§4.5 自然映射

本节介绍几类在函数空间上自然定义的函数，主要涉及内射，对角线函数，诱导函数，赋值函数，和函数与积函数．它们在研究函数空间的拓扑性质中起了重要的作用．

1. 内射

设 X 和 L 是拓扑空间．对于每一 $t\in L$，定义 c_t:$X\to L$ 使得每一 $c_t(x)=t$. L 到 C(X, L)的内射(injection)是函数 i:$L\to C(X, L)$，定义为对于每一$t\in L$, $i(t)=c_t$．显然, i 是单的函数．对于 C(X, L)的适当拓扑，内射 i 是闭嵌入.

定理 4.5.1 若α是空间 X 的闭网络且 L 是 T_2 空间，则 i: $L\to C_\alpha(X, L)$是闭嵌入.

证明 为了证明 i 是嵌入，只须证明对于每一 $A\in\alpha$ 和 L 的开集 V 有 $i^{-1}([A, V])=V$(于是 $i(V)=[A, V]\bigcap i(L)$)．这是因为 $t\in V$，当且仅当 $c_t\in[A, V]$，当且仅当 $t\in i^{-1}([A, V])$.

为了证明 i(L)是 $C_\alpha(X, L)$的闭集，由定理 4.3.2，只须证明 i(L)是 $C_p(X, L)$的闭集．设 $f\in C(X, L)\setminus i(L)$，存在 x，$y\in X$ 使得 $f(x)\neq f(y)$，于是存在 L 中不相交的开集 V 和 W 分别含有点 f(x)和 f(y)，那么 $f\in[x, V]\bigcap[x, W]\subset C(X, L)\setminus i(L)$．所以 i(L)闭于 $C_p(X, L)$. ∎

L 的 T_2 性质仅使用于证明嵌入的闭性．由定理 4.5.1，对于任何闭遗传的拓扑性质，若 $C_\alpha(X, L)$具有这性质，则 L 必具有这性质.

2. 对角线函数

一般说来，从 X 到 C(X, L)没有自然的内射，但是在§1.3 中定义的从 X 到 L 的积空间的对角线函数有时是有用的．设 F 是 C(X, L)的子集，对角线函数 $\Delta_F: X\to L^F$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in F$ 有 $\Delta_F(x)(f)=f(x)$．当 F=C(X, L)时，记$\Delta_F=\Delta$．尽管这符号与空间的对角线符号是一样的，但从上下文中易了解确切的含义．当 L^F 具有积拓扑时，对每一投影 $p_f(f\in F)$有 $p_f\circ\Delta_F=f$，于是Δ_F是连续的．对角线引理(引理 1.3.8)给出了Δ_F是嵌入的充分条件.

定理 4.5.2 (对角线引理)如果 X 是 T_1 空间且 F 是 C(X, L)的分离点与闭集的子集，则Δ_F: $X\to L^F$是嵌入. ∎

3. 诱导函数

诱导函数是从复合函数产生的. 设 X, Y 和 L 是拓扑空间. 定义复合函数(composition function) Φ:C(X, Y)$\times$C(Y, L)$\to$C(X, L)使得对于每一 f$\in$C(X, Y)和 g$\in$C(Y, L)有 Φ(f, g)=g$\circ$f.

定理 4.5.3 若α是空间 X 的紧网络且β是正则空间 Y 的闭邻域基, 则 Φ:C_α(X, Y)$\times C_\beta$(Y, L)$\to C_\alpha$(X, L)是连续的.

证明 设 Φ(f, g)$\in$[A, W], 其中 A$\in\alpha$且 W 是 L 的开集. 则 g(f(A))$\subset$W, 于是 f(A)$\subset g^{-1}$(W). 对于每一y$\in$f(A), 存在y在Y中的邻域$B_y\in\beta$使得$B_y\subset g^{-1}$(W). 因为f(A)是紧的, 存在 f(A)的有限子集$\{y_i\}_{i\le n}$使得 f(A)$\subset\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$. 让 S=[A, $\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$]$\times$[$\bigcup_{i\le n}B_{y_i}$, W], 那么S是$C_\alpha$(X, Y)$\times C_\beta$(Y, L)的开集, (f, g)$\in$S 且$\Phi$(S)$\subset$[A, W]. 事实上, 设($f_1$, g_1)$\in$S, 则 f_1(A)$\subset\bigcup_{i\le n}B^\circ_{y_i}$且 g_1($\bigcup_{i\le n}B_{y_i}$)$\subset$W, 于是Φ(f_1, g_1)(A)=g_1(f_1(A))$\subset$W, 所以Φ(f_1, g_1)$\in$[A, W]. 故Φ是连续的. ∎

