第五章　$C_\alpha(X,\mathbb{R})$的基数函数

定义于拓扑空间到基数集之间的对应 f 称为基数函数(cardinal function), 若对于每一拓扑空间 X, 对应一个基数 f(X)使得如果空间 X 同胚于空间 Y, 则 f(X)=f(Y). 基数函数将一些重要的拓扑性质(如第二可数性、第一可数性、可分性等)扩展到高基数的情形. R. Hodel[1984]指出: 在集论拓扑学中基数函数的思想是最有效和最重要的统一概念(unifying concept)之一. 本章围绕函数空间的中心问题, 将从基数函数的角度建立拓扑空间 X 与函数空间 C(X, $\mathbb{R}$)上基数函数间的一些基本关系，主要涉及权，弱权，网络权，稠密度，胞腔度，特征，伪特征，tightness，Lindelöf 数等基数函数及度量性，次可度量性，弱第一可数性，完全性等拓扑性质，包括几个有趣的对偶定理. 除非特别说明，**本章所论空间均满足完全正则且 $\mathbf{T}_1$ 分离性质，值域空间总是指具有通常度量 ρ 的实数空间$\mathbb{R}$，于是记 C(X, $\mathbb{R}$)为 C(X). α 总是指定义域空间 X 的遗传闭的紧网络，简记为{X, α}.** 不失一般性，可以设 X 是无限集且α 关于有限并封闭.

回忆一些熟知的基数函数. 集合 S 的基数记为|S|. 空间 X 的权(weight)定义为 w(X)=ω+min{|$\mathscr{B}$| : $\mathscr{B}$是空间 X 的基}. 空间 X 的稠密度(density)定义为 d(X)=ω+min{|D| : D 是 X 的稠密子集}. 空间 X 的特征(character)定义为χ(X)=sup{χ(X, x) : x$\in$X}, 其中 X 在 x 的特征χ(X, x)=ω+min{|β_x|: β_x 是 X 在 x 的邻域基}. 空间 X 的胞腔度(cellularity)定义为 c(X)=ω+sup{|$\mathscr{U}$| : $\mathscr{U}$是 X 的不相交的非空开集族}(与紧化的符号相似). 这些基数函数刻画了一些众所周知的拓扑性质. 如，空间X 是第一可数空间当且仅当χ(X)=ω; 空间X 是第二可数空间当且仅当 w(X)=ω; 空间 X 是可分空间当且仅当 d(X)=ω; 空间 X 具有可数链条件当且仅当 c(X)=ω.

先证明相关的三个积空间的基数不等式.

引理 5.0.1　若对于每一 s$\in$S 有 w(X_s)$\le\lambda$且|S|$\le\lambda$, 则 w($\prod_{s\in S}X_s$)$\le\lambda$.

证明　对于每一 s$\in$S, 设$\mathscr{B}_s$是空间 X_s 的基且|$\mathscr{B}_s$|$\le\lambda$, 则{$p_s^{-1}(B_s)$: $B_s\in\mathscr{B}_s$, s$\in$S}是乘积空间$\prod_{s\in S}X_s$的子基, 其有限交的全体所构成的集族 $\mathscr{B}$ 是$\prod_{s\in S}X_s$的基. 由于|$\mathscr{B}$|$\le\lambda$, 所以 w($\prod_{s\in S}X_s$)$\le\lambda$. ∎

由此, 对于非空积空间的权数有公式 $w(X^Y)=\max\{|Y|, w(X)\}$(练习 5.1.1). 类似地, 可以证明

引理 5.0.2 若对于每一 $s\in S$ 有 $\chi(X_s)\leq\lambda$ 且$|S|\leq\lambda$, 则 $\chi(\prod_{s\in S}X_s)\leq\lambda$. ▮

引理 5.0.3 (Hewitt[54][1946]-Marczewski[1947]-Pondiczery[1944]定理)若对于每一 $s\in S$ 有 $d(X_s)\leq\lambda$ 且$|S|\leq 2^\lambda$, 则 $d(\prod_{s\in S}X_s)\leq\lambda$.

证明 不妨设$|S|=2^\lambda$且每一空间 X_s 是非空的, 让 D_s 是空间 X_s 的稠密子集且$|D_s|\leq\lambda$. 只须证明 $d(\prod_{s\in S}D_s)\leq\lambda$. 让 $D(\lambda)$表示基数λ的集合赋予离散拓扑的空间, 每一 f_s 是从 $D(\lambda)$到 D_s 的任意满函数, 并且定义乘积函数 $f=\prod_{s\in S}f_s:\prod_{s\in S}D(\lambda)\to\prod_{s\in S}D_s$ 为 $f((x_s))=(f(x_s))$, 则 f 是从积空间 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 到 $\prod_{s\in S}D_s$ 的连续满射, 所以又只须证明 $d(D(\lambda)^{2^\lambda})\leq\lambda$.

记 T 为由二点组成的离散空间的λ次积空间, 则$|T|=2^\lambda$且 $w(T)\leq\lambda$. 让$\mathscr{B}$是空间 T 的基且$|\mathscr{B}|\leq\lambda$, 再让 $\mathscr{T}$ 是由 $\mathscr{B}$ 中所有互不相交的有限子集形成的族, 则$|\mathscr{T}|\leq\lambda$. 显然, $D(\lambda)^{2^\lambda}=\prod_{t\in T}Y_t$, 其中每一 $Y_t=D(\lambda)$. 称函数 $g:T\to D(\lambda)$有性质 C, 如果存在 $\mathscr{T}$ 的元$\{U_i\}_{i\leq n}$使得 g 在每一 U_i 和 $T\setminus\bigcup_{i\leq n}U_i$ 上取常值. 令 $D=\{g\in D(\lambda)^T : g$ 具有性质 C$\}$, 则$|D|\leq\lambda$. 下面证明 D 是 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 的稠密子集. 设 V 是空间$\prod_{t\in T}Y_t$的非空开集, 存在 T 的由互不相同点组成的有限子集$\{t_i\}_{i\leq k}$和 $D(\lambda)$的有限子集$\{y_i\}_{i\leq k}$ 使得$\bigcap_{i\leq k}p_{t_i}^{-1}(y_i)\subset V$. 由于 T 是 T_2 空间, 存在$\{U_i\}_{i\leq k}\in\mathscr{T}$使得每一$t_i\in U_i$. 定义 $g:T\to D(\lambda)$满足当$t\in U_i$时有 $f(t)=y_i$, 当 $t\in T\setminus\bigcup_{i\leq k}U_i$ 时有 $f(t)=y_1$, 则 $g\in D\bigcap V$, 所以 D 是 $D(\lambda)^{2^\lambda}$ 的稠密子集. 故 $d(D(\lambda)^{2^\lambda})\leq\lambda$. ▮

