# 第六章　$C_p$理论初步

函数空间中最引人入胜是部分是 $C_p(X, \mathbb{R})$拓扑性质的研究. 这些内容简称为 $C_p$理论($C_p$-theory). 在第四、五章中关于函数空间理论的研究中已获得了大量 $C_p$理论的结果, 特别是通过$C_p(X)$的性质刻画底空间X的一些性质, 如证明了下述$C_p$理论中的一些最基本的对偶定理.

**定理 6.0.1**　对于完全正则的 $T_1$空间 X 下述基数等式成立:

(1) $w(C_p(X))=\chi(C_p(X))=|X|$ (定理 5.2.11 和定理 5.3.3);

(2) $nw(C_p(X))=nw(X)$ (定理 5.1.1);

(3) $\psi(C_p(X))=ww(C_p(X))=d(X)$ (定理 5.2.3 和推论 5.3.10);

(4) $d(C_p(X))=ww(X)$ (定理 5.1.6);

(5) $t(C_p(X))=\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}$ (推论 5.4.3);

(6) $c(C_p(X))=\omega$　(推论 5.1.8). ■

**推论 6.0.2**　设 X, Y 都是完全正则的$T_1$空间. 如果空间$C_p(X)$同胚于空间$C_p(Y)$, 那么

(1) $|X|=|Y|$;

(2) $nw(X)=nw(Y)$;

(3) $d(X)=d(Y)$;

(4) $ww(X)=ww(Y)$;

(5) $\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}=\sup\{L(Y^n) : n\in\mathbb{N}\}$. ■

性质 P 称为超拓扑性质(supertopological property), 如果拓扑空间 X 具有性质 P 且函数空间$C_p(X)$同胚于 $C_p(Y)$, 则拓扑空间 Y 也具有性质 P. 推论 6.0.2 说明: 基数, 网络权, 稠密度, 弱权等都是超拓扑性质.

下例说明一些熟知的拓扑性质可以不是超拓扑性质.

**例 6.0.3**　函数空间 $C_p(\mathbb{S}_1\times\mathbb{N})$, $C_p(S_\omega)$, $C_p(S_2)$是相互线性同胚的(Arhangel’skiĭ[1992]). ■

空间$\mathbb{S}_1\times\mathbb{N}$是局部紧的可分度量空间, 且有无限多个非孤立点. 然而, 空间$S_\omega$不是q空间, 不是强 Fréchet 空间, 且仅有一个非孤立点(例 3.1.8). 空间 $S_\omega$是 Fréchet 空间, 然而, 空间 $S_2$不是 Fréchet 空间(例 3.1.7). 所以例 6.0.3 说明: 局部紧性, 权, 特征, 可度量性, Čech 完全性, 第一可数性, 第二可数性, Fréchet 空间性质, 强 Fréchet 空间性质等都不是超拓扑性质.

上述定理及超拓扑性质都是基于集开拓扑的一般方法产生的, 难以全面反映$C_p$理论独有的性质. 本章继续第五章的讨论, 介绍$C_p$理论中较成熟的另外一些基数函数性质和Baire空间性质等.

对于非空集合 X, 积空间$\mathbb{R}^X$的拓扑可以通过投影函数方式(引理 1.1.11 前), 点开拓扑方式(定义 4.3.1)或一致结构方式(定理 4.4.2)产生. 对于 $f\in\mathbb{R}^X$, f 在$\mathbb{R}^X$中一致结构方式的基本开邻域形如$\hat{M}_\varepsilon(S)[f]=\{g\in\mathbb{R}^X$ : 对于每一 $x\in S$ 有$|f(x)-g(x)|<\varepsilon\}$, 其中 S 是 X 的非空有限子集且实数$\varepsilon>0$. 设 $S=\{x_1, x_2,\dots, x_n\}$, 记$\hat{M}_\varepsilon(S)[f]$为 W(f, S, $\varepsilon$)或 W(f, $x_1$, $x_2$,…, $x_n$, $\varepsilon$). 若 X 是拓扑空间且 $f\in C(X)$, W(f, S, $\varepsilon$)在 C(X)上的限制仍记为 W(f, S, $\varepsilon$).

本节作为介绍$C_p$理论的预备节, 主要扩展诱导函数和投影函数的部分内容.

首先, 继续介绍实值函数空间上诱导函数的一些相关结果. 在§4.5 诱导函数 f*是对连续函数 f 定义的. 若函数 $f:X\to Y$, 可同样定义诱导函数 $f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$为对于每一 $g\in\mathbb{R}^Y$有$f^*(g)=g\circ f$. 定义在 C(Y)或$\mathbb{R}^Y$上的诱导函数都记为 f*. 当$\mathbb{R}^X$赋予积空间拓扑时, $C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的子空间.

**引理 6.0.4** 若函数 $f:X\to Y$, 则 $f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$是连续的, 且当 f 是满函数时 f*是闭嵌入.

**证明** 对于每一 $g\in\mathbb{R}^Y$, 让 $h=f^*(g)$, 且 W(h, S, $\varepsilon$)是 h 在$\mathbb{R}^X$中的基本开邻域. 令 T=f(S), 则 W(g, T, $\varepsilon$)是 g 在$\mathbb{R}^Y$中的邻域且 $f^*(W(g, T, \varepsilon))\subset W(h, S, \varepsilon)$, 所以 f*是连续的.

设 Y=f(X)且 $g_1$和$g_2$是$\mathbb{R}^Y$是不同的元, 则存在$y\in Y$使得$g_1(y)\neq g_2(y)$. 取定 $x\in f^{-1}(y)$, 那么 $f^*(g_1)(x)=g_1(y)\neq g_2(y)=f^*(g_2)(x)$, 于是 $f^*(g_1)\neq f^*(g_2)$, 即 f*是单射. 再设 $g\in\mathbb{R}^Y$且

$h=f^*(g)$, 对于 h 在$\mathbb{R}^X$中的基本开邻域 $W(h, S, \varepsilon)$, $(f^*)^{-1}(W(h, S, \varepsilon)\bigcap f^*(\mathbb{R}^Y))\subset W(g, f(S), \varepsilon)$, 所以$(f^*)^{-1}:f^*(\mathbb{R}^Y)\to\mathbb{R}^Y$是连续的. 另一方面, $f^*(\mathbb{R}^Y)=\{h\in\mathbb{R}^X$ : 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $h(x_1)=h(x_2)\}$是$\mathbb{R}^X$的闭子集, 故 $f^*$是闭嵌入. ▊

**定理 6.0.5** (Arhangel'skiĭ[1992])设 Y 是完全正则的 $T_1$空间, 且 $f:X\to Y$ 和 $g:X\to Z$ 都是满射, 则 $f^*(C(Y))\subset g^*(C(Z))$当且仅当存在连续函数 $h:Z\to Y$ 使得 $f=h\circ g$.