推论 4.5.4 设 Y 是局部紧的 T_2 空间, 则复合函数Φ:C_k(X, Y)$\times C_k$(Y, L)$\to C_k$(X, L)是连续的.

证明 设β={$\overline{B}$: B是Y的非空开集且$\overline{B}$是Y的紧集}, 则β是Y的闭邻域基且C_k(Y, L)=C_β(Y, L)(练习 4.3.4). 由定理 4.5.3, Φ:C_k(X, Y)$\times C_k$(Y, L)$\to C_k$(X, L)是连续的. ∎

固定复合函数两个变量中的一个变量导出诱导函数(induced function)的概念. 如果取定 f$\in$C(X, Y), 则诱导函数 f*:C(Y, L)$\to$C(X, L)定义为对于每一 g$\in$C(Y, L)有 f*(g)= Φ(f, g)=g$\circ$f.

显然, (g$\circ$f)*=f*$\circ$g*. 第五章中将阐述诱导函数 f*在建立函数空间之间对偶拓扑性质中的作用, 下面先介绍 f*的一些基本性质, 主要涉及何时 f*是单射, 连续函数和(闭)嵌入函数.

引理 4.5.5 设 Y 是完全正则的 T_1空间, B 是 Y 的紧子集, U 是 Y 的包含 K 的开集. 若 f$\in$C(B, $\mathbb{R}$), 则存在 g$\in$C(Y, $\mathbb{R}$)使得 $g_{|B}$=f 且 g(X$\setminus$U)$\subset$\{0\}.

证明 由引理 1.3.11, 设βY 是空间 Y 的 Stone-Čech 紧化. 则 B 是βY 的闭集且存在βY 的开集 W 使得 U=W$\cap$Y, 于是βY 是正规空间且 B$\subset$W, 从而存在 h$\in$C(βY, $\mathbb{R}$)使得 $h_{|B}$=f 且 h(βY$\setminus$W)$\subset$\{0\}. 让 g=$h_{|Y}$, 则 g$\in$C(Y, $\mathbb{R}$), $g_{|B}$=f 且 g(X$\setminus$U)$\subset$\{0\}. ∎

函数 $f:X\to Y$ 称为几乎满的(almost onto)如果 $\overline{f(X)}=Y$.

定理 4.5.6 设 $f\in C(X, Y)$, T_2 空间 L 含有非平凡的道路.

(1) 若 Y 是完全正则空间, 则 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$是单的当且仅当 f 是几乎满的;

(2) 如果α是完全正则的 T_1空间 X 的闭网络且 $f^*:C(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是几乎满的, 则 f 是单的.

证明 (1) 充分性. 设 g_1, $g_2\in C(Y)$使得 $f^*(g_1)=f^*(g_2)$, 对于每一 $y\in f(X)$, 存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$且 $g_1(y)=g_1(f(x))=f^*(g_1)(x)=f^*(g_2)(x)=g_2(f(x))=g_2(y)$. 因为 f(X)稠于 Y 且 L 是 T_2空间, 所以 $g_1=g_2$.

必要性. 让 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\neq p(1)$. 设存在 $y\in Y\setminus\overline{f(X)}$. 由于 Y 的完全正则性, 存在$\phi\in C(Y, \mathbb{I})$使得$\phi(\overline{f(X)})=\{0\}$且$\phi(y)=1$. 让 $g=p\circ\phi$ 且 c 是从 Y 映入{p(0)}的常值函数, 那么 $g\neq c$. 对于每一 $x\in X$, $g(f(x))=p(0)=c(f(x))$, 于是 $f^*(g)=f^*(c)$. 因而 f*不是单的.