推论 5.0.4 若对于每一 $s\in S$ 有 $d(X_s)\leq\lambda$, 则 $c(\prod_{s\in S}X_s)\leq\lambda$.

证明 设$\{U_t\}_{t\in T}$是乘积空间$\prod_{s\in S}X_s$的互不相交的非空开集族. 不妨设每一 U_t 是$\prod_{s\in S}X_s$的基本开集, 于是存在 S 的有限子集S_t和每一空间 X_s 开集 W_s^t 使得当$s\in S\setminus S_t$时

[54] 美国数学家 E. Hewitt(1920-1999), 他是美国数学家 M. H. Stone(1903-1989)的学生.

$W_s^t=X_s$ 且 $U_t=\prod_{s\in S}W_s^t$.

若$|T|>\lambda$, 不妨设$|T|\leq 2^\lambda$. 让 $S_0=\bigcup_{t\in T}S_t$, 则$|S_0|\leq 2^\lambda$. 由引理 5.0.3, $d(\prod_{s\in S_0}X_s)\leq\lambda$. 由于每一 $U_t=\prod_{s\in S_0}W_s^t\times\prod_{s\in S\setminus S_0}X_s$, 所以$\{\prod_{s\in S_0}W_s^t\}_{t\in T}$是空间$\prod_{s\in S_0}X_s$的互不相交的非空开集族, 于是$|T|\leq\lambda$, 矛盾. ∎

对于可数链条件有更一般的命题: 积空间$\prod_{s\in S}X_s$具有可数链条件当且仅当对于 S 的每一有限子集 S_0, 积空间$\prod_{s\in S_0}X_s$具有可数链条件(见戴牧民[2003]定理 1.11.1 或 Hodel[1984]定理 11.6).

§5.1　网络权、稠密度与胞腔度

回忆α网络的概念(见定理 4.5.7 前). 空间 X 的非空子集族β称为 X 的α网络, 若对于每一 $A\in\alpha$和 A 在 X 中的邻域 U 存在β的有限子集β'使得 $A\subset\bigcup\beta'\subset U$. 空间 X 的网络权(netweight)定义为 $nw(X)=\omega+\min\{|\beta|: \beta$ 是X的网络$\}$. 空间X的α网络权(α-netweight)定义为$\alpha nw(X)=\omega+\min\{|\beta|: \beta$是X的$\alpha$网络$\}$. 如果$\alpha$由X的所有非空紧子集组成, 则X的$\alpha$网络称为 X 的 k 网络(定义 3.3.11), 而 X 的α网络权也称为 X 的 k 网络权(k-netweight). 如果空间 X 的 k 网络权等于ω, 则 X 称为$\aleph_0$空间(见推论 3.6.7 前). 如果空间 X 的网络权等于ω, 则 X 称为 cosmic 空间(cosmic space).

显然, 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $d(X)\leq nw(X)=pnw(X)\leq\alpha nw(X)\leq knw(X)\leq w(X)$.

定理 5.1.1　对于每一$\{X, \alpha\}$有 $nw(C_\alpha(X))=\alpha nw(X)$.

证明　设β是空间X的关于有限交封闭的α网络且$|\beta|=\alpha nw(X)$, 再设$\mathcal{V}$是实数空间$\mathbb{R}$的可数基. 若 $f\in[A, V]$, 其中 $A\in\alpha$, $V\in\mathcal{V}$, 则 $A\subset f^{-1}(V)$, 存在β的有限子集$\{B_i\}_{i\leq n}$使得 $A\subset\bigcup_{i\leq n}B_i\subset f^{-1}(V)$, 于是 $f\in\bigcap_{i\leq n}[B_i, V]\subset[A, V]$, 所以集族$\{[B, V]: B\in\beta, V\in\mathcal{V}\}$的元的有限交全体的族是空间 $C_\alpha(X)$的网络, 故 $nw(C_\alpha(X))\leq\alpha nw(X)$.

对于相反的不等式, 让$\mathcal{F}$是空间 $C_\alpha(X)$的网络且$|\mathcal{F}|=nw(C_\alpha(X))$. 对于每一 $F\in\mathcal{F}$, 定义 $F^*=\{x\in X:$ 对于每一 $f\in F$ 有 $f(x)>0\}$. 再让$\mathcal{F}^*=\{F^*: F\in\mathcal{F}\}$, 那么$\mathcal{F}^*$是 X 的$\alpha$网络. 事实上,

对于每一 $A\in\alpha$ 及 A 在 X 中的开邻域 U, 由引理 4.5.5, 存在 $f\in C(X)$使得 $f(A)=\{1\}$ 且 $f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 让 $W=[A, (0, +\infty)]$, 则 W 是 f 在 $C_\alpha(X)$中的邻域, 于是存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $f\in F\subset W$, 从而 $A\subset F^*$. 若 $F^*\not\subset U$, 取 $x\in F^*\setminus U$. 因为 $x\notin U$, 所以 $f(x)=0$. 又因为 $x\in F^*$且 $f\in F$, 所以 $f(x)>0$, 矛盾. 故 $F^*\subset U$. 因而$\alpha nw(X)\le nw(C_\alpha(X))$. █

由定理 5.1.1, 对于空间 X 有 $nw(C_p(X))=nw(X)$. 这一关系也可以从定理 5.1.1 的第一部分证明了 $nw(C_p(X))\le nw(X)$后, 由更简单的方式导出: 由推论 4.5.14 前的说明知, X 可以嵌入 $C_pC_p(X)$, 于是 $nw(X)\le nw(C_pC_p(X))\le C_p(X)$, 所以 $nw(C_p(X))=nw(X)$.