**证明** 充分性. 设存在连续函数 $h:Z\to Y$ 使得 $f=h\circ g$. 若 $s\in f^*(C(Y))$, 存在 $t\in C(Y)$使得 $s=t\circ f$, 那么 $h^*(t)=t\circ h\in C(Z)$. 由于 $g^*(h^*(t))=h^*(t)(g)=t\circ h\circ g=t\circ f=s$, 即 $s\in g^*(C(Z))$.

必要性. 设 $f^*(C(Y))\subset g^*(C(Z))$. 先证明断言: 如果 $u\in X$, $A\subset X$ 且 $g(u)\in\overline{g(A)}$, 则 $f(u)\in\overline{f(A)}$. 若不然, 则存在 $q\in C(Y)$使得 $q(f(u))=1$ 且 $q(f(A))=\{0\}$. 于是 $f^*(q)(u)=1$ 且 $f^*(q)(A)=\{0\}$. 由假设, 存在 $p\in C(Z)$使得 $g^*(p)=f^*(q)$. 从而 $p(g(u))=g^*(p)(u)=1$ 且 $p(g(A))=g^*(p)(A)=\{0\}$, 这与 p 的连续性相矛盾.

下面证明对于每一 $x\in X$ 有 $g^{-1}g(x)\subset f^{-1}f(x)$. 设 $u\in g^{-1}g(x)$. 让 $A=\{x\}$, 则 $g(u)=g(x)\in g(A)$. 由所证断言, $f(u)\in\overline{f(A)}=\overline{f(\{x\})}=\{f(x)\}$, 即 $f(u)=f(x)$, 所以 $g^{-1}g(x)\subset f^{-1}f(x)$. 对于每一 $z\in Z$, 置 $h(z)=f(g^{-1}(z))$, 则函数 $h:Z\to Y$ 是良好定义的. 显然, $h\circ g=f\circ g^{-1}\circ g=f$. 下面再证明 h 是连续的.

设$z\in\overline{B}\subset Z$. 让 $A=g^{-1}(B)$且取$u\in g^{-1}(z)$, 那么$g(u)=z\in\overline{B}=\overline{g(A)}$, 于是$f(u)\in\overline{f(A)}$, 即 $h(g(u))\in\overline{h(g(A))}$. 但是 $g(A)=B$ 且 $g(u)=z$, 因此 $h(z)\in\overline{h(B)}$, 故 $h(\overline{B})\subset\overline{h(B)}$. 所以 h 是连续的. ▊

空间 X 称为 Urysohn 空间(Urysohn space), 如果对于 X 中不同的两点 x, y 存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$使得 $f(x)=0$ 且 $f(y)=1$. 显然, 完全正则的 $T_1$空间是 Urysohn 空间.

**推论 6.0.6** 设 Y 是完全正则的 $T_1$空间且 $f:X\to Y$ 是满射, 则

(1) f 是连续的当且仅当 $f^*(C(Y))\subset C(X)$;

(2) f 是连续的单射当且仅当 X 是 Urysohn 空间且 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的稠密子集;

(3) f 是同胚的当且仅当 X 是完全正则的 $T_1$空间且 $f^*(C(Y))=C(X)$.

**证明** 设 $g:X\to X$ 是恒等函数, 由定理 6.0.5 可得(1). 这时无须设 Y 是 $T_1$ 空间.

(2) 设 f 是连续的单射. 易验证, X 是 Urysohn 空间. 让 $h\in C(X)$, 且$[S, V]$是 h 在 $C_p(X)$ 中的基本开邻域, 由于 f 是单射, 存在 $g\in C_p(Y)$使得对于每一 $x\in S$ 有 $g(f(x))=h(x)$, 于是 $f^*(g)\in[S, V]$, 从而 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的稠密子集. 反之, 设 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的稠密子集. 由(1), f 是连续的. 再由定理 4.5.6(2), f 是单射.

(3) 设 f 是同胚的, 显然 X 是完全正则的 $T_1$空间且 $f^*(C(Y))=C(X)$. 反之, 设 $f^*(C(Y))=C(X)$, 由(2), f 是连续的单射. 若 f 不是同胚的, 则存在 X 的闭集 F 使得 f(F)不是 Y 的闭集. 取 $y\in \overline{f(F)}\setminus f(F)$, 和 $p\in C(X)$使得 $p(F)=\{0\}$, $p(x)=1$, 其中取定 $x\in f^{-1}(y)$. 如果函数 $q:Y\to\mathbb{R}$使得 $f^*(q)=p$, 则 $q(y)=f^*(q)(x)=1$ 且 $q(f(F))=f^*(q)(F)=\{0\}$, 而 $y\in \overline{f(F)}$ 说明 q 不是连续的, 因而 $p\notin f^*(C(Y))$, 矛盾. ■

设 $f:X\to Y$ 是满射, 其中 X 是拓扑空间. Y 上的使得 f 是连续的最精的完全正则拓扑称为 Y 上(由 f 诱导)的 R 商拓扑(R-quotient topology)或实商拓扑(real quotient topology). 从空间 X 到空间 Y 上的函数 f 称为 R 商映射(R-quotient mapping)或实商映射(real quotient mapping), 如果 Y 上的拓扑恰是由 f 诱导的 R 商拓扑, 即 Y 是完全正则空间且 Y 的子集 U 是 Y 的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$是 X 的开集(Arhangel'skiĭ[1985]).

显然, 若 $f:X\to Y$ 是商映射且 Y 是完全正则空间, 则 f 是 R 商映射. R 商映射未必是商映射. 考虑从完全正则空间 X 到空间 Y 上的商映射 f, 其中 Y 不是完全正则空间, 但是 Y 中的任意两点可由连续函数分离(如, 非完全正则的 Urysohn 空间). 那么 f 关于 Y 上由 f 诱导的 Y 的 R 商拓扑是 R 商映射, 但是 f 不是商映射.

