目　　录

摘 要

本文引进 k 连通空间并给出其刻画；讨论了作为空间的子空间是 k 连通的性质及 k 连通的乘积性；证明了 T_2 空间 X 是连通仿紧局部紧空间的商紧映象当且仅当 X 是具有点有限 k 系的 k 连通空间. 另还讨论了包含仿紧连通空间的一些广义度量空间类的映射性质，证明了 T_1 的连通第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映象，部分回答了 V. V. Tkachuk 关于连通空间逆象的一个问题；证明了 T_1 的连通的具有点 G_δ 性质的空间是连通 M_1 空间的几乎开映象，其中建立了 M_1 空间的一个映射定理，回答了 1976 年 P. J. Nyikos 提出的一个问题；证明了 T_1 的连通的局部 $\aleph$ 空间是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 M_1 空间的几乎开映象.

关键词: 连通空间；仿紧空间； Lašnev 空间； M_1 空间；几乎开映射；商映射

Abstract

In this paper k-connected spaces are introduced and characterized. Some properties of k-connected subspaces are presented, and the multiplicative of k-connectedness are discussed. It is shown that a T_2 space is a quotient compact image of a connected paracompact locally compact space if and only if it is a k-connected space with a point-finite k-system. The mapping properties about generalized metric spaces which are connected paracompact are discussed in this paper. It is shown that a T_1 connected space with first countability is an almost-open image of a Lašnev connected space, which gives partial answers to a V. V. Tkachuk's question on the preimages of connected spaces. It is also shown that a T_1 connected space with point-G_δ property is an almost-open image of a connected M_1-space, where a mapping theorem on M_1-spaces is established and then answers the question posed by P. J. Nyikos in 1976. It is shown that a T_1 connected local $\aleph$-space is an almost-open image of an M_1-space with a σ-hereditarity closure-preserving k-network.

Key Words: connected spaces; paracompact spaces; Lašnev spaces; M_1-spaces; almost-open mappings; quotient mappings

第 1 章 引言

连通性是 1893 年 Jordan 在讨论欧氏平面的紧子集时引入的. 之后, Lennes[1] 和 Hausdorff[2] 把它推广到一般的拓扑空间. 早在二十世纪纪初, Hausdorff 等拓扑学家已经对连通性进行系统的研究 [2,3], 在现代的一般点集拓扑学书中都给出了连通性的定义及其基本性质. 近几年来, 连通性仍是拓扑学家们感兴趣的问题之一. 1997 年 J. Ferrer[4] 讨论了一类连通 Baire 空间的性质, 证明了 T_2 的线性连通的 Baire 空间不能被一由真闭子集组成的 attracting 序列所覆盖; 1998 年 G. Gruenhage, J. Kulesza 和 A. Le Donne[5] 讨论了度量空间的连通化问题, 证明了每一无处局部紧度量空间可以稠密嵌入到连通度量空间; 1999 年 A. Fedeli 和 A. Le Donne[6,7] 研究了怎样的空间存在道路连通化以及怎样的空间存在局部连通的连通化, 证明了 T_2 的第一可数的可数空间可道路连通化当且仅当它没有孤立点, Sorgenfrey 直线存在局部连通 ω 连通化; 2002 年 J. Sun 和 F. Song[8] 给出了连通分支性质的应用; 2004 年 W. G. Fleissner 等人 [9] 研究了较粗的连通拓扑. 连通性的重要性不言而喻, 它在分析, 几何与拓扑学中, 甚至在与拓扑空间概念有关的几乎任何一门学科中都是十分重要的.

1998 年 V. V. Tkachuk[10] 讨论了怎样的连通空间具有好的连通逆映象的问题. 尽管具有可数网的空间可刻画为可分度量空间的连续象, 但是具有可数网的连通空间未必可表为可分的连通度量空间的连续象 [10]. 早在 1965 年, S. P. Franklin[11] 就证明了, 序列空间可刻画为度量空间的商映象, Fréchet 空间可刻画为度量空间的伪开映象. Tkachuk[10] 提出问题: 是否连通的序列空间 (或 Fréchet 空间) 可刻画为连通的度量空间的商映象 (或伪开映象)? 2002 年 A. Fedeli 和 A. Le Donne[12] 利用序列开集的概念引进了序列连通空间, 通过构造精巧的连通度量, 把连通度量空间的连续象精确为序列连通空间, 并试图回答 Tkachuk 的问题; 2005 年林寿 [13] 发现 Fedeli 和 Le Donne 定义的连通空间上的非负函数并不满足度量公理, 利用度量化定理进一步证明了序列连通性可特征为连通度量空间的序列覆盖的连续象, 直接导出连通的序列空间 (或 Fréchet 空间) 可刻画为连通度量空间的商映象 (或伪开映象), 肯定地回答了 Tkachuk[10] 提出的问题; 2005 年黄琴 [14,15] 给出了序列连通空间的刻画及其性质, 并证明了序列连通性是可数可积的.

文 [14] 讨论了序列连通空间，先给出序列闭包、序列隔离子集的合理定义，从而给出序列连通空间的刻画；并讨论作为拓扑空间的子空间是序列连通的性质及序列连通分支．其主要结果有：

定理 1.1 对于空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是序列连通的.

(2) X 中不存在两个非空序列隔离子集 A 和 B, 使得 $A\cup B=X$.

(3) X 中不存在两个非空序列开集 A 和 B, 使得 $A\cap B=\emptyset$ 和 $A\cup B=X$.

(4) X 中不存在一个既是序列开集又是序列闭集的非空真子集.

定理 1.2 设 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的一族序列连通子集的可链族，则 $\cup_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha$ 是 X 的序列连通子集.

定理 1.3 空间 X 是序列连通的当且仅当 X 是连通的且 X 的既序列开又序列闭的子集是 X 的开集 (或闭集).

定理 1.4[15] 序列连通性是可数可积的.

文 [13] 的主要结果有：

定理 1.5 序列连续映射保持序列连通性.

定理 1.6 设 $f:X\to Y$ 是序列覆盖映射．若 Y 是序列连通空间且每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的序列连通子空间，则 X 也是序列连通空间.

定理 1.7 对于 T_2 空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是连通度量空间的连续的序列覆盖映象；

(2) X 是连通度量空间的序列连续映象；

(3) X 是序列连通空间.

推论 1.8 T_2 空间 X 是连通度量空间的商映象 (或伪开映象) 当且仅当 X 是连通的序列空间 (或 Fréchet 空间).

在映射理论中， k 映射是介于完备映射与紧覆盖映射之间的一类重要映射．关于度量空间的 k 映射的映象， 1994 年，刘川 [16] 通过 k 闭集给出了度量空间 k 映象的一个内在刻画： T_2 空间 X 为度量空间 k 映象当且仅当 X 存在紧有限 k 闭覆盖列 $\{\mathcal{G}_i:i\in\mathbb{N}\}$, 满足对 $x\in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{G}_i):i\in\mathbb{N}\}$ 为 x 在 X 中的网； 2000 年，李进金，李招文 [17] 在此基础上又获得了度量空间 k 映象的两个特征： T_2 空间 X 是度量空间的 k 映象当且仅当 X 存在紧有限 k 闭覆盖列 $\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 使得对 X

中的任意紧子集 L, $\{\mathrm{st}(L,\mathcal{P}_n):n\in\mathbb{N}\}$ 构成 L 的 k 网当且仅当 X 存在紧有限 k 闭覆盖列 $\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 使得对 X 中的任意紧子集 L, $\{\mathrm{st}(L,\mathcal{P}_n):n\in\mathbb{N}\}$ 构成 L 的伪基. 2004 年，葛英 [18] 证明了正则 T_1 空间 X 是度量空间当且仅当 X 具有紧有限 k 闭覆盖列的点星弱邻域网.

由此可见， k 闭集在反映拓扑性质或联系度量空间映射理论中具有积极的作用.

另一方面, 空间 X 是 k 空间当且仅当 X 是仿紧局部紧空间的商映象. 林寿 [19] 提出问题：连通的 k 空间是否可刻画为连通的仿紧局部紧空间的商映象？本文的主要内容之一是围绕该问题讨论特定的连通空间的映射性质. 通过由序列闭集定义的序列连通空间可以解决 Tkachuk[10] 提出的问题. 受此启发，本文第 2 章通过 k 闭集来定义 k 连通空间, 用映射分析了 k 连通性与连通的仿紧局部紧空间的联系，试图解决上述问题. 2.1 节先定义 k 连通空间，讨论它与连通空间，序列连通空间的联系，再给出 k 闭包， k 隔离子集的定义，从而给出 k 连通空间的刻画； 2.2 节讨论作为空间的子空间是 k 连通的性质； 2.3 节讨论 k 连通分支； 2.4 节证明 k 连通性是任意可积的； 2.5 节讨论连通仿紧局部紧空间的映象，部分解决上述问题.