由于$\alpha nw(X)\le w(X)$, 所以有下述推论.

推论 5.1.2 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $nw(C_\alpha(X))\le w(X)$. █

推论 5.1.3 (Michael[1966])设 X 是空间, 则

(1) $C_k(X)$是 cosmic 空间当且仅当 X 是 $\aleph_0$ 空间;

(2) $C_p(X)$是 cosmic 空间当且仅当 X 是 cosmic 空间. █

下面讨论空间的稠密度和胞腔度. 空间 X 的弱权(weak weight)定义为 $ww(X)=\omega+\min\{w(Y):$ 存在从 X 到空间 Y 的连续双射$\}$. 一些俄罗斯学者把弱权称为 i 权(i-weight)并记为 iw(X)(Arhangel’skiĭ[1987]). 空间 X 的 α 权(α-weight)定义为 $w_\alpha(X)=\sup\{w(A): A\in\alpha\}$.

显然, 对于空间 X, $c(X)\le d(X)$, $ww(X)\le w(X)$. 下述引理把定理 2.2.8 推广到高基数.

引理 5.1.4 设 X 是度量空间, 则 $w(X)=knw(X)=\alpha nw(X)=nw(X)=d(X)=c(X)$.

证明 显然, $c(X)\le d(X)\le nw(X)\le\alpha nw(X)\le knw(X)\le w(X)$, 所以只须证明 $w(X)\le c(X)$. 由 Bing 度量化定理(定理 2.3.3), 设 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是度量空间 X 的σ 离散基, 其中每一 $\mathcal{B}_n$ 是 X 的离散开集族. 设 $c(X)=\lambda$, 则每一$|\mathcal{B}_n|\le\lambda$, 于是$|\mathcal{B}|\le\lambda$, 所以 $w(X)\le\lambda$. 故 $w(X)\le c(X)$. █

空间 X 的子集 Y 称为 X 的 C 嵌入的(C-embedded)子空间, 若 Y 上的每一连续实值函数有到 X 的连续扩张. 显然, 正规空间的闭子空间, 完全正则空间的紧子空间都是 C 嵌入的子空间(引理 4.5.5).

引理 5.1.5 设 A 是空间 X 的 C 嵌入的子空间. 若 $i: A\to X$ 是包含函数, 则诱导函数 i*:

$C(X)\to C(A)$是满射.

证明 对于每一 $g\in C(A)$, 由于 A 是 X 的 C 嵌入的子空间, 存在 $f\in C(X)$使得 $f_{|A}=g$, 那么对于每一 $x\in A$ 有 $i^*(f)(x)=f(i(x))=f(x)=g(x)$, 所以 $i^*(f)=g$. 故 i^*是满射. ∎

定理 5.1.6 (Noble[1974])对于每一$\{X, \alpha\}$有 $w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))\le d(C_\alpha(X))=ww(X)$.

证明 首先, 证明 $d(C_\alpha(X))=ww(X)$. 因为 $C_p(X)\le C_\alpha(X)\le C_k(X)$, 于是 $d(C_p(X))\le d(C_\alpha(X))\le d(C_k(X))$, 所以只须证明 $d(C_k(X))\le ww(X)\le d(C_p(X))$. 设$\phi$: $X\to Y$ 是连续的双射, 其中 $w(Y)=ww(X)$. 由练习 4.5.3, 诱导函数ϕ^*: $C_k(Y)\to C_k(X)$是几乎满的, 于是 $d(C_k(X))\le d(C_k(Y))\le nw(C_k(Y))\le w(Y)=ww(X)$. 为了证明 $ww(X)\le d(C_p(X))$, 设 D 是 $C_p(X)$的无限稠密子集且$|D|=d(C_p(X))$. 则 D 分离 X 中的点. 事实上, 对于 X 中不同的点 x, y, 存在 $g\in C(X, [-1, 1])$使得 $g(x)=-1$ 且 $g(y)=1$. 令 $V=[x, (-\infty, 0)]\cap[y, (0, +\infty)]$, 则 V 是 $C_p(X)$的非空开集, 存在 $f\in D\cap V$, 于是 $f(x)\ne f(y)$, 所以 D 分离 X 中的点. 让 Δ_D: $X\to\mathbb{R}^D$是对角线函数(见定理 4.5.2 前), 即对于每一 $x\in X$ 和 $f\in D$ 有 $\Delta_D(x)(f)=f(x)$, 由练习 4.5.2, Δ_D 是连续的单射. 由引理 5.0.1, $w(\mathbb{R}^D)=|D|$, 因而 $ww(X)\le w(\Delta_D(X))\le w(\mathbb{R}^D)=|D|=d(C_p(X))$. 故 $d(C_\alpha(X))=ww(X)$.