推论 4.5.8 和定理 4.5.10 表明当 $f:X\to Y$ 是商映射时诱导函数 $f^*:C_p(Y)\to C_p(X)$是闭嵌入. R 商映射刻画了诱导函数的闭嵌入性质.

**定理 6.0.7** 设 $f:X\to Y$ 是满函数且 Y 是完全正则空间, 则下述条件相互等价:

(1) f 是 R 商映射;

(2) $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}$;

(3) $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集;

(4) $f^*$是闭嵌入.

**证明** (1)$\Rightarrow$(2). 设 $f:X\to Y$ 是 R 商映射. 若函数 $h:Y\to\mathbb{R}$使得 $h\circ f$ 是连续的, 让 W 是$\mathbb{R}$的开集, 那么 $f^{-1}(h^{-1}(W))=(h\circ f)^{-1}(W)$是 X 的开集. 因为 f 是 R 商映射, 所以 $h^{-1}(W)$是 Y 的开集, 从而 h 是连续的. 故 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}$.

(2)$\Rightarrow$(4). 由推论 4.5.8(1), $f^*:C_p(Y)\to C_p(X)$是嵌入. 下面证明 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. 让 $g\in C(X)\setminus f^*(C(Y))$. 先证明存在 x, $z\in X$ 使得 $g(x)\neq g(z)$且 $f(x)=f(z)$. 若不然, 则由定理 4.5.10 的证明, 对于每一 $y\in Y$, $g(f^{-1}(y))$是单点集. 定义 $h:Y\to\mathbb{R}$使得对于每一 $y\in Y$, $h(y)=g(f^{-1}(y))$. 因为 $g=h\circ f\in C(X)$, 由(2), 所以 $h\in C(Y)$, 于是 $g\in f^*(C(Y))$, 矛盾. 设 U 和 V 是$\mathbb{R}$中 g(x)和 g(z)的不相交邻域, 那么 $g\in[x, U]\cap[z, V]$, 而$[x, U]\cap[z, V]$是 $C_p(X)$的开集. 如果 $q\in[x, U]\cap[z, V]$, 那么 $q(x)\neq q(z)$. 而 $f(x)=f(z)$, 于是 $q\notin f^*(C(Y))$. 因此$[x, U]\cap[z, V]\cap f^*(C(Y))=\varnothing$. 故 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的闭集.

(4)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. 由于 $C_p(Y)$是积空间$\mathbb{R}^Y$的稠密子集(定理 4.3.6), 又由于 $f^*:\mathbb{R}^Y\to\mathbb{R}^X$是嵌入(引理 6.0.4), 所以 $f^*(C_p(Y))$是 $f^*(\mathbb{R}^Y)$的稠密子集, 于是在 $C_p(X)$中 $f^*(C_p(Y))$是 $C(X)\cap f^*(\mathbb{R}^Y)$的稠密子集. 因为 $f^*(C_p(Y))$是 $C_p(X)$的闭集, 则 $f^*(C(Y))=C(X)\cap f^*(\mathbb{R}^Y)$, 从而 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : f^*(h)\in C(X)\}$.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 $C(Y)=\{h\in\mathbb{R}^Y : h\circ f\in C(X)\}=\{h\in\mathbb{R}^Y : f^*(h)\in C(X)\}$. 由引理 6.0.4, 则 $f^*(C(Y))\subset C(X)$, 再由推论 6.0.6, f 是连续的. 另一方面, 设 U 是空间 Y 的子集且 $f^{-1}(U)$是 X 的开集. 让 $\tilde{Y}$ 是集合 Y 赋予由 f 诱导的 R 商拓扑且让 $id:Y\to\tilde{Y}$ 是恒等函数, 则 $id\circ f$ 是 R 商映射, 且$(id\circ f)^{-1}(id(U))=f^{-1}(U)$, 所以 id(U)是 $\tilde{Y}$ 的开集. 对于每一 $y\in U$, 存在连续函数 $g:\tilde{Y}\to\mathbb{I}$使得 $g(id(y))=0$ 且 $g(\tilde{Y}\setminus id(U))\subset\{1\}$. 由于 $g\circ id\circ f:X\to\mathbb{I}$连续, 于是 $g\circ id$ 连续. 让 $V=(g\circ id)^{-1}([0, 1/2))$, 则 V 是 Y 的开集且 $y\in V\subset U$. 故 U 是 Y 的开集, 所以 f 是 R 商映射. ∎

由此, 对于完全正则空间 Y 及满函数 $f:X\to Y$, f 是 R 商映射当且仅当对于实值函数 $h:Y\to\mathbb{R}$, $h\circ f$ 的连续性导出 h 的连续性. 对照引理 4.5.9, 命名“R 商映射”是自然的.

其次, 继续介绍§4.6 中讨论过的投影函数的进一步性质. 对于积空间$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 及 A 的非空子集 B, 投影函数 $p_B:\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in B}X_\alpha$ 定义为对于每一 $x=(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 和 $\alpha\in B$ 有 $p_\alpha(p_B(x))=x_\alpha$. 显然, 投影函数是开映射. 现在, 对于积空间$\mathbb{R}^X$及空间 X 的非空子集Y, 投影函数 $p_Y:\mathbb{R}^X\to\mathbb{R}^Y$定义为对于每一$f\in\mathbb{R}^X$, $p_Y(f)=f_{|Y}$, 这时投影函数也称为限制函数(restriction function). 定义在子空间 $C_p(X)$上的投影函数仍记为 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y)$. 1988年 M. D. Lasyth(М. Д. Лахути)[1988]记$C_p(Y)$的子空间$p_Y(C_p(X))$为$C_p(Y|X)$, 称为相对函数空间(relative function space). 下面是关于投影函数及相对函数空间的一些基本性质.

**定理 6.0.8** 设 Y 是完全正则空间 X 的子空间, 则

(1) $p_Y$连续且$\overline{C_p(Y|X)}=C_p(Y)$;

(2) 若 Y 是 X 的闭子空间, 则 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y|X)$是开映射;

(3) 若 Y 是 X 的紧子空间, 则 $C_p(Y|X)=C_p(Y)$;

(4) 若 X 是正规空间且 Y 是 X 的闭子空间, 则 $C_p(Y|X)=C_p(Y)$;

(5) 若 Y 是 X 的稠密子空间, 则 $p_Y:C_p(X)\to C_p(Y|X)$是单射.