连通空间中广义度量性质研究的强有力结果是 Reed-Zenor 定理 [20]: 正规，局部紧，局部连通的 Moore 空间是可度量化空间. 在映射性质方面，已知任一连通空间未必是某一连通度量空间的连续映象 [12], 如前所述, 把一般的连通空间表示为连通的度量空间的映象要有一定的限制 [10]. 基于 Ponomarev[21] 曾证明的每一第一可数空间是某一可度量空间的开映象的经典结果， Tkachuk[10] 提出问题：每一完全正则的连通的第一可数空间是否是某一连通可度量空间的开映象？由于 Ponomarev 方法所构造的度量空间是零维空间，所以试图用 Ponomarev 方法来解决上述问题是有困难的. Fedeli 和 Le Donne[12] 另辟蹊径，创造一种新方法，证明了 “每一 T_2 的连通空间是某一仿紧连通空间的商映象”. 本文第 3 章在分析了 Fedeli 和 Le Donne 的构造技巧之基础上，初步讨论了连通空间中的一些广义度量性质，获得了仿紧连通空间中广义度量性质的一些映射定理. 该方法对于进一步探索连通空间中的广义度量性质或许会有所帮助. 3.1 节介绍仿紧连通空间的构造； 3.2 节讨论连通 M_1 空间的映象； 3.3 节讨论连通 $\aleph$ 空间的映象.

本文得到下述主要结果：

定理 1.9 X 是 k 连通的当且仅当 X 是连通的且 X 的既 k 开又 k 闭的子集是 X 的开集 (或闭集). (见本文定理 2.1.7)

定理 1.10 设 Y 是空间 X 的 k 连通集. 如果 A 是 X 的 k 闭集, 满足 $Y \subset A \subset c_k(Y)$, 则 A 也是 X 的 k 连通子集. (见本文定理 2.2.8)

定理 1.11 k 连通性关于任意积封闭. (见本文定理 2.4.2)

定理 1.12 对于 T_2 空间 X, 下列条件相互等价:

(1) X 是连通仿紧局部紧空间的紧覆盖的商紧映象;

(2) X 是连通仿紧局部紧空间的商紧映象;

(3) X 是具有点有限 k 系的 k 连通空间. (见本文定理 2.5.4)

定理 1.13 每一 T_1 的连通的第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映象. (见本文定理 3.2.2)

定理 1.14 拟开的闭映射保持 M_1 空间. (见本文定理 3.2.6)

定理 1.15 T_1 空间 X 是具有点 G_δ 性质的连通空间当且仅当 X 是某一连通的 M_1 空间的几乎开映象. (见本文定理 3.2.8)

定理 1.16 每一 T_1 的连通的局部 $\aleph$ 空间是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 M_1 空间的几乎开映象. (见本文定理 3.3.5)

本文所论空间均是拓扑空间, 映射是连续满函数. 文中未定义的术语与记号见文 [22] 或 [23].

第 2 章 k 连通空间

本章主要围绕下述问题 [19] 讨论空间的连通性：连通的 k 空间是否可刻画为连通的仿紧局部紧空间的商空间？通过引入 k 连通空间，并分析其性质，获得关于商紧映射的解．设 X 是一空间， $H \subset X$. H 称为是 X 的 k 闭集 [24], 若对 X 中任意紧集 K, $H \cap K$ 闭于 K. 若 $X \setminus H$ 是 X 的 k 闭集，则称 H 是 X 的 k 开集 [24]. 易见，开集是 k 开的，闭集是 k 闭的．空间 X 称为 k 空间 [25], 若 $A \subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K \cap A$ 是 K 的闭子集，则 A 是 X 的闭子集．显然，空间 X 是 k 空间当且仅当 X 的每一 k 闭集是闭的． H 称为是 X 的序列闭集 [11], 若由 H 中的点组成的 X 的收敛序列的极限点在 H 中．若 $X \setminus H$ 是 X 的序列闭集，则称 H 是 X 的序列开集 [11].

2.1 k 连通空间的刻画

空间 X 称为序列连通空间 [12], 若 X 不能表示为两个互不相交的序列闭集之并．下面引入 k 连通空间的概念.

定义 2.1.1 空间 X 称为 k 连通空间，若 X 不能表示为两个互不相交的 k 闭集之并.

注 T_2 的序列连通空间是 k 连通空间； k 连通空间是连通空间．反之，连通的 k 空间是 k 连通的；每一序列闭集是 k 闭的 k 连通空间是序列连通的．但是，连通空间不一定是 k 连通的， k 连通空间不一定是序列连通的.

例 2.1.2 存在非 k 连通的连通空间.

证明 对于实直线空间 $\mathbb{R}$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{R}$. 取 $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, 其中 $p \in \beta\mathbb{R} - \mathbb{R}$, X 赋予 $\beta\mathbb{R}$ 的子空间拓扑．因为 $\mathbb{R}$ 是 X 的连通的稠子集，所以 X 是连通空间．先证 $\mathbb{R}$ 是 X 的 k 闭集．对 X 的紧子集 K, 显然 $|K| \leqslant c$. 断言 $K \cap \mathbb{R}$ 是有界集，否则，不妨设 $\mathbb{N} \subset K \cap \mathbb{R}$. 由于 $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子空间，利用 [22] 推论 3.6.8, $\beta\mathbb{N}$ 同胚于 $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N} \subset K$, 再利用 [22] 定理 3.6.14, $|K| \geqslant 2^c$, 矛盾．因而存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使 $K \subset [a, b] \cup \{p\}$, 那么 $K \cap \mathbb{R} = K \cap [a, b]$ 是紧子集，所以 $K \cap \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭集. 故 $\mathbb{R}$ 是 X 的 k 闭集．又 $\{p\}$ 是 X 的 k 闭集且 $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, 所以 X 不是 k 连通的. □

上述关于 $\mathbb{R}$ 是 X 中 k 闭集的结论表明对于 $p\in\beta\mathbb{R}-\mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 中不存在序列收敛于 $\{p\}$, 即在 $\beta\mathbb{R}$ 中 $\mathbb{R}$ 关于收敛序列是封闭的.

例 2.1.3 存在非序列连通的 k 连通空间.

证明 对于实直线空间 $\mathbb{R}$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{R}$. 因为 $\mathbb{R}$ 是 $\beta\mathbb{R}$ 的连通的稠子集，所以 $\beta\mathbb{R}$ 是连通空间. 由于 $\beta\mathbb{R}$ 是 k 空间，故 $\beta\mathbb{R}$ 是 k 连通空间. 下证 $\beta\mathbb{R}$ 不是序列连通的. 显然， $\mathbb{R}$ 是 $\beta\mathbb{R}$ 中的开集，从而是 $\beta\mathbb{R}$ 中的序列开集. 又因为 $\mathbb{R}$ 关于收敛序列是封闭的，即 $\mathbb{R}$ 是 $\beta\mathbb{R}$ 中的序列闭集. 所以 $\beta\mathbb{R}$ 不是序列连通的. □

连通空间和序列连通空间可以分别通过隔离子集、s 隔离子集来刻画 [22,14], 为此本节先给出 k 闭包的定义，进而引入 k 隔离子集以刻画 k 连通空间.

定义 2.1.4 设 X 是一空间，$A\subset X$. 令 $c_k(A)=\cap\{F: F\text{是 } X \text{ 的 } k \text{ 闭集且} A\subset F\}$, 称 $c_k(A)$ 为 A 的 k 闭包.

注 k 开集的任意并是 k 开集， k 闭集的任意交是 k 闭集. 因此， $c_k(A)$ 是 k 闭集. 根据定义 2.1.4, 容易验证 (1) $A\subset c_k(A)\subset\overline{A}$,(2)A 是 k 闭集当且仅当 $c_k(A)=A$.

类似隔离子集的定义我们给出 k 隔离子集的定义.

定义 2.1.5 设 A 和 B 是空间 X 中的两个子集, 如果 $(A\cap c_k(B))\cup(B\cap c_k(A))=\emptyset$, 则称子集 A 和 B 是 k 隔离的.

下面给出 k 连通空间的等价刻画.

定理 2.1.6 对于空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是 k 连通的；

(2) X 中不存在两个非空 k 隔离子集 A 和 B, 使得 $A\cup B=X$;

(3) X 中不存在两个非空 k 开集 A 和 B, 使得 $A\cap B=\emptyset$ 和 $A\cup B=X$;

(4) X 中不存在一个既是 k 开集又是 k 闭集的非空真子集.

证明 (1)⇒(2). 假设 X 中存在非空 k 隔离子集 A 和 B, 使得 $A\cup B=X$. 显然， $A\cap B=\emptyset$, 并且这时有 $c_k(B)=c_k(B)\cap X=(c_k(B)\cap A)\cup(c_k(B)\cap B)=B$. 因此， B 是 X 中的一个 k 闭集. 同理 A 也是 X 中的一个 k 闭集. 由定义，这与 X 是 k 连通空间矛盾. 故 (1) 蕴含 (2).

(2)⇒(3). 假设 X 中存在两个非空 k 开集 A 和 B, 使得 $A\cap B=\emptyset$ 和 $A\cup B=X$. 易见 A 和 B 同时也是 k 闭集. 由于 $A=c_k(A)$, $B=c_k(B)$, 从而 $A\cap c_k(B)=$

$\emptyset$, $B\cap c_k(A)=\emptyset$, 即 $(A\cap c_k(B))\cup(B\cap c_k(A))=\emptyset$. 因此 A 和 B 为 k 隔离子集，这与条件 (2) 矛盾. 故 (2) 蕴含 (3).