因为 $c(C_\alpha(X))\le d(C_\alpha(X))$, 所以仍要证明$w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))$. 设$A\in\alpha$, 因为 A 是紧的, 所以 A 上的连续双射是同胚, 因而$ww(A)=w(A)$. 又因为α是遗传闭的, 由推论 4.4.5, $C_\alpha(A)$是可度量化的, 于是 $c(C_\alpha(A))=d(C_\alpha(A))$. 让 i: $A\to X$ 是包含函数, 由定理 4.5.7(1)和引理 5.1.5, 诱导函数 i^*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(A)$是连续的满射, 所以 $c(C_\alpha(A))\le c(C_\alpha(X))$. 因而 $w(A)=ww(A)=d(C_\alpha(A))=c(C_\alpha(A))\le c(C_\alpha(X))$. 由于 A 的任意性, 所以 $w_\alpha(X)\le c(C_\alpha(X))$. ∎

推论 5.1.7 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$是可分的;

(2) $C_p(X)$是可分的;

(3) X 有一较粗的可分度量拓扑. ∎

由推论 5.0.4, 乘积空间$\mathbb{R}^X$具有可数链条件, 又由于$C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 于是有下述推论.

推论 5.1.8 $C_p(X)$具有可数链条件. ∎

下一推论表明 $C_k(X)$未必具有可数链条件.

推论 5.1.9 如果$C_k(X)$有可数链条件, 则 X 的每一紧子集可度量化. ∎

下面介绍一个拓扑群的性质与胞腔度有关. 设 G 是一个加法意义下的拓扑群, λ 是无限基数. G 称为全λ有界的(totally λ-bounded), 如果对于 G 中单位元的每一邻域 U, 存在 G 的子集 S 使得$|S|\le\lambda$ 且 $G=S+U(=\{s+u : s\in S, u\in U\})$. Arhangel'skiĭ[1981]证明了 G 是全λ有界的当且仅当 G 同构于一个胞腔不超过λ的群的子群. 由于 $C_p(X)$是具有可数链条件的拓扑群(定理 4.3.11), 所以 $C_p(X)$总是全$\aleph_0$有界的. 下面介绍 $C_k(X)$是全$\aleph_0$有界的等价条件.

引理 5.1.10 设拓扑群 G 是全λ有界的, 则 $d(G)\le\lambda\chi(G)$.

证明 设 G 的单位元 0 的一个对称的邻域基为$\{U_t\}_{t\in T}$, 其中$|T|\le\chi(G)$. 对于每一 $t\in T$, 存在 G 的基数不超过λ的子集 S_t使得 $S_t+U_t=G$. 下面证明$\overline{\bigcup_{t\in T}S_t}=G$. 设 U 是 G 的非空开集, 取定 $x\in U$, 则存在 $t\in T$ 使得 $U_t\subset U-x$, 于是存在 $s\in S_t$ 和 $u\in U_t$ 使得 $x=s+u$, 从而 $s=x-u\in x-U_t=x+U_t\subset U$, 因此 $S_t\bigcap U\ne\varnothing$. 故$\overline{\bigcup_{t\in T}S_t}=G$. 这说明 $d(G)\le\lambda\chi(G)$. ∎

引理 5.1.11 设α和β分别是空间 X 和 Y 的遗传闭的紧网, 若 $p\in C(X, Y)$, 则诱导函数 $p^*: C_\beta(Y)\to C_\alpha(X)$是同态.

证明 由定理 4.3.11, $C_\alpha(X)$和 $C_\beta(Y)$都是拓扑群. 对于每一 f, $g\in C_\beta(Y)$和 $x\in X$, $p^*(f+g)(x)=(f+g)(p(x))=f(p(x))+g(p(x))=p^*(f)(x)+p^*(g)(x)=(p^*(f)+p^*(g))(x)$, 所以 $p^*(f+g)=p^*(f)+p^*(g)$, 因而 p^*是同态. ∎

定理 5.1.12 空间 $C_\alpha(X)$是全λ有界的当且仅当 $w_\alpha(X)\le\lambda$.

证明 设空间 $C_\alpha(X)$是全λ有界的. 如果 $A\in\alpha$ 且 i: $A\to X$ 是包含函数, 由引理 5.1.5 和引理 5.1.11, 诱导函数 i^*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(A)$是同态满射, 于是 $C_\alpha(A)$同构于拓扑群 $C_\alpha(X)$的子群. 由 Arhangel'skiĭ 的定理, $C_\alpha(A)$是全λ有界的群. 因为 A 是 X 的紧子集, 所以 $C_\alpha(A)$

是可度量化的(推论 4.4.5), 再由定理 5.1.6 和引理 5.1.10, $w(A)=w_{\alpha}(A)\le d(C_{\alpha}(A))\le\lambda$. 因此 $w_{\alpha}(X)\le\lambda$.

反之, 设 $w_{\alpha}(X)\le\lambda$ 且让 Y 是拓扑和 $\oplus\alpha$. 如果 $p: Y\to X$ 是自然映射(见引理 1.6.7 前), 由定理 4.5.6(1)和引理 5.1.11, 诱导函数 $p^*: C_{\alpha}(X)\to C_{\alpha}(Y)$是一对一的同态, 所以 $C_{\alpha}(X)$ 同构于 $C_{\alpha}(Y)$的子群, 由 Arhangel'skiĭ 的定理, 只须证明 $c(C_{\alpha}(Y))\le\lambda$. 由定理 4.5.16, $C_{\alpha}(Y)$同胚于$\prod_{A\in\alpha}C_{\alpha}(A)$. 对于每一 $A\in\alpha$, 由定理 5.1.6 有 $d(C_{\alpha}(A))=ww(A)=w(A)\le\lambda$, 再由推论 5.0.4, $c(\prod_{A\in\alpha}C_{\alpha}(A))\le\lambda$, 所以 $c(C_{\alpha}(Y))\le\lambda$. ▮

由定理 3.4.1, 有

推论 5.1.13 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$是全$\aleph_0$有界的;

(2) X 的每一紧子空间是可度量化的;

(3) X 是度量空间的紧覆盖映象. ▮

练习

5.1.1 证明: 对于非空积空间的权数有公式 $w(X^Y)=\max\{|Y|, w(X)\}$.

5.1.2 设 D 是空间 X 的稠密子集, 则 c(D)=c(X).

5.1.3 若 X 是 T_2 紧空间, 则 w(X)=nw(X)=ww(X)(定理 2.3.7 的推广).