**证明** (1) 显然, $p_Y$是连续的. 对于任意的 $g\in C_p(Y)$, 设 $W(g, S, \varepsilon)$是 g 在 $C_p(Y)$中的基本开邻域, 由 X 的完全正则性, 存在 $f\in C_p(X)$使得 $f_{|S}=g_{|S}$, 那么$p_Y(f)\in W(g, S, \varepsilon)$, 所以$\overline{p_Y(C_p(X))}=C_p(Y)$.

(2) 对于 $C_p(X)$的基本开集 $W(f, F, \varepsilon)$, 设 $S=F\cap Y$, $T=F\setminus Y$. 显然, $p_Y(W(f, F, \varepsilon))\subset W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$. 设 $g\in W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$, 选取$g_1\in C_p(X)$使得$p_Y(g_1)=g$. 由 X 的完全正则性, 存在$h\in C_p(X)$使得$h(Y)=\{0\}$且当$t\in T$时有$h(t)=f(t)-g_1(t)$. 让 $q=h+g_1$, 则 $q\in W(f, F, \varepsilon)$且$p_Y(q)=g$. 故$p_Y(W(f, F, \varepsilon))=W(p_Y(f), S, \varepsilon)\cap p_Y(C_p(X))$.

(3)和(4) 如果函数 $g:Y\to\mathbb{R}$连续, 则存在连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$使得 $f_{|Y}=g$, 这表明$C_p(Y|X)=C_p(Y)$.

(5) 设 $f_1, f_2 \in C_p(X)$, 由于 Y 是 X 的稠密子集, 若 $f_{1|Y}=f_{2|Y}$, 则 $f_1=f_2$, 于是 $p_Y$ 是单射. ∎

若未特别说明, **本章以下各节所论空间均指满足完全正则且 $\mathbf{T}_1$ 分离性质的拓扑空间.**

## §6.1 Monolithic 空间与 stable 空间

本节的目的是介绍 A. Arhangel'skiĭ[1982]引入的 monolithic 性质与 stable 性质, 它们是 $C_p$ 理论中重要的一组对偶性质. 作为预备, 先介绍有趣的因子引理(factorization lemma).

设函数 $f:A\to Y$. 对于 $x\in A$, A 的开子集族 $\mathscr{U}$ 称为 f 在 x 的 $\pi$ 基($\pi$-base), 若对于 f(x)在 Y 中的任一开邻域 W 有 $x\in\overline{\bigcup\{U\in\mathscr{U}: f(U)\subset W\}}$. 显然, 若函数 f 在点 $x\in A$ 连续且 $\mathscr{B}$ 是 x 在 A 的局部基, 则 $\mathscr{B}$ 是 f 在 x 的 $\pi$ 基.

**定理 6.1.1** (因子引理, Arhangel'skiĭ[1982, 1984])设 A 是积空间 $\prod_{\alpha\in M}X_\alpha$ 的稠密子集, 其中每一 $X_\alpha$ 是可分度量空间. 若函数 $f:A\to Y$ 连续且 Y 是第一可数的正则 $T_1$ 空间, 则存在 M 的可数子集 L 和连续函数 $\varphi: p_L(A)\to Y$ 使得 $f=\varphi\circ p_L$.

**证明** 令 $X=\prod_{\alpha\in M}X_\alpha$. 首先注意到, X 具有可数链条件(推论 5.0.4), 于是 X 的稠密子集 A 也具有可数链条件(练习 5.1.2), 从而 A 的开子集仍具有可数链条件. 设 $\mathscr{B}$ 是积空间 X 的全体非空基本开集组成的 X 的基.

(1.1) 对于每一 $x\in A$, 存在 $\mathscr{B}$ 的可数子集 $\mathscr{U}_x$ 使得 $\mathscr{U}_{x|A}$ 是 f 在 x 的 $\pi$ 基.

由于 Y 是第一可数空间, 设 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 f(x)在 Y 中的可数局部基. 让 $\mathscr{H}=\{f^{-1}(W_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 记 $\{B\in\mathscr{B}: B\cap A\subset f^{-1}(W_n)\}$ 的一个极大互不相交集族为 $\mathscr{M}_n$, 则 $\mathscr{M}_n$ 是可数的. 由于 $\mathscr{B}_{|A}$ 是 A 的基, 所以 $f^{-1}(W_n)\subset \mathrm{cl}_A(\bigcup\mathscr{M}_{n|A})$. 让 $\mathscr{U}_x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{M}_n$, 则 $\mathscr{U}_x$ 可数且 $\mathscr{U}_{x|A}$ 是 f 在 x 的可数 $\pi$ 基. 事实上, 设 W 是 f(x)在 Y 中的邻域且 G 是 x 在 A 中的邻域, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $W_n\subset W$, 于是 $x\in f^{-1}(W_n)\cap G$, 从而存在 $B\in\mathscr{M}_n$ 使得 $G\cap B\cap A\neq\varnothing$, 因此 $f(B\cap A)\subset f(f^{-1}(W_n))\subset W_n\subset W$, 所以 $x\in \mathrm{cl}_A(\bigcup\{B\cap A: B\in\mathscr{U}_x, f(B\cap A)\subset W\})$. 故 $\mathscr{U}_{x|A}$ 是 f 在 x 的 $\pi$ 基.

对于 X 的基本开集 $U=\prod_{\alpha\in M}U_\alpha$，记 $K_U=\{\alpha\in M: U_\alpha\neq X_\alpha\}$，则 $K_U$ 是 M 的有限子集. 对于每一 $x\in A$，让 $L_x=\bigcup\{K_U : U\in\mathscr{U}_x\}$，则 $L_x$ 是 M 的可数子集. 下面归纳定义 M 的递增的可数集列 $\mathscr{L}=\{L_i\}$ 和 A 的递增的可数集列 $\mathscr{A}=\{A_i\}$ 如下.

让 $L_1=\{\varnothing\}$, $A_1=\{x_1\}$，其中 $x_1\in A$. 设对于 $i\in\mathbb{N}$ 已分别定义了 M 和 A 的可数集合 $L_i$ 和 $A_i$. 令 $L_{i+1}=L_i\bigcup(\bigcup\{L_x : x\in A_i\})$. 由于具有可数基的空间 $\prod_{\alpha\in L_{i+1}}X_\alpha$ 的子空间 $p_{L_{i+1}}(A)$ 是可分的，所以存在 A 的可数子集 $S_{i+1}$ 使得 $p_{L_{i+1}}(S_{i+1})$ 是 $p_{L_{i+1}}(A)$ 的稠密子集，置 $A_{i+1}=A_i\bigcup S_{i+1}$. 则 $L_{i+1}$ 和 $A_{i+1}$ 是所需要的可数子集.