(3)⇒(4). 假设 X 中有一个既是 k 开集又是 k 闭集的非空真子集 A, 令 $B=X-A$, 则 A 和 B 都是 X 中的 k 开集. 它们是不相交的且使得 $A\cup B=X$, 这与条件 (3) 矛盾. 故 (3) 蕴含 (4).

(4)⇒(1). 假设 X 不是一个 k 连通空间，则 X 可表示为两个非空的互不相交的 k 闭集 A 和 B 的并. 易见 A 和 B 是 X 中既是 k 开集又是 k 闭集的非空真子集，与条件 (4) 矛盾. 故 (4) 蕴含 (1). □

定理 2.1.7 X 是 k 连通的当且仅当 X 是连通的且 X 的既 k 开又 k 闭的子集是 X 的开集 (或闭集).

证明 必要性. 如果 X 是 k 连通的，则 X 是连通的. 由定理 2.1.6, X 的既 k 开又 k 闭的子集仅为 X 和 $\emptyset$, 所以它们是 X 的开集 (或闭集).

充分性. 设 X 是连通空间且 X 的既 k 开又 k 闭的子集是 X 的开集 (或闭集). 若 X 不是 k 连通空间，由定理 2.1.6, X 存在既 k 开又 k 闭的非空真子集 A, 于是 X 存在既开又闭的非空真子集，矛盾. 故 X 是 k 连通空间. □

定理 2.1.8 T_2 空间 X 是序列连通的当且仅当 X 是 k 连通的并且 X 的既序列开又序列闭的子集是 X 的 k 开集 (或 k 闭集).

2.2 k 连通子集及其性质

一般地， k 连通空间的子空间不是 k 连通的，所以有必要考虑作为空间 X 的子空间 Y 的 k 连通性.

定义 2.2.1 设 Y 是空间 X 的一个子集，如果 Y 作为 X 的子空间是一个 k 连通空间，则称 Y 是 X 的一个 k 连通子集；否则，称 Y 不是 X 的 k 连通子集.

引理 2.2.2 A 是空间 X 的 k 开集 (k 闭集), $Y\subset X$, 则 $A\cap Y$ 是子空间 Y 的 k 开集 (k 闭集).

证明 仅证 k 闭集的情形. 对 Y 中的任意紧集 K, 显然 K 也是 X 中的紧集，故 $A\cap K$ 闭于 K, $A\cap K\cap Y=A\cap K$ 闭于 K, 故 $A\cap Y$ 是 Y 的 k 闭集. □

设 $A\subset Y\subset X$, 则 $c_k(A)\cap Y$ 是 Y 的包含 A 的 k 闭集. 记 A 在 Y 中的 k 闭包为 $c_{k,Y}(A)$, 则 $c_{k,Y}(A)\subset c_k(A)\cap Y$.

一般说来， $c_{k,Y}(A) \neq c_k(A) \cap Y$. 如取 X 是 Arens 空间 S_2(见 [26] 例 1.8.6). $X = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2$, 取 $A = \mathbb{N}^2$, $Y = \{0\} \cup \mathbb{N}^2$, 那么 $c_k(A) = X$, $c_{k,Y}(A) = A$, 于是 $c_{k,Y}(A) = A \neq Y = c_k(A) \cap Y$.

引理 2.2.3 设 Y 是空间 X 的一个子集， $A, B \subset Y$. 如果 A 和 B 是空间 X 的 k 隔离子集，则 A 和 B 是子空间 Y 的 k 隔离子集.

证明 设 A 和 B 是空间 X 的 k 隔离子集，则 $(A \cap c_k(B)) \cup (B \cap c_k(A)) = \emptyset$. 由于 $c_{k,Y}(A) \subset c_k(A) \cap Y$, $c_{k,Y}(B) \subset c_k(B) \cap Y$, 所以 $A \cap c_{k,Y}(B) \subset A \cap c_k(B) \cap Y$, $B \cap c_{k,Y}(A) \subset B \cap c_k(A) \cap Y$, 因此 $(A \cap c_{k,Y}(B)) \cup (B \cap c_{k,Y}(A)) = \emptyset$, 所以 A 和 B 是子空间 Y 的 k 隔离子集. □

注 引理 2.2.3 的逆命题是不成立的. 同样考虑 Arens 空间 S_2, 用上面一样的记号，则 $\{0\}$, A 是 Y 的 k 隔离子集，但它们不是 X 的 k 隔离子集.

定理 2.2.4 设 Y 是空间 X 的子空间. 若存在 X 的两个非空 k 隔离子集 A 和 B 使得 $A \cup B = Y$, 则 Y 不是 X 的 k 连通子集.

证明 由引理 2.2.3, A 和 B 是子空间 Y 的 k 隔离子集，从而 Y 不是 X 的 k 连通子集. □

定理 2.2.5 设 Y 是空间 X 的 k 连通子集. 如果 X 中有两个 k 隔离子集 A 和 B 使得 $A \cup B = Y$, 则或者 $A = \emptyset$, 或者 $B = \emptyset$.

证明 根据引理 2.2.3, A 和 B 是子空间 Y 的 k 隔离子集. 由定理 2.1.6, 或者 $A = \emptyset$, 或者 $B = \emptyset$. □

推论 2.2.6 设 Y 是空间 X 的 k 连通子集. 如果 X 中有两个 k 隔离子集 A 和 B 使得 $Y \subset A \cup B$, 则或者 $Y \subset A$, 或者 $Y \subset B$.

证明 由引理 2.2.3, $A \cap Y$ 和 $B \cap Y$ 是子空间 Y 的 k 隔离子集并且 $Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$. 根据定理 2.2.5, 集合 $A \cap Y$ 和 $B \cap Y$ 中必有一个是空集. 如果 $A \cap Y = \emptyset$, 由于 $Y \subset A \cup B$, 可见 $Y \subset B$; 如果 $B \cap Y = \emptyset$, 同理可见 $Y \subset A$. □

引理 2.2.7 如果 A 是空间 X 的 k 闭集， E 是 A 的 k 闭集，则 E 是 X 的 k 闭集.

证明 对 X 中任意紧集 K, 则 $A \cap K$ 闭于 K, 故 $A \cap K$ 是 X 中紧集，从而也是 A 中紧集. 所以 $E \cap A \cap K = E \cap K$ 闭于 $A \cap K$, 从而闭于 K. 因此 E 是 X 的 k 闭集. □

定理 2.2.8 设 Y 是空间 X 的 k 连通集. 如果 A 是 X 的 k 闭集, 满足 $Y \subset A \subset c_k(Y)$, 则 A 也是 k 连通子集.

证明 假设 A 不是 X 的 k 连通集, 根据定义, 存在 A 中不相交的 k 闭集 E 和 F 使得 $A = E \cup F$. 由引理 2.2.7, E 和 F 也是 X 的 k 闭集, 且满足 $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = A$. 易见, E 和 F 是 X 的 k 隔离子集. 由于 Y 是 k 连通子集且 $Y \subset E \cup F$, 根据推论 2.2.6, 或者 $Y \subset E$ 或者 $Y \subset F$. 如果 $Y \subset E$, 由于 $c_k(E) \cap F = \emptyset$, 所以 $A \subset c_k(Y) \subset c_k(E) \subset X - F$; 同理如果 $Y \subset F$, 则 $A \subset X - E$. 从而有 $E = \emptyset$ 或 $F = \emptyset$, 这与 E 和 F 是非空的矛盾. 因此 A 是 k 连通子集. $\square$

特别地, k 连通子集的 k 闭包必为 k 连通的.

称空间 X 的子集族 $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是可链的 [27], 若对任意 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 存在 $\mathcal{C}$ 的有限子集 $\{C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_{n+1}}\}$ 使得每一 $C_{\alpha_i} \cap C_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset (0 \leq i \leq n)$, 其中 $C_{\alpha_0} = C_\alpha$, $C_{\alpha_{n+1}} = C_\beta$.

定理 2.2.9 设 $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是空间 X 的一族 k 连通子集的可链族, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ 是 X 的 k 连通子集.

证明 令 $C = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$, 假设 C 不是 X 的 k 连通子集, 根据定理 2.1.6, 存在 C 的非空 k 隔离子集 A 和 B 使得 $C = A \cup B$, 则对于每一 $\alpha \in \Lambda$, $C_\alpha \subset A \cup B$. 根据推论 2.2.6, 或者 $C_\alpha \subset A$, 或者 $C_\alpha \subset B$. 对任意 $\alpha \neq \beta \in \Lambda, C_\alpha$ 与 C_β 是可链的, 于是存在有限个 k 连通子集 $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \cdots, C_{\beta_n}$ 使得 $C_\alpha \cap C_{\beta_1} \neq \emptyset$, $C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \neq \emptyset, \cdots, C_{\beta_i} \cap C_{\beta_{i+1}} \neq \emptyset, \cdots, C_{\beta_n} \cap C_\beta \neq \emptyset$. 如果 $C_\alpha \subset A$, 由于 $C_\alpha \cap C_{\beta_1} \neq \emptyset$, 则 $C_{\beta_1} \subset A$. 又由 $C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \neq \emptyset$, 则 $C_{\beta_2} \subset A$. 如此下去, 可得 $C_\beta \subset A$. 由于 C_β 是任意的, 从而对于任意 $\alpha \in \Lambda, C_\alpha \subset A$, 这就蕴含 $C \subset A$ 和 $B = \emptyset$, 与 A 和 B 是非空的矛盾. 故 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ 是 k 连通的. $\square$

推论 2.2.10 设 $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是空间 X 的 k 连通子集族, 如果存在 $\alpha_0 \in \Lambda$ 使得 C_{α_0} 与其它 k 连通子集 $C_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ 都相交, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ 是 k 连通的.