5.1.4 证明: X 是$\aleph_0$空间当且仅当$C_k(X)$是$\aleph_0$空间(Michael[1966]).

5.1.5 证明: $C_p(X)$的仿紧性与 Lindelöf 性是等价的.

§5.2 伪特征、特征

空间 X 的伪特征(pseudo-character)定义为$\psi(X)=\sup\{\psi(X,x): x\in X\}$, 其中 X 在 x 的伪特征$\psi(X,x)=\omega+\min\{|\mathcal{G}|: \mathcal{G}$是 X 的开集族且$\bigcap\mathcal{G}=\{x\}\}$. 空间 X 的对角线数(diagonal number)定义为$\Delta(X)=\omega+\min\{|\mathcal{G}|: \mathcal{G}$是积空间 $X\times X$ 的开集族且$\bigcap\mathcal{G}$等于 $X\times X$ 的对角线$\Delta\}$. 空间 X 的弱α覆盖数(weak α-covering number)定义为$w\alpha c(X)=\omega+\min\{|\beta|: \beta\subset\alpha$且$\bigcup\beta$稠

于 X}. 若 wkc(X)=ω, 则称 X 是几乎σ紧空间(almost σ-compact space).

空间 X 具有点 G_δ 性质当且仅当ψ(X)=ω; 空间 X 具有 G_δ 对角线(G_δ-diagonal)当且仅当Δ(X)=ω; wαc(X)$\le$wpc(X)=d(X). 对于正整数集$\mathbb{N}$, ψ($\mathbb{N}$)也表示 Gillman-Jerison 空间(例 3.4.16), 但是从上下文中易区别不同的含义.

引理 5.2.1 若 G 是拓扑群, 则Δ(G)=ψ(G).

证明 易验证, Δ(G)=λ 当且仅当存在 G 的开覆盖族$\{\mathscr{U}_s\}_{s\in S}$使得|S|=$\lambda$ 且对于每一 $x\in G$ 有$\bigcap_{s\in S}$ st(x, $\mathscr{U}_s$)={x}(练习 5.2.1). 由此, ψ(G)$\le\Delta$(G). 下面证明Δ(G)$\le\psi$(G). 设$\{B_s\}_{s\in S}$是 G 的开集族且$\bigcap_{s\in S}B_s$={e}. 由于 f(x, y)=xy 是从 G$\times$G 到 G 的连续函数, 且 f(e, e)=e, 对于每一 $s\in S$, 存在 G 中 e 的对称的开邻域 C_s 使得 $C_sC_s\subset B_s$, 令$\mathscr{U}_s=\{xC_s: x\in G\}$, 则$\mathscr{U}_s$是 G 的开覆盖. 对于每一 $a\in G$, 若 $b\in G\setminus\{a\}$, 则 $a^{-1}b\neq e$, 存在 $s\in S$ 使得 $a^{-1}b\notin B_s$, 如果 $b\in$ st(a, $\mathscr{U}_s$), 则存在 $x\in G$ 使得 a, $b\in xC_s$, 于是 $a^{-1}b\in a^{-1}xC_s\subset(C_s)^{-1}C_s=C_sC_s\subset B_s$, 矛盾, 故 $b\notin$ st(a, $\mathscr{U}_s$), 所以$\bigcap_{s\in S}$ st(a, $\mathscr{U}_s$)={a}. 因此Δ(G)$\le\psi$(G). ▮

与引理 5.0.1 类似的方法, 可以证明(练习 5.2.2)

引理 5.2.2 若对于每一 $s\in S$ 有$\psi(X_s)\le\lambda$ 且|S|$\le\lambda$, 则$\psi(\prod_{s\in S}X_s)\le\lambda$. ▮

定理 5.2.3 对于每一{X, α}有$\psi(C_\alpha(X))=\Delta(C_\alpha(X))$=w$\alpha$c(X).

证明 由引理 5.2.1, 仅要证明$\psi(C_\alpha(X))$=wαc(X). 设 f_0: X$\to\mathbb{R}$使得 f_0(X)={0}, 则$\{f_0\}=\bigcap\{[A_s, V_s]: s\in S\}$, 其中 $A_s\in\alpha$, V_s是$\mathbb{R}$中 0 的开邻域且|S|$\le\psi(C_\alpha(X))$. 设$\beta=\{A_s: s\in S\}$, 若存在 $x\in X\setminus\overline{\bigcup\beta}$, 存在 $f\in C(X)$使得 f(x)=1 且 f($\overline{\bigcup\beta}$)={0}, 那么对于每一 $s\in S$ 有 $f\in[A_s, V_s]$, 于是 $f=f_0$, 这与 f(x)=1 相矛盾, 因而$\overline{\bigcup\beta}$=X, 所以 wαc(X)$\le\psi(C_\alpha(X))$.

另一方面, 设$\beta\subset\alpha$, $\bigcup\beta$稠于 X 且|β|=wαc(X). 让 Y 是拓扑和$\oplus\beta$且 p: Y$\to$X 是自然函数, 则 p 是几乎满的, 由定理 4.5.6(1)和定理 4.5.7(1), 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(Y)$

是连续的单射，从而$\psi(C_\alpha(X))\le\psi(C_\alpha(Y))$. 由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{A\in\beta}C_\alpha(A)$. 由推论 4.4.5, 每一 $C_\alpha(A)$是可度量化的，再由引理 5.2.2, $\psi(\prod_{A\in\beta}C_\alpha(A))\le|\beta|$. 故$\psi(C_\alpha(X))\le w\alpha c(X)$. ▋

空间 X 称为次可度量化的(submetrizable), 若 X 上存在较粗的可度量拓扑，即存在连续双射 f: $X\to M$ 使得 M 是可度量化空间. 若空间 X 是几乎σ紧空间, 即存在 X 的紧子集列$\{C_n\}$使得 $X=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n}$，令 $Y=\oplus_{n\in\mathbb{N}}C_n$，那么 $C_k(Y)$同胚于度量空间$\prod_{n\in\mathbb{N}}C_k(C_n)$, 所以在定理 5.2.3 中的 $C_\alpha(X)$是次可度量化空间. 由此, 有下述两个推论.