(2) 让 x_1, x_2是 X 中的不同点, 那么存在 $h\in C(X, L)$使得 $h(x_1)\neq h(x_2)$, 于是存在 L 中不相交开集 V 和 W 分别含有点 $h(x_1)$和 $h(x_2)$. 让 $S=[x_1, V]\cap[x_2, W]$, 由定理 4.3.2, S 是 h 在 $C_\alpha(X)$中的邻域. 因为 f*是几乎满的, 存在 $g\in C(Y)$使得 $f^*(g)\in S$, 从而 $g(f(x_1)\in V$ 且 $g(f(x_2))\in W$, 因此 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 故 f 是单的. ▮

由例 4.3.9 中的空间$C(\mathbb{I}, D)$易说明定理 4.5.6 中假设“L 含有非平凡的道路”是不可省略的. 在适当的附加条件下定理 4.5.6(2)是可逆的(练习 4.5.3). 一般说来, $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$不是满的. 如取 $X=(-1, 0)\cup(0, 1)$, $Y=(-1, 1)$, $L=\mathbb{R}$具有通常的欧几里得拓扑. 定义 $f:X\to Y$ 使得当 $x\in(-1, 0)$时, $f(x)=1+x$; 当 $x\in(0, 1)$时, $f(x)=-x$, 则 f 是连续的单射. 若 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$是满射, 定义 $h:X\to L$ 使得 $h(x)=x$, 则 $h\in C(X, L)$, 那么存在 $g\in C(Y, L)$使得 $f^*(g)=h$, 即对于每一 $x\in X$ 有 $g(f(x))=x$, 于是当 $y\in(-1, 0)$时, $g(y)=-y$; 当 $y\in(0, 1)$时, $g(y)=y-1$. 从而 g 在点 0 不连续. 矛盾, 所以 $f^*:C(Y, L)\to C(X, L)$不是满射.

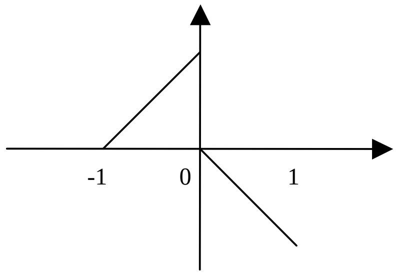

图 f*非满函数

为了讨论 f*的连续性, 下面对 k 网络的概念(定义 3.3.11)作自然的推广. 设α和β都是

空间 X 的子集族，称 β 是一个 α 网络(α-network)，如果对于每一 $A\in\alpha$ 及 A 在 X 中的邻域 U 存在 β 的有限子集 β' 使得 $A\subset\bigcup\beta'\subset U$. 这时也称 α 由 β 逼近(α is approximated by β).

定理 4.5.7 设 α 是空间 X 的闭网络，β 是空间 Y 的闭网络且 $f\in C(X, Y)$.

(1) 如果 β 是 $f(\alpha)$网络，则 $f^*:C_\beta(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是连续的；

(2) 如果 $f(\alpha)$是 β 网络，则 f^*是相对开的；

(3) 如果 $f(\alpha)$与 β 可相互逼近，则 $f^*:C_\beta(Y, L)\to C_\alpha(X, L)$是嵌入.

证明 只须证明(1)和(2)成立.

(1) 设 $f^*(g)\in[A, V]$，其中 $g\in C_\beta(Y, L)$，$A\in\alpha$，且 V 是 L 的开集. 那么 $f(A)\subset g^{-1}(V)$，于是存在 $\{B_i\}_{i\le n}\subset\beta$ 使得 $f(A)\subset\bigcup_{i\le n}B_i\subset g^{-1}(V)$. 让 $S=\bigcap_{i\le n}[B_i, V]$，则 S 是 g 在 $C_\beta(Y)$ 中的邻域且 $f^*(S)\subset[A, V]$. 故 f^*是连续的.