让 $L=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}L_i$, $A^*=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$，则 L 和 A* 分别是 M 和 A 的可数子集且

(1.2) 若 F 是 L 的有限子集, 则存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $F\subset L_i$;

(1.3) 若 $x\in A^*$, W 是 f(x) 在 Y 中的邻域，则 $x\in\overline{\bigcup\{B\in\mathscr{B}: f(B\bigcap A)\subset W 且 K_B\subset L\}}$ (关于 X 的闭包).

事实上，对于每一 $U\in\mathscr{U}_x$，$K_U\subset L_x\subset L$，由(1.1)有 $x\in cl_A(\bigcup\{U\bigcap A : U\in\mathscr{U}_x, f(U\bigcap A)\subset W\})\subset\overline{\bigcup\{B\in\mathscr{B}: f(B\bigcap A)\subset W 且 K_B\subset L\}}$.

(1.4) $p_L(A^*)$ 是 $p_L(A)$ 的稠密子集.

设 $z\in A$, U 是 z 在 X 中的基本开集且 $K_U\subset L$，下证 $U\bigcap A^*\neq\varnothing$. 因为 $K_U$ 是 L 的有限子集，存在自然数 $m\geq 2$ 使得 $K_U\subset L_m$，则 $p_{L_m}(S_m)$ 是 $p_{L_m}(A)$ 的稠密子集，由于 $S_m\subset A_m\subset A^*$，于是 $U\bigcap A^*\supset U\bigcap S_m\neq\varnothing$，所以 $p_L(A^*)$ 是 $p_L(A)$ 的稠密子集.

从而, $A\subset p_L^{-1}(p_L(A))\subset p_L^{-1}(\overline{p_L(A^*)})$，于是 $A=p_L^{-1}(\overline{p_L(A^*)})\bigcap A$.

(1.5) 如果 X 的基本开集 $U=\prod_{\alpha\in M}U_\alpha$ 和 $V=\prod_{\alpha\in M}V_\alpha$ 满足对于每一 $\alpha\in L$ 有 $U_\alpha=V_\alpha$ 且 $p_L(U)\bigcap p_L(A)\neq\varnothing$，则

(1.5.1) $\overline{f(U\bigcap A)}\bigcap\overline{f(V\bigcap A)}\neq\varnothing$;

(1.5.2) $f(V\bigcap A)\subset\overline{f(U\bigcap A)}$.

事实上，因为 $p_L(U)\bigcap p_L(A)\neq\varnothing$ 且 $p_L(U)$是 $p_L(X)$的开集，则 $p_L(U)\bigcap p_L(A^*)\neq\varnothing$，所以存在 $z\in A^*$使得对于每一$\alpha\in L$ 有 $p_\alpha(z)\in U_\alpha$．如果 $f(z)\notin\overline{f(U\bigcap A)}\bigcap\overline{f(V\bigcap A)}$，不妨设 $f(z)\notin\overline{f(U\bigcap A)}$，存在 $f(z)$在 Y 中的邻域 W 使得 $W\bigcap f(U\bigcap A)=\varnothing$．令 $\mathcal{G}=\{B\in\mathcal{B}:f(B\bigcap A)\subset W$ 且 $K_B\subset L\}$，由(1.3), $z\in\overline{\bigcup\mathcal{G}}$，那么 $p_L(z)\in\overline{p_L(\bigcup\mathcal{G})}=\overline{\bigcup\{p_L(G):G\in\mathcal{G}\}}$，于是存在$G\in\mathcal{G}$使得 $p_L(U)\bigcap p_L(G)\neq\varnothing$．因为$K_G\subset L$，所以 $U\bigcap G\neq\varnothing$，于是 $U\bigcap G\bigcap A\neq\varnothing$ 且 $\varnothing=W\bigcap f(U\bigcap A)\supset f(G\bigcap A)\bigcap f(U\bigcap A)\supset f(U\bigcap G\bigcap A)\neq\varnothing$，矛盾．故(1.5.1)成立.

若存在 $y\in f(V\bigcap A)\setminus\overline{f(U\bigcap A)}$，由 Y 的正则性，存在 y 在 Y 中的邻域 W 使得 $\overline{f(U\bigcap A)}\bigcap\overline{W}=\varnothing$，取定 $x\in V\bigcap A$ 使得 $f(x)=y$, 由 f 的连续性，存在 x 在 X 中的基本开邻域 V’使得$f(V'\bigcap A)\subset W$, 不妨设$p_L(V')\subset p_L(V)$. 再取 X 中的基本开集 U’使得 $p_L(U')=p_L(V')$, $p_{M\setminus L}(U')=p_{M\setminus L}(U)$, 那么 $\overline{f(U'\bigcap A)}\bigcap\overline{f(V'\bigcap A)}\subset\overline{f(U\bigcap A)}\bigcap\overline{W}=\varnothing$．然而，由(1.5.1)知，$\overline{f(U'\bigcap A)}\bigcap\overline{f(V'\bigcap A)}\neq\varnothing$，矛盾. 这说明(1.5.2)成立.

(1.6) 若 $x, x'\in A$ 且 $p_L(x)=p_L(x')$, 则 $f(x)=f(x')$.

事实上，设 W 和 W’分别是 f(x), f(x’)在 Y 中的任一邻域，存在 X 中分别含有 x 和 x’的基本开集 U 和 U’使得$\overline{f(U\bigcap A)}\subset W$ 且$\overline{f(U'\bigcap A)}\subset W'$．由于 $p_L(x)=p_L(x')$, 不妨设 $p_L(U)=p_L(U')$, 而 $x\in U\bigcap A$, 从(1.5.1)知$\overline{f(U\bigcap A)}\bigcap\overline{f(U'\bigcap A)}\neq\varnothing$，所以 $W\bigcap W'\neq\varnothing$．而 Y 是 $T_2$ 空间，故 $f(x)=f(x')$.