推论 5.2.4 (McCoy, Ntantu[1986])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$具有点 G_δ 性质;

(2) $C_k(X)$的每一紧子集是 G_δ 集;

(3) $C_k(X)$具有 G_δ 对角线;

(4) $C_k(X)$是次可度量空间;

(5) X 是几乎σ紧空间. ▋

推论 5.2.5 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_p(X)$具有点 G_δ 性质;

(2) $C_p(X)$的每一紧子集是 G_δ 集;

(3) $C_p(X)$具有 G_δ 对角线;

(4) $C_p(X)$是次可度量空间;

(5) $C_p(X)$具有较粗的可分度量拓扑;

(6) X 是可分空间. ▋

推论 5.2.5 的(5), (6)和推论 5.1.7 的(2), (3)之间的关系是点态收敛拓扑中的一种对偶性质(dual property). 有时也称表述函数空间与底空间间对偶性质的定理为对偶定理(duality theorem). 下面建立推论 5.2.4 的(4), (5)的一个类似的对偶定理(推论 5.2.7), 即利用 Stone-Weierstrass 定理(定理 4.6.4)和 Ascoli 定理(定理 4.6.11)刻画 $C_k(X)$的几乎σ紧性.

定理 5.2.6 (McCoy[1978b])若 X 是次可度量空间，则 $C_k(X)$是几乎σ紧空间.

证明 由于 X 是次可度量空间，存在度量空间 M 和连续双射ϕ: $X\to M$. 由练习 4.5.3 和推论 4.5.8(2)，诱导函数ϕ^*: $C_k(M)\to C_k(X)$是几乎满的连续函数. 如果$C_k(M)$是几乎σ紧空间，则$C_k(X)$也是几乎σ紧空间. 因此，只须对度量空间(X, d)证明命题成立.

因为度量空间是仿紧空间，由单位分解定理(定理 1.4.15)，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，X 的开覆盖 $\{B(x, 1/2n) : x\in X\}$具有从属于它的局部有限的单位分解$F_n\subset C(X, \mathbb{I})$. 即$F_n$满足:

(6.1) 对于每一$f\in F_n$，直径 $d(f^{-1}((0, 1]))<1/n$(从属性质);

(6.2) $\{f^{-1}((0, 1]) : f\in F_n\}$是 X 的局部有限覆盖(局部有限性质);

(6.3) 对于每一$x\in X$，$\sum_{f\in F_n} f(x)=1$(单位分解性质).

设 h 是从 X 到 1 的常值函数. 对于每一$n\in\mathbb{N}$，定义 $F_n'=\{rf : r\in[-1, 1], f\in F_n\bigcup\{h\}\}$. 则

(6.4) F_n'是均匀连续的.

设 $x\in X$, $t\in\mathbb{R}$，$\varepsilon>0$，让 $V=(t-\varepsilon, t+\varepsilon)\subset\mathbb{R}$. 要证明存在 x 的邻域 U 和 t 的邻域 V’使得当$g\in F_n'$且 $g(x)\in V'$时有 $g(U)\subset V$. 由局部有限性质(6. 2)，存在 x 的邻域U_0和F_n的有限子集 F 使得对于每一 $f\in F_n\setminus F$，$U_0\bigcap f^{-1}((0, 1])=\varnothing$. 对于每一 $f\in F$，存在 x 的邻域U_f使得 $f(U_f)\subset(f(x)-\varepsilon/2, f(x)+\varepsilon/2)$. 令 $U=U_0\bigcap(\bigcap_{f\in F}U_f)$, $V'=(t-\varepsilon/2, t+\varepsilon/2)$，则 U, V’分别是 x 和 t 的邻域. 对于每一 $f\in F$ 和 $r\in[-1, 1]$，如果 $rf(x)\in V'$，则对于每一 $u\in U$ 有 $|rf(u)-t|\le|r||f(u)-f(x)|+|rf(x)-t|<\varepsilon$，于是 $rf(U)\subset V$. 对于每一 $f\in(F_n\bigcup\{h\})\setminus F$ 和 $r\in[-1, 1]$，rf 在 U 上取常值，于是当 $rf(x)\in V'$时有 $rf(U)\subset V$. 故F_n'是均匀连续的.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$，置

$$G_n=\{f_1f_2\dots f_k : f_j\in\bigcup_{i\le n}F_i' \text{ 且 } j\le k\le n\},\ H_n=\{f_1+f_2+\dots+f_k : f_j\in G_n \text{ 且 } j\le k\le n\}.$$

因为$\bigcup_{i\le n}F_i'$是均匀连续的，于是G_n是均匀连续的，从而H_n是均匀连续的(练习 5.2.3). 又因为 H_n是点态有界的，由 Ascoli 定理(定理 4.6.11)，H_n在 $C_k(X)$中有紧的闭包. 定义

$H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n$.

(6.5) H 是 C(X)的代数.

设 f, g$\in$H, 于是存在 m, n$\in\mathbb{N}$使得 $f\in H_m$, $g\in H_n$. 让 $f=f_1+f_2+\ldots+f_k$, $g=g_1+g_2+\ldots+g_j$, 其中每一 $f_i\in G_m$, $g_i\in G_n$. 因为每一 f_i 和 g_i 是$\bigcup_{i\le m+n}F_i^{'}$中不超过 m+n 个元的积, 于是 $f+g\in H_{m+n}\subset H$. 类似的论证表明 $fg\in H_{mn}\subset H$. 其次, 让 $r\in\mathbb{R}$且 $f\in H_m$, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得$|r|<n$, 那么 $nf\in H_{mn}$, 于是 $rf=(r/n)nf\in H_{mn}\subset H$. 因而 H 是 C(X)的代数.