(2) 由于 $f(\alpha)$是 β 网络，所以 f 是满射，又由定理 4.5.6(1)的证明, f^*是单的，因而只须对 $C_\beta(Y)$的基本子基的元证明. 设 $g\in[B, V]$，其中 $B\in\beta$ 且 V 是 L 的开集，那么 $B\subset g^{-1}(V)$，于是存在 $\{A_i\}_{i\le n}\subset\alpha$ 使得 $B\subset\bigcup_{i\le n}f(A_i)\subset g^{-1}(V)$. 定义 $T=\bigcap_{i\le n}[A_i, V]$，则 T 是 $f^*(g)$在 $C_\alpha(X)$中的邻域且 $T\cap f^*(C_\beta(Y))\subset f^*([B, V])$. 事实上，若对于某个 $h\in C_\beta(Y)$有 $f^*(h)\in T$，则 $h(B)\subset h(\bigcup_{i\le n}f(A_i))=\bigcup_{i\le n}h(f(A_i))\subset V$. 故 f^*是相对开的函数. ■

推论 4.5.8 设 $f\in C(X, Y)$，那么

(1) $f^*:C_p(Y, L)\to C_p(X, L)$是连续的，且当 f 是满函数时 f^*是嵌入；

(2) $f^*:C_k(Y, L)\to C_k(X, L)$是连续的，且当 f 是紧覆盖映射(定义 2.4.8)时 f^*是嵌入. ■

下面给出保证 f^*是闭嵌入的条件. 先证明商映射的一个刻画.

引理 4.5.9 设 $f:X\to Y$ 是连续的满射，则 f 是商映射当且仅当对于每一拓扑空间 L 和函数 $g:Y\to L$, $g\circ f$ 的连续性导出 g 的连续性.

证明 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若函数 $g:Y\to L$ 使得 $g\circ f$ 是连续的，让 W 是 L 的开集，那么 $f^{-1}(g^{-1}(W))=(g\circ f)^{-1}(W)$是 X 的开集. 因为 f 是商映射，所以 $g^{-1}(W)$是 Y 的开集，从而 g

是连续的.

反之, 设 V 是 Y 的子集且 $f^{-1}(V)$是 X 的开集. 让 L 是集合 Y 赋予由 f 诱导的商拓扑且让 $g:Y\to L$ 是恒等映射. 由于 $g\circ f$ 是商映射, 且$(g\circ f)^{-1}(g(V))=f^{-1}(V)$, 所以 g(V)是 L 的开集. 由 g 的连续性, $V=g^{-1}(g(V))$是 Y 的开集. 故 f 是商映射. █

定理 4.5.10 设 $f\in C(X, Y)$是商映射且 L 是 T_2 空间, 则 $f^*(C(Y, L))$是 $C_p(X, L)$的闭集.

证明 让 $g\in C(X, L)\setminus f^*(C(Y, L))$. 设当 $x, z\in X$ 时若 $g(x)\neq g(z)$, 则 $f(x)\neq f(z)$. 对于每一 $y\in Y$, 如果存在 r_1, $r_2\in gf^{-1}(y)$, 则存在 x, $z\in f^{-1}(y)$使得 $r_1=g(x)$且 $r_2=g(z)$, 由于 f(x)=f(z), 于是 $r_1=g(x)=g(z)=r_2$, 故 $g(f^{-1}(y))$是单点集. 定义 $h:Y\to L$ 使得对于每一 $y\in Y$, $h(y)=g(f^{-1}(y))$. 因为 $g=h\circ f$ 且 f 是商映射, 由引理 4.5.9, h 是连续的, 于是 $g\in f^*(C(Y))$, 矛盾. 因而, 存在 $x, z\in X$ 使得 $g(x)\neq g(z)$且 f(x)=f(z). 设 U 和 V 是 L 中 g(x)和 g(z)的不相交邻域, 那么 $g\in[x, U]\cap[z, V]$, 而$[x, U]\cap[z, V]$是 $C_p(X)$的开集. 如果 $q\in[x, U]\cap[z, V]$, 那么 $q(x)\neq q(z)$. 而 f(x)=f(z), 于是 $q\notin f^*(C(Y))$. 因此$[x, U]\cap[z, V]\cap f^*(C(Y))=\varnothing$. 故 $f^*(C(Y))$是 $C_p(X)$的闭集. █

定理 4.5.10 中的点态收敛拓扑用更精的拓扑来代替仍成立. 该定理的逆命题见定理 6.0.7.

4. 赋值函数

设 X 和 L 是拓扑空间, 定义赋值函数(evaluation function)e: $X\times C(X, L)\to L$ 为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$, e(x, f)=f(x).