定义函数$\varphi:p_L(A)\rightarrow Y$ 如下．对于每一$q\in p_L(A)$, 由(1.6), $f(p_L^{-1}(q)\bigcap A)$是单点集，定义 $\varphi(q)=f(p_L^{-1}(q)\bigcap A)$. 显然, $f=\varphi\circ p_{L|A}$.

(1.7) $\varphi:p_L(A)\rightarrow Y$ 是连续的.

对于每一$q\in p_L(A)$, 记 $y=\varphi(q)$, 取定 $x\in A$ 使得$p_L(x)=q$, 则 $f(x)=y$. 让 W 是 y 在 Y 中的邻域，存在 y 在 Y 中的邻域 V 和 x 在 X 中的基本开邻域 U 使得 $\overline{V}\subset W$ 且 $f(U\bigcap A)\subset V$. 再让 U’是 X 的基本开集满足 $p_L(U')=p_L(U)$, $p_{M\setminus L}(U')=p_{M\setminus L}(X)$, 因为 $x\in U\bigcap A$, 由(1.5.2), $f(U'\bigcap A)\subset\overline{f(U\bigcap A)}\subset\overline{V}\subset W$. 由 $\varphi$ 的定义，

$\varphi(p_L(U)\cap p_L(A))=f(p_L^{-1}(p_L(U)\cap p_L(A))\cap A)\subset f(p_L^{-1}(p_L(U'))\cap A)=f(U'\cap A)\subset W$，而 $q=p_L(x)\in p_L(U)$，所以 $p_L(U)\cap p_L(A)$是 q 在 $p_L(A)$中的邻域，故$\varphi$ 是连续的. ▮

利用Stone-Weierstrass 定理证明的例 4.6.5 是因子引理的推论. 下面再介绍因子引理的几个有趣推论.

**推论 6.1.2** 设 X 是 Tychonoff 方体$\mathbb{I}^A$的稠密子空间，则 X 是伪紧空间当且仅当对于 A 的每一可数子集 B 有 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$.

**证明** 首先，设对于 A 的每一可数子集 B 有 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$. 对于每一 $f\in C_p(X)$，由因子引理，存在 A 的可数子集 B 和$\varphi\in C_p(\mathbb{I}^B)$使得 $f=\varphi\circ p_B$. 因为$\mathbb{I}^B$是紧空间，$f(X)=\varphi(\mathbb{I}^B)$是$\mathbb{R}$的有界子集. 故 X 是伪紧空间.

反之，设 X 是伪紧空间且 B 是 A 的可数子集. 由于 X 是$\mathbb{I}^A$的稠密子集，于是伪紧空间 $p_B(X)$是$\mathbb{I}^B$的稠密子集，而$\mathbb{I}^B$是度量空间，所以 $p_B(X)$是紧空间(定理 2.2.9)，因此 $p_B(X)$是$\mathbb{I}^B$的闭子集，故 $p_B(X)=\mathbb{I}^B$. ▮

**推论 6.1.3** 积空间$\mathbb{N}^{\omega_1}$不是正规空间.

**证明** 对于 i=1, 2，令 $F_i=\{x=(x_\alpha)\in\mathbb{N}^{\omega_1}$：对于每一 $n\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$有$|\{\alpha<\omega_1$：$x_\alpha=n\}|\le 1\}$，那么 $F_1, F_2$是$\mathbb{N}^{\omega_1}$中不相交的闭集. 如果$\mathbb{N}^{\omega_1}$是正规空间，存在$f\in C(\mathbb{N}^{\omega_1})$使得 $f(F_i)=\{i\}$. 由因子引理，存在$\omega_1$的可数子集 $L=\{\alpha_n$：$n\in\mathbb{N}\}$和连续函数$\varphi:p_L(C(\mathbb{N}^{\omega_1}))\to\mathbb{R}$使得 $f=\varphi\circ p_L$. 依下述方式选取$\mathbb{N}^{\omega_1}$中的点 y 和 z: 若$\alpha=\alpha_n$，则 $y_\alpha=z_\alpha=n$; 若$\alpha\in\omega_1\setminus L$，则 $y_\alpha=1$ 且 $z_\alpha=2$. 那么 $y\in F_1$，$z\in F_2$ 且 $p_L(y)=p_L(z)$，于是 $1=f(y)=\varphi\circ p_L(y)=\varphi\circ p_L(z)=f(z)=2$，矛盾. 故积空间$\mathbb{N}^{\omega_1}$不是正规空间. ▮

对于空间X，总有$d(X)\le nw(X)$和$ww(X)\le nw(X)$. 这两个基数不等式中不等号可能成立，如对于 Sorgenfrey 直线 S(例 5.4.4)，$d(S)=ww(S)=\aleph_0<nw(S)$. A. V. Arhangel'skiĭ 定义的 monolithic 性质和 stable 性质分别反映了空间的每一子空间的稠密度与网络权相等，空间的每一连续象的弱权等于网络权这些事实.

对于无限基数$\lambda$，空间 X 称为$\lambda$-monolithic，如果对于 X 的每一基数不超过$\lambda$的子集A

有 $nw(\overline{A})\le\lambda$. 特别地, X 称为 $\aleph_0$-monolithic 空间, 如果 X 的每一可数子集的闭包具有可数网络. X 称为 monolithic 空间(monolithic space), 如果对于每一无限基数 $\lambda$, X 是 $\lambda$-monolithic 空间, 即对于 X 的每一子空间 Y 有 d(Y)=nw(Y).

显然, 度量空间, cosmic 空间都是 monolithic 空间(引理 5.1.4). 易验证, $\lambda$-monolithic 性质是遗传性质(练习 6.1.1).

对于无限基数 $\lambda$, 空间 X 称为 $\lambda$-stable, 如果 Y 是空间 X 的连续象且 $ww(Y)\le\lambda$, 则 $nw(Y)\le\lambda$. X 称为 stable 空间(stable space), 如果对于每一无限基数 $\lambda$, X 是 $\lambda$-stable 空间, 即对于 X 的每一连续象 Y 有 ww(Y)=nw(Y).