(6.6) H 分离 X 中的点.

设 x, y$\in$X 且 $x\neq y$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $d(x, y)>1/n$. 由单位分解性质(6.3), 存在 $f\in F_n$ 使得 $f(x)\neq 0$. 再由从属性质(6.1), f(y)=0. 因此 H 分离 X 中的点.

由 Stone-Weierstrass 定理(定理 4.6.4), H 是 $C_k(X)$的稠密子集. 故 $C_k(X)$是几乎σ紧空间. ∎

推论 5.2.7 设 X 是 k 空间, 则 $C_k(X)$是几乎σ紧空间当且仅当 X 是次可度量空间.

证明 如果 $C_k(X)$是几乎σ紧空间, 由推论 5.2.4, $C_kC_k(X)$是次可度量空间. 因为 X 是 k 空间, 由推论 4.5.15, 对角线函数$\Delta: X\to C_kC_k(X)$是嵌入. 因而 X 是次可度量空间. ∎

推论 5.2.4 表明空间 $C_k(X)$是次可度量空间当且仅当 X 是几乎σ紧空间, 所以上述推论是推论 5.2.4 的对偶形式.

推论 5.2.8 空间 $C_\alpha(X)$是可分的次可度量空间当且仅当 X 是可分的次可度量空间.

证明 由于具有 G_δ 对角线的紧空间是可度量化空间(练习 5.2.4), 所以在具有 G_δ 对角线的空间中几乎σ紧性与可分性是等价的. 而次可度量空间具有 G_δ 对角线, 所以必要性来自推论 5.1.7 和推论 5.2.5, 充分性来自推论 5.2.5 和定理 5.2.6. ∎

推论 5.2.5 可被用于建立 cosmic 空间的映射性质.

定理 5.2.9 如果 X 是 cosmic 空间, 则存在可分度量空间 M_1、M_2和连续的双射ϕ_1: $M_1\to X$ 和$\phi_2: X\to M_2$.

证明 让 M_1是集合 X 具有以 X 的可数闭网络作为子基生成的拓扑空间, 则 M_1是可分

度量空间且恒等函数ϕ_1: $M_1 \to X$ 是连续双射. 由推论 5.1.3, $C_p(X)$是 cosmic 空间, 于是 $C_p(X)$是可分空间, 所以由推论 5.2.5, $C_pC_p(X)$是次可度量的, 由推论 4.5.14 前的注, 对角线函数Δ: $X \to C_pC_p(X)$是嵌入, 所以存在可分度量空间M_2和连续的双射ϕ_2: $X \to M_2$. ∎

由此, 若 X 是 cosmic 空间, 则 X 既具有较精的可分度量拓扑又具有较粗的可分度量拓扑.

下面刻画函数空间的特征. 空间 X 的子集族β称为 X 的α覆盖(α-covering), 若α的每一元含于β的某个元中, 即α加细β. 空间 X 的α-Arens 数(α-Arens number)定义为$\alpha a(X)=\omega+\min\{|\beta|: \beta\subset\alpha$且$\beta$是 X 的$\alpha$覆盖$\}$. 当$\alpha$是 X 的所有非空紧子集时, α覆盖称为 k 覆盖(k-covering). 空间 X 称为半紧(hemicompact)空间, 如果 $ka(X)=\omega$, 即存在 X 的紧子集列$\{C_n\}$使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $n\in\mathbb{N}$满足 $K\subset C_n$. 当α是 X 的所有非空的有限子集时, X 的α覆盖称为 X 的ω覆盖(ω-covering; Gerlits, Nagy[1982]), 这时$\alpha a(X)=|X|$.

如果 $x\in X$, X 的非空开集族$\mathcal{V}$称为 x 的局部π基(local π-base), 如果对于每一 x 的邻域 U 存在 $V\in\mathcal{V}$使得 $V\subset U$. X 的π特征(π-character)定义为$\pi\chi(X)=\sup\{\pi\chi(X, x) : x\in X\}$, 其中 X 在 x 的$\pi$特征$\pi\chi(X, x)=\omega+\min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$是 x 的局部$\pi$基$\}$.

引理 5.2.10 设 G 是拓扑群, 则$\pi\chi(G)=\chi(G)$.

证明 显然, $\pi\chi(G)\le\chi(G)$. 设$\mathcal{B}$是拓扑群 G 在单位元 e 的局部π基, 让 U 是 e 在 G 中的任一开邻域, 由于 $f(x, y)=xy^{-1}$是从 $G\times G$ 到 G 的连续函数, 且 $f(e, e)=e$, 存在 e 在 G 中的开邻域 V 和 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $VV^{-1}\subset U$ 且 $B\subset V$, 于是 $e\in BB^{-1}\subset VV^{-1}\subset U$, 所以$\{BB^{-1} : B\in\mathcal{B}\}$是 e 的局部基, 故$\chi(G)\le\pi\chi(G)$. ∎

定理 5.2.11 对于每一$\{X, \alpha\}$有$\chi(C_\alpha(X))=\pi\chi(C_\alpha(X))=\alpha a(X)$.

证明 由引理 5.2.10, 只须证明$\chi(C_\alpha(X))=\alpha a(X)$. 设$\{[A_s, V_s] : s\in S\}$是 X 上的零函数 f_0在 $C_\alpha(X)$中的局部基, 其中 $A_s\in\alpha$, V_s是$\mathbb{R}$中 0 的开邻域且$|S|\le\chi(C_\alpha(X))$. 若$|S|<\alpha a(X)$, 则$\{A_s\}_{s\in S}$不是 X 的α覆盖, 存在 $A\in\alpha$使得对于每一 $s\in S$ 有 $A\not\subset A_s$. 因为$[A, (-1, 1)]$是 f_0的邻域, 存在 $s\in S$ 使得$[A_s, V_s]\subset[A, (-1, 1)]$. 设 $a\in A\setminus A_s$, 选取 $f\in C(X)$使得

$f(a)=1$ 且 $f(A_s)=\{0\}$. 那么 $f\in[A_s, V_s]\setminus[A, (-1, 1)]$, 矛盾. 因而, $\alpha a(X)\le|S|\le\chi(C_\alpha(X))$.