关于赋值函数的连续性有下述充分条件.

定理 4.5.11 设 X 和 L 是拓扑空间. 如果α是正则空间 X 的闭邻域基, 则 $e:X\times C_\alpha(X, L)\to L$ 是连续的.

证明 先把赋值函数表示为内射与恒等函数的复合函数. 让 1 表示由单点组成的拓扑空间, $i_X:X\to C(1, X)$和 $j_L:L\to C(1, L)$是内射. 仍用 id 表示恒等函数, 定义 $i_X\times id:X\times C(X, L)\to C(1, X)\times C(X, L)$为对于每一 $x\in X$ 及 $f\in C(X, L)$有$(i_X\times id)(x, f)=(i_X(x), f)$. 再让 $\Phi:C(1, X)\times C(X, L)\to C(1, L)$是复合函数(见定理 4.5.3 前). 那么赋值函数 $e=j_L^{-1}\circ\Phi\circ(i_X\times id)$. 事实

上，对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$, $j_L^{-1}\circ\Phi\circ(i_X\times id)(x, f)=j_L^{-1}\circ\Phi(c_x, f)=j_L^{-1}\circ f\circ c_x=j_L^{-1}\circ c_{f(x)}=j_L^{-1}\circ j_L(f(x))=f(x)=e(x, f)$. 这时赋值函数的连续性来自上式及定理 4.5.1, 定理 4.5.3. ▮

再由推论 4.5.4 有

推论 4.5.12 如果 X 是局部紧的 T_2 空间，则 $e:X\times C_k(X, L)\to L$ 是连续的. ▮

如果 X 和 L 是拓扑空间并且对于每一 $x\in X$, 定义在 x 的赋值函数 $e_x:C(X, L)\to L$ 为对于每一 $f\in C(X, L)$有 $e_x(f)=e(x, f)=f(x)$. 因为对于每一 $x\in X$ 和 L 的开集 V 有 $e_x^{-1}(V)=[x, V]$, 所以 $e_x:C_p(X, L)\to L$是连续的. 因而对于 C(X, L)的集开拓扑或一致收敛拓扑, e_x 总是连续的(定理 4.3.2 和推论 4.4.3).

拓扑空间 Y 的子集 B 称为 Y 的一个收缩核(retract), 如果存在连续函数 $r:Y\to B$ 使得对于每一 $y\in B$ 有 r(y)=y. 称 r 为 Y 到 B 的收缩(retraction)[53]. 引理 2.6.5 表明对于任一强零维度量空间 X 及非空闭子集 F, 存在 X 到 F 的闭收缩.

推论 4.5.13 设 $i:L\to C(X, L)$是内射且 $e_x:C(X, L)\to L$ 是在 x 的赋值函数. 则 $e_x\circ i$ 是 L 上的恒等函数. 若 α 是空间 X 的闭网络，则 $i\circ e_x:C_\alpha(X, L)\to i(L)$是收缩.

证明 对于第一部分，如果 $y\in L$, 则 $e_x\circ i(y)=e_x(c_y)=c_y(x)=y$. 对于第二部分，由定理 4.5.1, $i\circ e_x$ 是连续的. 如果 $f\in i(L)$, 则 $i\circ e_x(f)=i(f(x))=c_{f(x)}=f$. ▮

因而如果 α 是空间 X 的闭网络，则 L 可以认为是 $C_\alpha(X, L)$的收缩核. 特别地，对于由连续函数保持的性质，为了使 $C_\alpha(X, L)$具有这性质, L 必须具有这性质.

虽然, X 不能自然地嵌入 $C_\alpha(X, L)$, 但是赋值函数可以达到 X 自然地嵌入 $C_\beta(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$的目的.

对角线函数 $\Delta:X\to L^{C(X, L)}$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C(X, L)$有 $\Delta(x)(f)=f(x)$, 于是 $\Delta(x)=e_x$. 如果 α 是完全正则且 T_1 空间 X 的闭网络且 $\mathbb{R}$ 是实数空间，由对角线引理(定理

[53] 这两个概念均是 1931 年波兰数学家 K. Borsuk(1905-1982)定义. Borsuk 是波兰数学家 S. Mazurkiewicz (1888-1945)的学生.