推论 2.2.11 设 $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是空间 X 的 k 连通子集族, 并且 $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ 是 k 连通的.

推论 2.2.12 设 X 是一空间, 如果对于任意 $x, y \in X$, 存在 X 的 k 连通子集 C_{xy} 使得 $x, y \in C_{xy} \subset X$, 则 X 是 k 连通的.

证明 设 x_0 是空间 X 的一个固定点，则对于任意 $x \in X$, 令 C_x 为含 x_0 与 x 的 k 连通子集，于是集族 $\{C_x\}_{x\in X}$ 满足推论 2.2.11 的条件，因此 $X = \bigcup\limits_{x\in X} C_x$ 是 k 连通的. □

2.3 k 连通分支

在前面两节中，已经讨论了 k 连通空间以及作为子空间是 k 连通的空间的性质. 那么，对于任意给定的空间，不知道它是否是 k 连通，就考虑把它分解为“ k 连通分支”之并.

定义 2.3.1 设 X 是一空间， $x, y \in X$, 如果在 X 中存在同时包含 x, y 的 k 连通子集，则称点 x 和 y 是 k 连通的.

易证空间中点的 k 连通关系为等价关系.

定义 2.3.2 对于空间 X 中的点的 k 连通关系而言的每一等价类称为 X 的 k 连通分支.

空间 $X \neq \emptyset$ 的每一 k 连通分支都不是空集； X 的不同的 k 连通分支无交；以及 X 的所有 k 连通分支之并便是 X 本身. 此外， $x, y \in X$ 属于 X 的同一个 k 连通分支当且仅当 x 和 y 是 k 连通的.

引理 2.3.3 设 x 是空间 X 的点， P 是空间 X 中包含点 x 的所有 k 连通子集的并，则 P 是 k 连通 k 闭集.

证明 由推论 2.2.11, P 是 k 连通的，再由定理 2.2.8, $c_k(P)$ 是 k 连通的且 $x \in c_k(P)$. 由已知 P 是空间 X 中包含点 x 的所有 k 连通子集的并, 从而 $c_k(P) \subset P$, 故 $c_k(P) = P$, P 是 k 连通 k 闭集. □

定理 2.3.4 设 C 是空间 X 的 k 连通分支，则：

(1) 如果 Y 是 X 的 k 连通子集，且 $Y \cap C \neq \emptyset$, 则 $Y \subset C$.

(2) C 是 X 的 k 连通子集.

(3) C 是 X 的 k 闭集.

证明 (1) 令 $x \in Y \cap C$. 若 $y \in Y$, 则 x, y 是 k 连通的，从而 $y \in C$. 这证明了 $Y \subset C$.

(2) 令 $x \in C$. 对于每一 $y \in C$, 根据定义存在 X 的一 k 连通子集 C_y, 使得 $x, y \in C_y$. 显然 $C_y \cap C \neq \emptyset$, 故由 (1), $C_y \subset C$. 由推论 2.2.11 知， C 是 X 的 k 连

通子集.

(3) 根据引理 2.3.3, C 为 X 的 k 闭集. □

众所周知，连通分支是极大的连通子集. 定理 2.3.4 表明， k 连通分支也是极大的 k 连通子集，那么二者关系又如何呢？

定理 2.3.5 空间 X 的每一 k 连通分支必包含在 X 的一连通分支之中.

证明 设 C 是 X 的一 k 连通分支， x 是 C 中的点， P 是 X 中包含 x 的连通分支. 因为 C 是连通的，所以 $C \subset P$. □

同理可证，如果 X 是 T_2 空间，则 X 的每一序列连通分支必包含在 X 的一 k 连通分支之中.

下面给出 k 连通空间的另一种刻画.

引理 2.3.6 空间 X 的每个 k 连通分支是开集 (因而也是闭集) 当且仅当 X 的每个点有一个 k 连通邻域.

证明 必要性. 任意 $x \in X$, 含点 x 的 k 连通分支就是所求的邻域.

充分性. 设 C 是一 k 连通分支， $x \in C$. 由已知点 x 有一个 k 连通邻域 U_x, 由于 C 是含 x 的极大 k 连通子集，从而 $U_x \subset C$, 故 C 是开集. 又因 $X \setminus C$ 是除 C 之外剩下的 k 连通分支的并集，因而是开集，于是 C 又是闭集. □

同理可证，若 T_2 空间 X 的每个序列连通分支是 k 开集 (因而也是 k 闭集) 当且仅当 X 的每个点有一个序列连通的 k 开集.

定理 2.3.7 空间 X 是 k 连通的当且仅当 X 是连通的，并且对于任意 $x \in X$, 有一个包含 x 的 k 连通邻域.

证明 必要性. 因为 k 连通一定连通，故 X 是连通的. 又因 X 是 k 连通的，所以，对任意 $x \in X$, X 就是 x 的一个 k 连通邻域.

充分性. 由于 X 中的每个点有一个 k 连通邻域，据引理 2.3.6, X 的每个 k 连通分支是开闭集，因为 X 连通，所以它仅有非空开闭集 X, 说明 X 的 k 连通分支只有一个 X, 即 X 是 k 连通的. □

同理可证，若 T_2 空间 X 是序列连通的当且仅当 X 是 k 连通的，并且对于任意 $x \in X$, 有一个包含 x 的序列连通邻域.

2.4 k 连通的任意可积性

这节讨论 k 连通的可积性.

定义 2.4.1 对于空间 X 的子集 S, 令 $ck(S)=\{x\in X:$ 存在 X 中含点 x 的紧集 K 使得 x 属于 $S\cap K$ 在 K中的闭包$\}$.

这时总有 $S\subset ck(S)\subset c_k(S)\subset \overline{S}$. 事实上，对任意 $x\in ck(S)$, K 是满足定义 $ck(S)$ 的紧集. 若 $x\notin c_k(S)$, 则存在 X 的 k 闭集 $F, S\subset F, x\notin F$. 则 $F\cap K$ 闭于 K, $S\cap K$ 在 K 中的闭包包含于 $F\cap K$, 这与 x 属于 $S\cap K$ 在 K 中的闭包矛盾.

定理 2.4.2 k 连通性关于任意积封闭.

证明 首先证明 k 连通性关于有限积封闭. 为此，只须证明两个 k 连通空间的积空间是 k 连通的. 设 X 和 Y 都是非空的 k 连通空间, 取定点 $p_0=(x_0,y_0)\in X\times Y$. 对于任意的 $p=(x,y)\in X\times Y$, 易见 $X\times\{y_0\}$ 和 $\{x\}\times Y$ 都是 $X\times Y$ 的 k 连通子集，并且 $(X\times\{y_0\})\cap(\{x\}\times Y)\neq\emptyset$. 由推论 2.2.11, $(X\times\{y_0\})\cup(\{x\}\times Y)$ 是 $X\times Y$ 的 k 连通子集且同时包含点 p_0,p. 由推论 2.2.12, 则 $X\times Y$ 是 k 连通的.

关于任意积封闭证明如下：设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是以 Γ 为指标集的一非空 k 连通空间族. 记 $X=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$. 在 X 中选取一个点 $b=(b_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. 在 Γ 中给出任意有限个指标 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, X 的子空间 $X(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 定义为：它由所有这样的点 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ 组成，对于 $\alpha\neq\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 有 $x_\alpha=b_\alpha$. 不难看出 $X(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 与有限积空间 $X_{\alpha_1}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 同胚，因而是 k 连通的.

由此可以推出, X 的这些子空间之并即子空间 $Y=\cup\{X(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\forall\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\Gamma\}$ 是 k 连通的，这是因为空间 $X(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是 k 连通的，并且它们都含有点 $b=(b_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. 由定理 2.2.8, 则 $c_k(Y)$ 是 X 的 k 连通子集. 为证明 X 是 k 连通空间，只须证明 $c_k(Y)=X$. 对于每一 $\beta=(\beta_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\in X$, 取 X_α 中紧集 K_α 满足 $\{b_\alpha,\beta_\alpha\}\subset K_\alpha$, 则 $K=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}K_\alpha$ 是 X 中紧集且 $\beta\in K$. 下证 β 在 K 中的每一基元 U_k 与 Y 相交. $U_k=U|_K=U\cap K$, 其中 $U=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 X 中基元，即每一 U_α 是 X_α 的开集，并且除去有限多个值 α(比如 $\alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_n$) 以外 $U_\alpha=X_\alpha$. 令

$$y_\alpha=\begin{cases}\beta_\alpha, \alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_n\\ b_\alpha, \Gamma\text{中的其余}\alpha.\end{cases}$$

因为 $(y_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\in X(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 所以 $(y_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\in Y$. 注意到 $(y_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\in U\cap K=U_k$. 故

$U_k \cap Y \neq \emptyset$. 所以 $\beta \in \mathrm{cl}_K(Y \cap K)$, 从而 $\beta \in ck(Y) \subset c_k(Y)$. 故 X 是 k 连通的. □

2.5 连通仿紧局部紧空间的映象

本节讨论连通仿紧局部紧空间的映象. 设映射 $f: X \to Y$. f 称为紧覆盖映射 [28], 若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象. f 称为紧映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集 (见 [22]). f 称为逆紧映射, 若 f 是闭且紧的映射 (见 [22]). 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的点有限 (点可数) 集族, 若对于每一 $x \in X, \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$ 是有限的 (可数的)(见 [22]). 空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 覆盖 [29], 若对 X 中紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$ 使得 $K \subset \cup\mathcal{P}'$. 由空间 X 的紧子集组成的 X 的覆盖 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 系 [30], 若 X 的子集 A 满足对于任意的 $P \in \mathcal{P}, A \cap P$ 闭于 P, 则 A 闭于 X.