显然, 紧空间, cosmic 空间都是 stable 空间. 但是, monolithic 空间与 stable 空间是互不蕴含的. 一方面, 度量空间(monolithic 空间)未必是 stable 空间. 如, 让 M 是基数为 $2^{\omega}$ (连续统基数)的离散度量空间, 则 $nw(M)=2^{\omega}$. 由引理 5.3.8(3), $ww(M)=\aleph_0$. 故 M 不是 $\aleph_0$-stable 空间. 另一方面, 紧空间(stable 空间)未必是 monolithic 空间. 如, 由 Hewitt-Marczewski-Pondiczery 定理(引理 5.0.3), Tychonoff 方体 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是可分空间, 若 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是 $\aleph_0$-monolithic 空间, 则紧空间 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 是 cosmic 空间, 于是 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 具有可数基(定理 2.3.7), 但是 $w(\mathbb{I}^{\omega_1})=\aleph_1$ (练习 5.1.1), 矛盾. 故 $\mathbb{I}^{\omega_1}$ 不是 $\aleph_0$-monolithic 空间.

**引理 6.1.4** (1) 映射保持 $\lambda$-stable 性质;

(2) $\lambda$-stable 性质是关于开闭子空间遗传的.

**证明** 从 $\lambda$-stable 空间的定义可直接验证(1)(练习 6.1.2). (2) 设 X 是 $\lambda$-stable 空间, Y 是 X 的非空的开闭子空间. 取定 $y_0\in Y$, 定义 $f:X\to Y$ 使得 $f_{|Y}$ 是恒等函数且 $f(X\setminus Y)\subset\{y_0\}$, 则 f 是连续的满射, 由(1), Y 是 $\lambda$-stable 空间. ■

下面两个定理说明在 $C_p$ 理论中 $\lambda$-monolithic 性质与 $\lambda$-stable 性质是对偶性质.

**定理 6.1.5** (Arhangel'skiǐ[1982]) $C_p(X)$ 是 $\lambda$-monolithic 空间当且仅当 X 是 $\lambda$-stable 空间.

**证明** 必要性. 设 $C_p(X)$ 是 $\lambda$-monolithic 空间. 如果 Y 是空间 X 的连续象且 $ww(Y)\le\lambda$, 由推论 4.5.8(1), $C_p(Y)$ 可嵌入 $C_p(X)$, 于是 $C_p(Y)$ 是 $\lambda$-monolithic 空间. 又由定理 6.0.1, $d(C_p(Y))=ww(Y)\le\lambda$ 且 $nw(C_p(Y))=nw(Y)$, 所以 $nw(Y)\le\lambda$. 故 X 是 $\lambda$-stable 空间.

充分性. 设X是$\lambda$-stable空间. 若$C_p(X)$的无限子空间M的基数不超过$\lambda$, 定义对角线函数 $f=\Delta_M:X\to\mathbb{R}^M$, 即对于每一$x\in X$和$g\in M$有$p_g f(x)=g(x)$, 则f是连续的. 让$Y=f(X)$, 则$w(Y)\le|M|\le\lambda$(引理5.0.1). 让$\tilde{Y}$是集合Y赋予由f诱导的R商拓扑, id: $\tilde{Y}\to Y$是恒等函数. 若U是空间Y的开集, 那么$f^{-1}(U)$是X的开集, 于是$(id)^{-1}(U)$是$\tilde{Y}$的开集, 故id是连续的双射, 从而 $ww(\tilde{Y})\le w(Y)\le\lambda$. 因为 X 是$\lambda$-stable 空间且$\tilde{Y}$是 X 的连续象, 所以$nw(\tilde{Y})\le\lambda$, 因此$nw(C_p(\tilde{Y}))=nw(\tilde{Y})\le\lambda$.

令$\tilde{f}=i^{-1}\circ f:X\to\tilde{Y}$, 则$\tilde{f}$是R商映射, 由定理6.0.7, 所以$C_p(\tilde{Y})$同胚于$C_p(X)$的闭子空间 $F=\{h\circ\tilde{f} : h\in C_p(\tilde{Y})\}$. 设 $g\in M$, 则函数 $p_g\circ id:\tilde{Y}\to\mathbb{R}$是连续的, 于是$p_g\circ id\in C_p(\tilde{Y})$, 那么 $g=p_g\circ f=p_g\circ id\circ\tilde{f}\in F$, 即 $M\subset F$. 因而$\overline{M}$(关于空间 $C_p(X)$的闭包)$\subset\overline{F}=F$, 从而$nw(\overline{M})\le nw(F)=nw(C_p(\tilde{Y}))\le\lambda$. 故$C_p(X)$是$\lambda$-monolithic空间. ■

**定理 6.1.6** (Arhangel'skiĭ[1982])$C_p(X)$是$\lambda$-stable空间当且仅当X是$\lambda$-monolithic空间.

**证明** 必要性. 设$C_p(X)$是$\lambda$-stable空间, 由定理6.1.5, $C_pC_p(X)$是$\lambda$-monolithic空间, 再由对角线引理(定理4.5.2), X可嵌入$C_pC_p(X)$, 于是X是$\lambda$-monolithic空间.

充分性. 设 M 是 $C_pC_p(X)$的基数不超过$\lambda$的子空间. 对于每一 $f\in M$, 因为 $C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集且 $f:C_p(X)\to\mathbb{R}$连续, 由因子引理, 存在 X 的可数子集 $B_f$和连续函数$\varphi_f:p_{B_f}(C_p(X))\to\mathbb{R}$使得$f=\varphi_f\circ p_{B_f}$, 那么$|B_f|\le\lambda$, 且若$g_1,g_2\in C_p(X)$满足$g_{1|B_f}=g_{2|B_f}$, 则$f(g_1)=f(g_2)$. 让$A=\bigcup\{B_f : f\in M\}$, $F=\overline{A}$, 则$|A|\le\lambda$. 因为X是$\lambda$-monolithic空间, 所以$nw(F)\le\lambda$, 于是$nw(C_p(F))=nw(F)\le\lambda$.

考虑投影函数$p_F:C_p(X)\to C_p(F)$, 即对于每一$g\in C_p(X)$有$p_F(g)=g_{|F}$. 令$Z=C_p(F|X)$, 则 $nw(C_p(Z))=nw(Z)\le nw(C_p(F))\le\lambda$. 因为 F 是 X 的闭子空间, 由定理 6.0.8(2), $p_F:C_p(X)\to Z$是开映射. 对于每一$f\in M$, 由A的定义, 存在函数$h_f:Z\to\mathbb{R}$使得$h_f\circ p_F=f$.

