W. Wilcox, On the structure of maximally almost periodic groups, *Math. Scandinavica*, **23** (1968), 221–232.

[122] 夏省祥, 一类 g- 第一可数空间的刻画, 数学进展, **29** (2000), 61–64.

[123] P. Yan and S. Lin, cs-regular networks and metrization theorems, *Topology Proc.*, **30** (2006), 627–634.

[124] Z. Yun, A new characterization of $\aleph$-spaces, *Topology Proc.*, **16** (1991), 253–256.

[125] Z. Yun, On closed mappings, *Houston J. Math.*, **31** (2005), 193–197.

作者攻读博士学位期间的工作目录

1 . Rongxin Shen, A note on generalized connectedness, Acta Math. Hungar.(SCI), **122** (2009), 231–235.

2 . Rongxin Shen, Remarks on product of generalized topology, Acta Math. Hungar.(SCI), accepted.

3 . Rongxin Shen, Some new characterizations of metrizable spaces, Studia Sci. Math. Hungar.(SCI), accepted.

4 . Rongxin Shen, On $\aleph_0$-weak bases, Houston J. Math.(SCI), accepted.

5 . Rongxin Shen and Shou Lin, On discrete spaces and AP-spaces, Houston J. Math.(SCI), accepted.

6 . 沈荣鑫，林寿，关于拓扑群中广义度量性质的一个注记，数学年刊 (A 辑), 已录用.

7 . Rongxin Shen, Shou Lin and Jianyong Hong, Local properties of topological spaces, submitted.

8 . 沈荣鑫，拟第一可数和弱拟第一可数空间，已完成.

9 . Rongxin Shen, On spaces with σ-point-discrete $\aleph_0$-weak bases, finished.

10 . Shou Lin and Rongxin Shen, A note on $\Sigma^{\#}-$spaces, Topology Proc.(ISTP), **32** (2008), 253–257.

11 . Fucai Lin and Rongxin Shen, A note on supercomplete spaces, Acta Math. Hungar.(SCI), 2008, DOI:10.1007/s10474-008-8093-7.

12 . Fucai Lin and Rongxin Shen, Some notes on σ-point-discrete sn-networks, 数学进展， accepted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师 ______________

作者 ______________

二零零九年三月二十五日

致　谢

本文是在导师林寿教授的悉心指导下完成的．三年来林老师在学习和生活等方面都给予了我很大的鼓励和支持，作者在此表示真挚的感谢．

感谢四川大学数学学院刘应明院士，罗懋康教授，张树果教授，张德学教授对我的关心和指导！

感谢刘川教授对我论文选题的指导和帮助！

感谢漳州师范学院数学系李进金教授，李克典教授对我在漳州师范学院学习研究期间给予的帮助和指导！

感谢与林福财同学有益的探讨！

感谢我的硕士生导师葛英教授多年来对我的指导，关心和呵护！

感谢泰州师专的领导和同事们对我在外求学期间的支持．特别地，感谢邓友祥教授长期以来对我科研工作的支持和督促！

感谢我的家人特别是我的爱人高凌霄对我的支持！