引理 2.5.1 映射保持 k 连通性.

证明 X 是 k 连通空间, $f: X \to Y$ 是映射. 假设 Y 不是 k 连通的, 则 Y 是两个非空的不相交的 k 闭集之并. 下证若 A 是 Y 中的 k 闭集, 则 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的 k 闭集. 对 X 中的任意紧集 K, 则 $f(K)$ 是 Y 中的紧集, 故 $A \cap f(K)$ 闭于 $f(K)$, $f^{-1}(A \cap f(K))$ 闭于 $f^{-1}(f(K))$, 故 $f^{-1}(A \cap f(K)) \cap K = f^{-1}(A) \cap K$ 闭于 $f^{-1}(f(K)) \cap K = K$. 故 X 也是两个非空的不相交的 k 闭集之并, 矛盾. □

引理 2.5.2 设 $f: X \to Y$ 是紧覆盖映射, 其中 Y 是 T_2 空间. 若 Y 是 k 连通空间且每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 k 连通子集, 则 X 也是 k 连通空间.

证明 若 X 不是 k 连通空间, 则存在 X 的不相交的非空 k 闭集对 A, B, 使得 $X = A \cup B$. 由于每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 k 连通子集, 所以或者 $f^{-1}(y) \subset A$, 或 $f^{-1}(y) \subset B$. 于是存在 Y 中不相交的非空集对 C, D, 使得 $Y = C \cup D, A = \bigcup\limits_{y \in C} f^{-1}(y)$ 且 $B = \bigcup\limits_{y \in D} f^{-1}(y)$, 即 $A = f^{-1}(C), B = f^{-1}(D)$. 下证 C, D 是 k 闭集. 对 Y 中的任意紧集 K, 因 f 是紧覆盖映射, 故存在 X 中的紧集 M 使得 $f(M) = K$. 则 $f^{-1}(C) \cap M$ 闭于 M, $f(f^{-1}(C) \cap M) = C \cap K$ 是 K 中紧集. 因 Y 是 T_2 空间, 故 $C \cap K$ 闭于 K. 同理可证 D 是 k 闭集. 这与 Y 是 k 连通的矛盾. 因此 X 是 k 连通空间. □

本节下述的定理中空间满足 T_2 分离性.

引理 2.5.3 对于空间 X, 下列条件相互等价:

(1) X 是连通仿紧局部紧空间的紧覆盖紧映象;

(2) X 是具有由紧子集组成的点有限 k 覆盖的 k 连通空间.

证明 (1)⇒(2). 仿紧局部紧空间是 k 空间，连通的 k 空间是 k 连通的，映射保持 k 连通性. 故 X 是 k 连通的. 仿紧局部紧空间的紧覆盖紧映象具有由紧子集组成的点有限 k 覆盖 [29]. 故 X 是具有由紧子集组成的点有限 k 覆盖的 k 连通空间.

(2)⇒(1). 设 X 是 k 连通空间，$\mathcal{K}$ 是 X 的由紧子集组成的点有限 k 覆盖. 记拓扑和 $\bigoplus\mathcal{K}$ 为 M, 则 M 是仿紧局部紧空间. 设 $q: M \to X$ 是自然映射, 则 q 是紧覆盖映射. 事实上，对 X 中任一紧集 N, 存在 $\mathcal{K}$ 中的有限子集 $\mathcal{K}'$ 使得 $N \subset \cup\mathcal{K}'$. 设 $L = \bigoplus\{N \cap K : K \in \mathcal{K}'\}$, 则 L 是 M 中的紧集且 $q(L) = N$. 显然 q 是紧映射. 故 q 是紧覆盖紧映射.

赋予 $M\times\mathbb{I}$ 积拓扑, 显然 $M\times\mathbb{I}$ 是仿紧局部紧空间. 在集 $M\times\mathbb{I}$ 上定义二元关系 $\sim$ 如下：$(y_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$ 当且仅当 $q(y_1) = q(y_2)$ 且 $t_1 = t_2 = 1$, 或 $y_1 = y_2$ 且 $t_1 = t_2$, 则 $\sim$ 是等价关系. 等价类的集合 (商集) 记为 Z, 并且让 $\pi : M\times\mathbb{I} \to Z$ 是典范投影. 对于每一 $y \in M, n \in \mathbb{N}$, 令 $B_{yn} = \pi(\{(y, 1)\} \cup \{(y', t) : q(y') = q(y), 1 - 1/n < t < 1\})$. 在集合 Z 上赋予下述拓扑 τ: 对于每一 $(y, t) \in M \times \mathbb{I}$, 若 $t \neq 1$,$\pi(y, t)$ 在 Z 中的邻域形如 (y, t) 在 $M \times \mathbb{I}$ 中邻域；若 $t = 1$,$\pi(y, t)$ 在 Z 中的邻域基为 $\{B_{yn} : n \in \mathbb{N}\}$. 对于每一 $U \in \tau, \pi^{-1}(U)$ 是空间 $M \times \mathbb{I}$ 的开集，从而 π 是映射. 对任意的 $z \in Z$, $\pi^{-1}(z)$ 是 $M \times \mathbb{I}$ 中的紧集. 对任意的 $z \in Z$, $\pi^{-1}(z) \subset U$, U 是 $M \times \mathbb{I}$ 中的开集, 存在 Z 中开集 V 使得 $z \in V$ 且 $\pi^{-1}(V) \subset U$. 所以 π 是逆紧映射. 因逆紧映射保持仿紧局部紧性 [22], 所以 Z 是仿紧局部紧空间.

定义函数 $p : M \times \mathbb{I} \to X$, 使得每一 $p(y, t) = q(y)$, 再定义函数 $f : (Z, \tau) \to X$ 满足 $f \circ \pi = p$.

下证 f 是紧覆盖紧映射. 先证 f 是连续的. 如果 E 是 M 的开集, 则 $\pi(E\times[0, 1))$ 是 (Z, τ) 的开集；如果 $x \in X$, 则 $\pi(q^{-1}(x) \times (0, 1])$ 是 (Z, τ) 的开集. 若 A 是空间 X 的开集，则 $q^{-1}(A)$ 是空间 M 的开集，于是 $f^{-1}(A) = \pi(q^{-1}(A) \times [0, 1)) \cup (\bigcup\limits_{x\in A} \pi(q^{-1}(x) \times (0, 1]))$ 是 (Z, τ) 的开集，故 f 是连续的. 设 K 是 X 中的任意紧集，由于 q 是紧覆盖映射，故存在 M 中紧集 N 使得 $q(N) = K$, 则存在 $M \times \mathbb{I}$ 中紧集 $N \times \mathbb{I}$ 使得 $p(N \times \mathbb{I}) = K$. 因 π 是连续的，故 $\pi(N \times \mathbb{I})$ 是 Z 中的紧集，且 $f(\pi(N \times \mathbb{I})) = p(N \times \mathbb{I}) = K$. 所以 f 是紧覆盖映射. 因 $[0, 1]$ 的任一闭区间是紧

的，由 Z 的 拓扑形式知， $f^{-1}(x)$ 的任一开覆盖有有限子覆盖，故 f 是紧映射. 所以 f 是紧覆盖紧映射.

显然，每一 $f^{-1}(x)$ 是空间 (Z,τ) 的 k 连通子集. 由引理 2.5.2, (Z,τ) 是 k 连通空间，从而 (Z,τ) 是连通空间，故 X 是连通仿紧局部紧空间的紧覆盖紧映象. □

定理 2.5.4 对于空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是连通仿紧局部紧空间的紧覆盖的商紧映象；

(2) X 是连通仿紧局部紧空间的商紧映象；

(3) X 是具有点有限 k 系的 k 连通空间.

证明 (1)⇒(2). 显然.

(2)⇒(3). 因为仿紧局部紧空间的商紧象具有点有限 k 系 [29]. 由引理 2.5.1, X 是具有点有限 k 系的 k 连通空间.