因为$p_F$是 R 商映射，由定理 6.0.7, $h_f$是连续的，即 $h_f \in C_p(Z)$. 令 $H=\{h\circ p_F : h\in C_p(Z)\}$, 则 $M\subset H$. 然而 $H=p_F^*(C_p(Z))$, 再由定理 6.0.7, $C_p(Z)$同胚于 $C_pC_p(X)$的闭子集 H, 因而 $nw(\overline{M})\le nw(H)=nw(C_p(Z))\le \lambda$ .

上述证明表明$C_pC_p(X)$是$\lambda$-monolithic 空间. 由定理6.1.5, $C_p(X)$是$\lambda$-stable 空间. ▌

**推论 6.1.7** 空间 X 是 monolithic 空间(stable 空间)当且仅当 $C_p(X)$是 stable 空间(monolithic 空间)当且仅当$C_pC_p(X)$是 monolithic 空间(stable 空间). ▌

**推论 6.1.8** 设 X 是紧空间，则 $C_p(X)$的每一紧子集是 Fréchet 空间.

**证明** 设 F 是 $C_p(X)$的紧子集且 $y\in \overline{A}\subset F$. 由于 X 是紧空间，所以每一 $X^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$是紧空间，由定理 6.0.1(5), $C_p(X)$有可数 tightness, 于是存在 A 的可数子集 C 使得$y\in \overline{C}$. 又由于X 是紧空间，所以 X 是 stable 空间，由推论 6.1.7, $C_p(X)$是 monolithic 空间，从而$\overline{C}$是 cosmic 的紧空间，再由定理 2.3.7, $\overline{C}$是度量空间，因此存在由 C 中点组成的序列收敛于 y. 故$\overline{F}$是 $C_p(X)$的 Fréchet 子空间. ▌

**例 6.1.9** Niemytzki 切圆盘拓扑空间 T(Steen, Seebach[1978]): 非$\aleph_0$-monolithic 空间.

令$S=\{(x, y) : x, y\in\mathbb{R}, y>0\}$, $L=\{(x, 0) : x\in\mathbb{R}\}$且$T=S\cup L$. 在 T 上赋予 Niemytzki[56]切圆盘拓扑(Niemytzki's tangent disc topology): 对于每一$t\in T$, 若 $t\in S$, t 在 T 中的邻域取为 t 在 T 中的欧几里得邻域; 若 $t\in L$, t 在 T 中的邻域基元形如$\{t\}\cup D$, 其中 D 是 S 中的开圆盘且在点 t 与直线 L 相切. 集合 T 赋予 Niemytzki 切圆盘拓扑称为 Niemytzki 切圆盘拓扑空间(Niemytzki's tangent disc topological space). 易验证, T 是完全正则的 $T_1$空间.

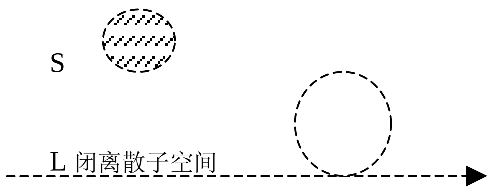


图 Niemytzki 切圆盘拓扑空间

显然, T 是可分空间. 因为 L 是 T 的不可数的闭离散子空间，所以 T 不是 cosmic 空间. 故 T 不是$\aleph_0$-monolithic 空间. 由于 T 的子空间 S 和 L 都是度量空间，所以 S 和 L 都是 T 的

[56] 苏联数学家 В. В. Немыцкий

monolithic 子空间. 这表明两个 monolithic 空间的并未必是 monolithic 空间. ∎

**引理 6.1.10** 若空间 X 具有由 monolithic 子空间组成的局部有限闭覆盖，则 X 是 monolithic 空间.

**证明** 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是空间 X 的局部有限闭覆盖，其中每一$X_\alpha$是monolithic 空间. 让 M 是 X 的任一无限子空间，对于每一$\alpha\in\Lambda$，令 $M_\alpha=M\cap X_\alpha$，则 $nw(\overline{M_\alpha})\le|M_\alpha|\le|M|$. 若 $M_\alpha\neq\varnothing$，取定 $x_\alpha\in M_\alpha$，由于$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是局部有限的，所以存在 $x_\alpha$ 在 X 中的邻域 $U_\alpha$ 和 $\Lambda$ 的有限子集$\Lambda_\alpha$使得当$\beta\in\Lambda\setminus\Lambda_\alpha$时有 $U_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$，从而 $U_\alpha\cap M_\beta=\varnothing$，因此 $x_\beta\notin U_\alpha$，于是$|\{\alpha\in\Lambda:M_\alpha\neq\varnothing\}|\le|M|$，从而 $nw(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{M_\alpha})\le|M|$. 因为$\overline{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{M_\alpha}$，故 $nw(\overline{M})\le|M|$. 因此, X 是 monolithic 空间. ∎

**定理 6.1.11** 若 $C_p(X)$是 stable 空间，则对于每一基数$\kappa$积空间 $C_p(X)^\kappa$ 是 stable 空间.

**证明** 因为 $C_p(X)$是 stable 空间，由推论 6.1.7，X 是 monolithic 空间. 让 D 是基数$\kappa$的集合赋予离散拓扑的空间，则$\{X\times\{d\}\}_{d\in D}$是空间 $X\times D$ 的局部有限闭覆盖且每一 $X\times\{d\}$是 monolithic 空间，由引理 6.1.10, $X\times D$ 是 monolithic 空间，再由推论 6.1.7, $C_p(X\times D)$是 stable 空间. 由定理 4.5.16，积空间 $C_p(X)^\kappa$ 同胚于 $C_p(X\times D)$，所以 $C_p(X)^\kappa$ 是 stable 空间. ∎

**推论 6.1.12** 对于每一基数$\kappa$积空间$\mathbb{R}^\kappa$是 stable 空间.

**证明** 取 X 是单点集组成的离散空间，则 $C_p(X)=\mathbb{R}$是 stable 空间，所以$\mathbb{R}^\kappa$是 stable 空间. ∎

## 练习

**6.1.1** $\lambda$-monolithic 性质是遗传性质.

**6.1.2** 设 $f:X\to Y$ 是连续满射. 若 X 是$\lambda$-stable 空间，则 Y 是$\lambda$-stable 空间(引理 6.1.4).

**6.1.3** 序数空间$[0,\ \omega_1)$是 stable 空间.

**6.1.4** 设 X 是紧空间，则 $C_p(X)$的每一非空的可分紧子集是可度量化的.

**6.1.5** 积空间$\mathbb{R}^{\omega_1}$不是 monolithic 空间.