另一方面, 设$\{A_s\}_{s\in S}\subset\alpha$是 X 的$\alpha$覆盖且$|S|=\alpha a(X)$. 让 Y 是拓扑和$\oplus_{s\in S}A_s$, p: $Y\to X$ 是自然映射, 由练习 4.5.4(或定理 4.5.6 和定理 4.5.7 的证明), 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\alpha(Y)$是嵌入. 由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{s\in S}C_\alpha(A_s)$, 再由推论 4.4.5, 每一$C_\alpha(A_s)$是可度量化的. 从引理 5.0.2 知, $\chi(C_\alpha(X))\le\chi(C_\alpha(Y))=\chi(\prod_{s\in S}C_\alpha(A_s))\le|S|=\alpha a(X)$. ■

下述结果包含定理 5.2.11 的一个可数情形. 空间 X 的点 x 称为 q 点(q-point), 若存在 x 在 X 中的邻域列$\{U_n\}$使得当$x_n\in U_n$时序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点. 这$\{U_n\}$称为点 x 的 q 序列(q-sequence). 若空间 X 的每一点都是 q 点, 则称 X 是 q 空间(q-space). 显然, 可数紧空间, Čech 完全空间和第一可数空间都是 q 空间.

由 Birkhoff 度量化定理(推论 4.2.5), 第一可数的T_0拓扑群是可度量化的. 对于函数空间可获得更为精细的刻画.

定理 5.2.12 (McCoy, Ntantu[1985])对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$是 q 空间;

(2) $C_\alpha(X)$是第一可数空间;

(3) $C_\alpha(X)$是度量空间;

(4) $\alpha a(X)=\omega$.

证明 (1)$\Rightarrow$(4). 设$C_\alpha(X)$是 q 空间. 让 X 上零函数f_0在$C_\alpha(X)$中的 q 序列是$\{B_n\}$, 不妨设每一 $B_n=[A_n, V_n]$是基本子基中的元, 则 V_n是ℝ中 0 的开邻域. 若存在 $x\in X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在$g_n\in C(X)$使得$g_n(A_n)=\{0\}$且$g_n(x)=n$, 从而$g_n\in B_n$且序列$\{g_n\}$在$C_\alpha(X)$中没有聚点, 矛盾. 因此, $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 由定理 5.2.3, $\psi(C_\alpha(X))=\omega$. 不失一般性, 设$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n=\{f_0\}$且$\overline{B}_{n+1}\subset B_n$. 则$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$f_0$在$C_\alpha(X)$在中的局部基(练习 1.2.5).

下面证明$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖. 若不然, 存在$A\in\alpha$使得对于每一$n\in\mathbb{N}$, $A\not\subset A_n$, 让

$x_n \in A \setminus A_n$，选取 $h_n \in C(X)$使得 $h_n(A_n)=\{0\}$且 $h_n(x_n)=1$，于是 $h_n \in B_n \setminus [A, (-1, 1)]$，这表明 f_0 不是序列$\{h_n\}$的聚点，矛盾．因此，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖，故$\alpha a(X)=\omega$．

(4)$\Rightarrow$(3)．设α的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖，为了证明 $C_\alpha(X)$是度量空间，只须证明 $C_\alpha(X)$可嵌入某一可度量化空间．让 Y 是拓扑和$\oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$，p: Y$\rightarrow$X 是自然映射，由练习 4.5.4，诱导函数 p*: $C_\alpha(X) \rightarrow C_\alpha(Y)$是嵌入．因为每一 $C_\alpha(A_n)$是可度量化的，且由定理 4.5.16, $C_\alpha(Y)$同胚于$\prod_{n\in\mathbb{N}} C_\alpha(A_n)$，故 $C_\alpha(Y)$是可度量化空间．因此 $C_\alpha(X)$是可度量化的．

∎

由定理 5.2.12, $C_p(X)$是可度量空间当且仅当 X 是可数空间, $C_k(X)$是可度量空间当且仅当 X 是半紧空间．定理 5.2.12 就紧开拓扑情形(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)是 Arens[1946]关于函数空间拓扑最经典的度量化定理．

练习

5.2.1　设 X 是拓扑空间，λ是无限基数．证明：$\Delta(X)=\lambda$当且仅当存在 X 的开覆盖族$\{\mathcal{U}_s\}_{s\in S}$使得$|S|=\lambda$且对于每一 $x\in X$ 有$\bigcap_{s\in S} st(x, \mathcal{U}_s)=\{x\}$．

5.2.2　证明引理 5.2.2.

5.2.3　证明：定理 5.2.6 中的集族 G_n 和 H_n 都是均匀连续的．

5.2.4　证明：具有 G_δ 对角线的(T_2)紧空间是可度量化空间．

5.2.5　设空间 L 含有非平凡的道路，若 $C_\alpha(X, L)$是第一可数空间，则存在α的可数子集β使得α中每一元是β的某有限子集并的子集(McCoy[1980a])．

5.2.6　设空间 L 含有非平凡的道路，则(1) 若 $C_k(X, L)$是第一可数空间，那么 X 是半紧空间且 L 是第一可数空间; (2) $C_k(X, L)$是度量空间当且仅当 X 是半紧空间且 L 是度量空间; (3) $C_p(X, L)$是第一可数空间当且仅当 X 是可数空间且 L 是第一可数空间; (4) $C_p(X, L)$是度量空间当且仅当 X 是可数空间且 L 是度量空间(McCoy[1980a])．

5.2.7　证明：对于空间 X 有$\psi(X)\le ww(X)$．