(3)⇒(1). 由文 [29] 知：若 $\mathcal{K}$ 是空间 X 的点可数覆盖，那么 $\mathcal{K}$ 是 X 的 k 系当且仅当 X 是 k 空间且 $\mathcal{K}$ 是 X 的由紧子集组成的 k 覆盖. 因 X 是 k 空间，故紧覆盖映射是商映射 [28]. 由引理 2.5.3, X 是连通仿紧局部紧空间的紧覆盖的商紧映象. □

第 3 章 一类仿紧连通空间的几乎开映象

本章讨论包含仿紧连通空间的一些广义度量空间类的映射性质. 这讨论源于 Tkachuk 的问题 [10]: 每一完全正则的连通的第一可数空间是否是连通度量空间的开映象？回忆几个集族概念 (见 [23]). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的离散集族，若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathcal{P} : P \cap U \neq \emptyset\}$ 至多只有一个元. $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部有限集族，若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathcal{P} : P \cap U \neq \emptyset\}$ 是有限的. $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部可数集族，若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathcal{P} : P \cap U \neq \emptyset\}$ 是可数的. $\mathcal{P}$ 称为 X 的闭包保持集族，若对于每一 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 有 $\mathrm{cl}(\cup \mathcal{P}') = \cup\{\mathrm{cl}(P) : P \in \mathcal{P}'\}$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持集族，若对于每一 $H(P) \subset P \in \mathcal{P}$, 集族 $\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是闭包保持的. 本章所论空间满足 T_1 分离性.

3.1 仿紧连通空间的构造

定义 3.1.1 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为几乎开映射 [31], 若对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 使得如果 U 是 x 在 X 中的邻域，则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(2) f 称为不可约映射 [22], 若对 X 的每一真闭子集 F, $f(F) \neq Y$.

(3) f 称为拟开映射 [32], 若对 X 的每一非空开集 U, $\mathrm{int} f(U) \neq \emptyset$.

显然，开映射是拟开映射，而且开映射 $\Rightarrow$ 几乎开映射 $\Rightarrow$ 商映射.

引理 3.1.2(Fedeli-Le Donne 构造 [12]) 设 X 是任一空间，则存在 T_2 仿紧空间 Y 和 Z, 商映射 $\pi : Y \to Z$ 和 $g : Z \to X$, 满足 X 是连通空间当且仅当 Z 是连通空间.

Fedeli 和 Le Donne 的构造如下. 对于空间 X, 置 $K = X \times X$. 赋予集合 K 下述拓扑：

(1) 每一 $(x', x) \in K, x' \neq x$, 是孤立点.

(2) 对于每一 $x \in X$, 点 (x, x) 在 K 中的邻域基取为 $\{B \times \{x\} : B$ 是 x 在 X 的邻域 $\}$.

设 $Y = K \times [0, 1]$. 在集合 Y 上赋予拓扑 τ: τ 有基元形如， Y 关于空间 K 和

$[0,1]$ 的积拓扑中的元，或 $\{\kappa\}\times(0,1], \kappa\in K$.

让 Z 是把空间 Y 中每一集 $\{x\}\times X\times\{1\}$ 粘成一点所成的商空间. 记商映射 $\pi: Y\to Z$. 定义函数 $g: Z\to X$, 使得每一 $g(x,x',t)=x$. 则 g 是商映射.

文 [12] 证明了空间 X 是连通的当且仅当空间 Y 是连通的. 易验证，Y 是 T_2 空间. 为了完备起见, 下面证明 Y 是仿紧空间. 对于每一 $x\in X$, 设 $F_x=X\times\{x\}\times[0,1]$, 则 $Y=\bigoplus\{F_x: x\in X\}$. 从而只须证明每一 F_x 是仿紧空间. 设 $\mathcal{U}$ 是 F_x 的任一开覆盖. 选取 $U_x\in\mathcal{U}$, 使得 $(x,x,0)\in U_x$, 则存在 x 在 X 中的开邻域 B 和 $\varepsilon>0$, 使得 $B\times\{x\}\times[0,\varepsilon]\subset U_x$. 对于任意的 $x'\in X$, 由 $\{x'\}\times\{x\}\times[0,1]$ 的紧性, $\{U\cap(\{x'\}\times\{x\}\times[0,1]): U\in\mathcal{U}\}$ 存在有限子集 $\mathcal{U}_{x'}$ 覆盖 $\{x'\}\times\{x\}\times[0,1]$. 令

$$\mathcal{V}_{x'}=\begin{cases}\mathcal{U}_{x'}, & x'\in X-B\\ \{U\cap(\{x'\}\times\{x\}\times(\varepsilon,1]): U\in\mathcal{U}_{x'}\}, & x'\in B.\end{cases}$$

由于当 $x'\neq x$ 时, $\{x'\}\times\{x\}\times[0,1]$ 是 F_x 中既开且闭的子集, 易验证 $\bigcup_{x'\in X}\mathcal{V}_{x'}\cup\{U_x\}$ 是 F_x 中 $\mathcal{U}$ 的局部有限开加细覆盖. 故 F_x 是仿紧的. □

对于给定的空间 X, 下文中沿用引理 3.1.2 的记号，生成空间 K, Y 与 Z, 及映射 π 与 g.

引理 3.1.3 $\pi: Y\to Z$ 是不可约的闭映射， $g: Z\to X$ 是几乎开映射且存在几乎开映射 $f: Y\to X$, 使得 $g\circ\pi=f$.

证明 对任意的 $z\in Z$, 设 Y 中的开集 $U\supset\pi^{-1}(z)$, 不妨设 $\pi^{-1}(z)=\{x'\}\times X\times\{1\}$. 对于每一 $x\in X$, 存在 $\varepsilon_x>0$, 使得 $\{x'\}\times\{x\}\times(\varepsilon_x,1]\subset U$. 令

$$V=\{z\}\cup(\cup\{\{x'\}\times\{x\}\times(\varepsilon_x,1): x\in X\}).$$

则 V 是 z 在 Z 中的开邻域且 $\pi^{-1}(V)\subset U$. 故 π 是闭映射.

设 F 是 Y 的真闭子集, 则存在 $\kappa\in K$ 和 $0<a<b<1$, 使得 $F\cap(\{\kappa\}\times(a,b))=\emptyset$, 于是 $\pi(F)\neq Z$, 所以 π 是不可约映射.

对任意 $x\in X$, 则 $(x,x,0)\in g^{-1}(x)$, 如果 W 是 $(x,x,0)$ 在 Z 中的任一邻域, 那么 $x\in \mathrm{int}g(W)$. 故 g 是几乎开映射.

定义函数 $f: Y\to X$, 使得每一 $f(x,x',t)=x$. 显然， $g\circ\pi=f$. 往证 f 是几乎开映射. 对任意的 $O\subset X, f^{-1}(O)=O\times X\times[0,1]$. 显然，若 O 是 X 的开集, 则 $f^{-1}(O)$ 是 Y 的开集. 所以 f 是连续函数. 对任意 $x\in X$, 则 $(x,x,0)\in f^{-1}(x)$, 如果 G 是 $(x,x,0)$ 在 Y 中的任一邻域，那么 $x\in\mathrm{int}f(G)$. 故 f 是几乎开映射. □

3.2 连通 M_1 空间的映象

下面分析空间 Y 的一些局部的广义度量性质. 设 Φ 是一拓扑性质, 称空间 X 是局部 Φ 空间, 若 X 中的每一点都存在具有性质 Φ 的邻域. 回忆几个具有基结构的广义度量空间 [23]. 度量空间的闭映象称为 Lašnev 空间. 具有 σ 闭包保持基的正则空间称为 M_1 空间. 具有 σ 闭包保持拟基的正则空间称为 M_2 空间. M_2 空间等价于层空间 (见 [23]).

度量空间 $\Rightarrow$Lašnev 空间 $\Rightarrow M_1$ 空间 $\Rightarrow M_2$ 空间 $=$ 层空间 $\Rightarrow$ 仿紧空间.

引理 3.2.1 空间 X 是第一可数空间当且仅当空间 Y 是可度量空间.

证明 由于几乎开映射保持第一可数性, 若 Y 是可度量空间, 由引理 3.1.3, X 是第一可数空间.

反之, 因为 Y 是仿紧空间, 由 Smirnov 度量化定理 (见 [22]), 只须证 Y 是局部可度量的. 注意到, 对于每一 $(x', x, t) \in Y$, 若 $x' \neq x$, 则 $\{x'\} \times \{x\} \times [0, 1]$ 是点 (x', x, t) 在 Y 中的可度量的邻域; 若 $x' = x$ 且 $t > 0$, 则 $\{x\} \times \{x\} \times (0, 1]$ 是点 (x', x, t) 在 Y 中的可度量的邻域. 因而, 讨论空间 Y 的局部可度量性质, 只须考察 $(x, x, 0)$ 在 Y 中的局部可度量性. 对于每一 $x \in X$, 因为 X 是第一可数空间, 让 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是点 x 在 X 中的局部基. 置

$$\mathcal{B}_n = \{U_n \times \{x\}\} \cup \{\{(x', x)\} : x' \in X - U_n\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

显然, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 是 K 的正则子空间 $X \times \{x\}$ 的 σ 离散基. 于是 $X \times \{x\}$ 是点 (x, x) 在 K 中可度量的邻域, 从而 $X \times \{x\} \times [0, 1]$ 是点 $(x, x, 0)$ 在 Y 中可度量的邻域. 故 Y 是局部可度量空间, 因此 Y 是可度量空间. □

由上述引理, 我们得到了 Tkachuk 问题 [10] 的部分回答.

定理 3.2.2 每一连通的第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映象.

称空间 X 是点 G_δ 空间或具有点 G_δ 性质, 若 X 的每一单点集是 X 的 G_δ 集.

引理 3.2.3 空间 X 具有点 G_δ 性质当且仅当 Y 是 M_1 空间.

证明 显然, M_1 空间具有点 G_δ 性质. 易验证, 几乎开映射保持点 G_δ 性质, 所以若 Y 是 M_1 空间, 则 X 具有点 G_δ 性质.

反之, 设空间 X 具有点 G_δ 性质. 对于每一 $x \in X$, 设 $\mathcal{B}_x$ 是 x 在 X 中的局部

基，于是存在集列$\{U_n\} \subset \mathcal{B}_x$, 使得 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 置

$$\mathcal{B}_n = \{B \times \{x\} : B \in \mathcal{B}_x\} \cup \{\{(x', x)\} : x' \in X - U_n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

在 K 的子空间 $X \times \{x\}$ 中，由于 (x, x) 是唯一的聚点，所以 $\{B \times \{x\} : B \in \mathcal{B}_x\}$ 是闭包保持的，且 $\{\{(x', x)\} : x' \in X - U_n\}$ 是离散的，于是 $\mathcal{B}_n$ 是闭包保持的. 注意到，对于每一 $x' \in X - \{x\}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x' \notin U_n$. 这表明 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 是 $X \times \{x\}$ 的基. 故 $X \times \{x\}$ 是 M_1 空间，从而 Y 的子空间 $F_x = X \times \{x\} \times [0, 1]$ 是 M_1 空间. 因此 $Y = \bigoplus\{F_x : x \in X\}$ 是 M_1 空间. □

为了利用引理 3.2.3 说明 Z 是 M_1 空间，有必要回答不可约的闭映射是否保持 M_1 空间性质. 我们在此利用 Mizokami 的结果，获得了它的一个肯定的回答. 至于闭映射是否保持 M_1 空间性质，还是一个尚未解决的问题 [33,34].

引理 3.2.4[32] 设 $h : X \to H$ 是拟开的闭映射. 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的闭包保持的开集族，则 $\{\mathrm{int}h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ 是 H 的闭包保持集族.

引理 3.2.5[35,36] 设 X 是层空间. 下述条件相互等价：

(1) X 是 M_1 空间.

(2) X 的每一点具有闭包保持局部基.

(3) X 的每一闭集在 X 中具有 (σ) 闭包保持的开邻域基.

定理 3.2.6 拟开的闭映射保持 M_1 空间.

证明 设 $h : X \to H$ 是拟开的闭映射，其中 X 是 M_1 空间. 由于闭映射保持层空间 (见 [23]), 所以 H 是层空间. 对于每一 $y \in H$, 由引理 3.2.5, $f^{-1}(y)$ 在 X 中具有闭包保持的开邻域基 $\mathcal{B}$, 又由引理 3.2.4, $\{\mathrm{int}h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ 是 y 在 H 中的闭包保持局部基. 再由引理 3.2.5, H 是 M_1 空间. □

易验证，不可约的闭映射是拟开映射 [32], 所以有下述推论，它回答了 Nyikos 提出的一个问题 [34,37].

推论 3.2.7 不可约的闭映射保持 M_1 空间.

定理 3.2.8 空间 X 是具有点 G_δ 性质的连通空间当且仅当 X 是某一连通的 M_1 空间的几乎开映象.

证明 只须证明必要性. 设 X 是具有点 G_δ 性质的连通空间. 由引理 3.2.3, Y 是 M_1 空间. 又由引理 3.1.3 和推论 3.2.7, Z 是 M_1 空间. 再由引理 3.1.2 和引理 3.1.3, Z 是连通空间且 $g : Z \to X$ 是几乎开映射. □

3.3 连通 $\aleph$ 空间的映象

本节讨论具有网结构的广义度量性质. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 (见 [23]), 如果 U 是 X 的开集且 $x \in U$, 则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $x \in P \subset U$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网 (见 [23]), 如果 C 和 U 分别是 X 的紧集和开集且 $C \subset U$, 则存在有限的 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 使得 $C \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$. 具有 σ 局部有限网的正则空间称为 σ 空间 (见 [23]). 具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 $\aleph$ 空间 (见 [23]).

显然, 度量空间 $\Rightarrow$ $\aleph$ 空间 $\Rightarrow$ σ 空间 $\Rightarrow$ 具有点 G_δ 性质的空间. 因为 M_1 空间是 σ 空间 (见 [23]), 所以引理 3.2.3 中的空间 Y 可换为 σ 空间. 但是, Y 未必是 $\aleph$ 空间. 让 X 是扇空间 S_{ω_1}(见 [26] 命题 2.7.21), 即对 ω_1 个非平凡的收敛序列的拓扑和, 将其所有极限点粘成一点得到的商空间. 则 X 是 Lašnev 空间, 从而是 σ 空间, 但不是 $\aleph$ 空间 (见 [26]). 若记 X 的唯一聚点为 s, 那么 K 的子空间 $X \times \{s\}$ 仍同胚于 S_{ω_1}, 于是 $X \times \{s\}$ 不是 $\aleph$ 空间, 从而 Y 也不是 $\aleph$ 空间. 这表明, 为使 Y 是 $\aleph$ 空间, 必须加强网的结构.

引理 3.3.1 若 T_2 空间 X 具有 σ 局部可数网, 则 X 是点 G_δ 空间.

证明 设 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 是空间 X 的 σ 局部可数网, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是局部可数的. 对于每一 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 由 $\mathcal{P}_n$ 的局部可数性, 存在 x 在 X 中的开邻域 G_n, 使得 G_n 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的可数个元相交, 记

$$\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap G_n \neq \emptyset\} = \{P_{nm} : m \in \mathbb{N}\},$$

$$U_n = G_n - \cup\{\overline{P}_{nm} : x \notin \overline{P}_{nm}, m \in \mathbb{N}\}.$$

则 U_n 是 X 中包含点 x 的 G_δ 集. 往证 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 若存在 $x' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n - \{x\}$, 则存在 X 中不相交的开集 V 和 V', 使得 $x \in V, x' \in V'$. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathcal{P}_n$, 使得 $x' \in P \subset V'$. 这时 $x' \in P \cap G_n$ 且 $x \notin \overline{P}$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $P = P_{nm}$, 从而 $x' \in U_n \subset G_n - \overline{P}_{nm}$, 矛盾. □

引理 3.3.2 设 $x \in X$. 若 $\{x\}$ 是 X 的 G_δ 集, 则 K 的子空间 $X \times \{x\}$ 的任一紧集或者是有限集或者是含点 (x, x) 的收敛序列.

证明 设 F 是 $X \times \{x\}$ 的无限紧子集. 由于 (x, x) 是 $X \times \{x\}$ 的唯一聚点, 且 F 有聚点, 所以 $(x, x) \in F$. 先证明 F 是可数集. 设 $\{G_n\}$ 是 X 的开集列, 且 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 紧集 $F-(G_n\times\{x\})$ 是离散的, 所以 $F-(G_n\times\{x\})$

是有限集. 从而 $F-\{(x,x)\}=F-\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(G_n\times\{x\})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F-(G_n\times\{x\}))$ 是可数集, 因此 F 是可数集. 记 $F=\{(x,x)\}\cup\{(x_n,x):n\in\mathbb{N}\}$. 由于 F 的任一无限子集以 (x,x) 为唯一聚点, 所以在 $X\times\{x\}$ 中 $(x_n,x)\to(x,x)$, 即 F 是一收敛序列. □

引理 3.3.3 若 X 是局部具有 σ 局部可数 k 网的 T_2 空间, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

证明 分三步完成引理的证明.

(1) Y 是局部具有 σ 局部可数 k 网的空间.

由引理 3.2.1 的证明可见, 只须验证对每一 $x\in X$, 在 K 中 (x,x) 的某邻域具有 σ 局部可数 k 网. 因 X 是局部具有 σ 局部可数 k 网, 存在点 x 在 X 中的开邻域 B, 使得 B 具有 σ 局部可数 k 网, 往证点 (x,x) 在 K 中的邻域 $B\times\{x\}$ 具有 σ 局部可数 k 网. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 是子空间 B 的 σ 局部可数 k 网, 其中每一 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$ 且 $\mathcal{P}_n$ 在 B 中是局部可数的. 于是存在 x 在 B 中的开邻域 B_n, 使得 B_n 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的至多可数个元相交. 由引理 3.3.1, 不妨设 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n=\{x\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathcal{L}_n=\{P\times\{x\}:P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{(x',x)\}:x'\in B-B_n\}.$$

由 B_n 的选取及 $\mathcal{P}_n$ 的点可数性, 则 $\mathcal{L}_n$ 是 $B\times\{x\}$ 的局部可数集族. 令 $\mathcal{L}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_n$.

$\mathcal{L}$ 是 $B\times\{x\}$ 的网. 事实上, 设 $(x',x)\in U\subset B\times\{x\}$, 其中 U 是 $B\times\{x\}$ 的开集. 若 $x'\neq x$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $x'\in B-B_n$, 于是 $\{(x',x)\}\in\mathcal{L}_n$ 且 $(x',x)\in\{(x',x)\}\subset U$. 若 $x'=x$, 则存在 x 在 B 中的开邻域 V, 使得 $(x,x)\in V\times\{x\}\subset U$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathcal{P}_m$, 使得 $x\in P\subset V$, 那么 $P\times\{x\}\in\mathcal{L}_m$ 且 $(x,x)\in P\times\{x\}\subset V\times\{x\}\subset U$.

$\mathcal{L}$ 是 $B\times\{x\}$ 的 k 网. 事实上, 设 $F\subset U$, 其中 F,U 分别是 $B\times\{x\}$ 的紧集和开集. 不妨设 F 是无限集, 则由引理 3.3.1 和引理 3.3.2, 记 $F=\{(x,x)\}\cup\{(x_n,x):n\in\mathbb{N}\}$, 其中在 $X\times\{x\}$ 中 $(x_n,x)\to(x,x)$. 存在 x 在 B 中的开邻域 V, 使得 $(x,x)\in V\times\{x\}\subset U$, 所以存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>n_0$ 时有 $x_n\in V$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 和有限的 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}_m$, 使得 $\{x\}\cup\{x_n:n>n_0\}\subset\cup\mathcal{P}'\subset V$. 这时 $F-\cup\{P\times\{x\}:P\in\mathcal{P}'\}$ 是有限集, 从而存在有限的 $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$, 使得 $F\subset\cup\mathcal{L}'\subset U$.

(2) Y 具有 σ 局部可数 k 网.

利用 Y 的仿紧性, 由 (1), 存在 Y 的局部有限闭覆盖 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 Y_α 具有 σ 局部可数 k 网. 让 Y' 是空间族 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的拓扑和, $q:Y'\to Y$ 是自然映射.

则空间 Y' 具有 σ 局部可数 k 网，且 q 是有限到一的闭映射，从而 q 是逆紧映射. 易验证 [26], 逆紧映射保持 k 网，保持局部可数集族，所以空间 Y 具有 σ 局部可数 k 网.

(3) Y 是 $\aleph$ 空间.

设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{Q}_n$ 是空间 Y 的 σ 局部可数 k 网，其中每一 $\mathcal{Q}_n\subset\mathcal{Q}_{n+1}$ 且 $\mathcal{Q}_n$ 是局部可数的. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 Y 的开覆盖 $\mathcal{U}_n$, 使得 $\mathcal{U}_n$ 的每一元仅与 $\mathcal{Q}_n$ 中的至多可数个元相交. 由 Y 的仿紧性，不妨设 $\mathcal{U}_n$ 是局部有限的，那么 $\mathcal{U}_n\wedge\mathcal{Q}_n=\{U\cap Q: U\in\mathcal{U}_n, Q\in\mathcal{Q}_n\}$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 对于每一 $C\subset W$, 其中 C,W 分别是 Y 的紧集和开集，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 和有限的 $\mathcal{Q}'\subset\mathcal{Q}_n$, 使得 $C\subset\cup\mathcal{Q}'\subset W$, 同时存在有限的 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}_n$, 使得 $C\subset\cup\mathcal{U}'$, 于是 $C\subset\cup(\mathcal{Q}'\wedge\mathcal{U}')\subset W$. 故 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{U}_n\wedge\mathcal{Q}_n)$ 是 Y 的 σ 局部有限 k 网，所以 Y 是 $\aleph$ 空间. □

由引理 3.1.3, 引理 3.2.3 和引理 3.3.3, 有

推论 3.3.4 若空间 X 是局部 $\aleph$ 空间，则 Y 是 M_1 的 $\aleph$ 空间.

由于 Lašnev 空间未必是 $\aleph$ 空间 (如扇空间 S_{ω_1}), 所以当 X 是局部 $\aleph$ 空间时, Z 未必是 $\aleph$ 空间. 仿紧 $\aleph$ 空间的闭象具有 σ 遗传闭包保持 k 网 (见 [26]), 所以

定理 3.3.5 每一连通的局部 $\aleph$ 空间是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 M_1 空间的几乎开映象.

问题 3.3.6 每一连通的局部 $\aleph$ 空间是否是某一仿紧连通的 $\aleph$ 空间的商空间？

问题 3.3.7 每一局部连通空间是否是某一仿紧局部连通空间的商空间？

参考文献

[1] Lennes N J. Curres in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations[J]. Amer J Math, 1911, 33: 287-326

[2] Hausdorff. F Grundzüge der Mengenlehre[M]. Leipzig, 1914

[3] Knaster B, Kuratowski K. Sur les enϵembles connexes[J]. Fund Math, 1921, 2: 206-255

[4] Ferrer J. A property of connected Baire spaces[J]. Topology Appl, 1997, 77: 177-182

[5] Gruenhage G, Kulesza J, Donne A Le. Connectifications of metrizable spaces[J]. Topology Appl, 1998, 82: 171-179

[6] Fedeli A, Donne A Le. Dense embeddings in pathwise connected spaces[J]. Topology Appl, 1999, 96: 15-22

[7] Fedeli A, Donne A Le. On locally connected connectifications[J]. Topology Appl, 1999, 96: 85-88

[8] Sun J, Song F. A property of connected components and its applications[J]. Topology Appl, 2002, 125: 553-560

[9] Fleissner W G, Porter J, Roitman J. Coarser connected topologies[J]. Topology Appl, 2004, 142: 131-157

[10] Tkachuk V V. When do connected spaces have nice connected preimages[J]? Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 3437-3445

[11] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice[J]. Fund Math, 1965, 57(1): 107-115

[12] Fedeli A, Donne A Le. On good connected preimages[J]. Topology Appl, 2002, 125: 489-496

[13] 林寿. 连通度量空间的映象 [J]. 数学年刊， 2005, 26(A): 345-350

[14] 黄琴. 序列连通空间 [J]. 数学研究， 2005, 38: 157-162

[15] Huang Q, Lin S. Notes on sequentially connected spaces[J]. Acta Math Hungar, 2006, 110: 159-164

[16] 刘川. 度量空间的 k 映射象 [J]. 数学杂志， 1994, 14(2): 233-236

[17] 李进金，李招文. 关于 k 映射 [J]. 数学杂志， 2000, 20(2): 204-206

[18] 葛英. 度量空间的序列商， k 映象 [J]. 数学杂志， 2004, 24(3): 275-279

[19] Lin S. Some problems on generalized metrizable spaces[A]. In: Pearl E ed, Open Problems in Topology 2[M]. Amsterdam, Elsevier Science B V, 2007

[20] Reed G M, Zenor P L. Metrization of Moore space and generalized manifolds[J]. Fund Math, 1976, 91: 203–210

[21] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings(in Russian)[J]. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1960, 8: 127–134

[22] Engelking R. General Topology[M]. Berlin, Heldermann Verlag, 1989

[23] Gruenhage G. Generalized metric spaces[A]. In: Kunen K, Vaughan J E eds, Hand-

book of Set-theoretic Topology[M]. Amsterdam, Elsevier Science Publishers B V, 1984, 423-501

[24] Boone J R. On k-quotient mappings[J]. Pacific J Math, 1974, 51(2): 369-377

[25] Gale D. Compact sets of functions and function rings[J]. Proc Amer Math Soc, 1950, 1(3): 303-308

[26] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京：科学出版社， 1995

[27] Nadler Jr S B. Continuum Theory: An Introduction[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1992

[28] Michael E A. $\aleph_0$-spaces[J]. J Math Mech, 1996, 15: 983–1002

[29] Li J J, Li K D. The sequence-covering compact images of paracompact locally compact spaces[J]. Northeast Math J, 2000, 16(4): 463-468

[30] Arhangel'skiĭ A V. Factor mappings of metric spaces(in Russian)[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1964, 155: 247-250

[31] Arhangel'skiĭ A V. On open and almost open mappings of topological spaces(in Russian)[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 147: 999-1002

[32] Gao K S. A note on M_1-spaces[J]. Pacific J Math, 1983, 108: 121-128

[33] Ceder J G. Some generalizations of metric spaces[J]. Pacific J Math, 1961, 11: 105-125

[34] Nyikos P J. Classic problems[A]. In: Pearl E ed, Problems from Topology Proceedings[M]. Toronta, Topology Atlas, 2003, 69-89

[35] Itō M. M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1[J]. Topology Appl, 1985, 19: 65-69

[36] Mizokami T. On closed subsets of M_1-spaces[J]. Topology Appl, 2004, 141: 197–206

[37] Nyikos P J. Problem section, classic problem IV[J]. Topology Proc, 1976, 1: 365

致 谢

本论文是我在导师林寿教授的精心指导下完成的. 三年来, 林老师不仅在学习上给我谆谆教诲, 而且在生活上也给我无私的关怀与帮助. 林老师的人格魅力深深地感染着我, 他为我今后的学习和生活树立了榜样.

感谢李进金教授和李克典教授对我的教育和培养. 在此谨向两位老师致以诚挚的谢意, 感谢您们对我的关心、指导与帮助.

也感谢我的同学, 感谢你们陪我度过三年美好的时光.