5.4.2), Δ是从 X 到 $C_p(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$的嵌入. 事实上, 点态收敛拓扑可以适当地加强.

推论 4.5.14 如果α是完全正则的T_1空间 X 的闭邻域基, β是空间$C_\alpha(X, \mathbb{R})$的紧网络, 则$\Delta: X \to C_\beta(C_\alpha(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入.

证明 由对角线引理, 只须证明Δ是连续的. 设$x \in X$, $B \in \beta$, V 是$\mathbb{R}$的开集且$\Delta(x) \in [B, V]$. 由定理 4.5.11, 赋值函数 $e: X \times C_\alpha(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$是连续的. 由于$\Delta(x) \in [B, V]$, 所以$\{x\} \times B \subset e^{-1}(V)$, 由 B 的紧性, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得$U \times B \subset e^{-1}(V)$(练习 1.1.6), 于是$\Delta(U) \subset [B, V]$, 所以$\Delta$在 x 连续. ∎

由此, 如果 X 是局部紧的T_2空间, 则$\Delta: X \to C_k(C_k(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入. 作为诱导映射的应用, 上述结果可减弱至 X 是 k 空间(定义 1.6.4).

推论 4.5.15 如果完全正则的T_1空间 X 是 k 空间, 则$\Delta: X \to C_k(C_k(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$是嵌入.

证明 为了证明Δ是嵌入, 由对角线引理, 只须证明Δ的连续性. 因为 X 是 k 空间, 由定理 1.6.8, 存在局部紧的T_2空间 Z 和商映射 q: $Z \to X$. 由引理 4.5.9, 又只须证明$\Delta \circ q$是连续的. 让Δ': $Z \to C_k(C_k(Z))$是 Z 上的对角线函数, 由推论 4.5.14, Δ'是连续的. 让$q^*: C_k(X) \to C_k(Z)$和q^{**}: $C_k(C_k(Z)) \to C_k(C_k(X))$分别是诱导函数和二次诱导函数, 再由推论 4.5.8(2), 它们都是连续的. 下面证明$\Delta \circ q = q^{**} \circ \Delta'$. 如果 $z \in Z$ 且 $f \in C_k(X)$, 则$q^{**} \circ \Delta'(z)(f) = \Delta'(z) \circ q^*(f) = \Delta'(z)(f \circ q) = f(q(z)) = \Delta \circ q(z)(f)$. 故$\Delta$是嵌入. ∎

5. 和函数

设 $\mathcal{X}$ 是空间族, 让$\oplus\mathcal{X}$表示空间族 $\mathcal{X}$ 的拓扑和(定义 1.4.8). 对于每一 $X \in \mathcal{X}$, 让σ_X: $X \to \oplus\mathcal{X}$是自然内射(natural injection). 如果 L 是一空间, 让$L^{\mathcal{X}}$表示空间族$\{L^X : X \in \mathcal{X}\}$.

和函数(sum function)S: $L^{\oplus\mathcal{X}} \to \prod L^{\mathcal{X}}$定义为对于每一 $f \in L^{\oplus\mathcal{X}}$和 $X \in \mathcal{X}$ 有$p_{L^X}(S(f)) = f \circ \sigma_X$. 对于两个因子的和函数 S: $L^{X_1 \oplus X_2} \to L^{X_1} \times L^{X_2}$, 若 $f \in L^{X_1 \oplus X_2}$且$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, 则 $S(f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$. 和函数是函数空间上一种用途广泛的函数指数性质. 和函数可以自然地限制到连续函数空间上. 如果 $\mathcal{X}$ 是空间族, 让 $C(\mathcal{X}, L)$表示集族$\{C(X, L) : X \in \mathcal{X}\}$. 注意到函数$f \in L^{\oplus\mathcal{X}}$是连续的当且仅当对于每一$X \in \mathcal{X}$, $f \circ \sigma_X$是连续的.

定理 4.5.16 设 $\mathscr{X}$ 是空间族. 如果对于每一 $X\in\mathscr{X}$, α_X 是 X 的闭网络且让 $\beta=\bigcup\{\sigma_X(\alpha_X):X\in\mathscr{X}\}$, 则和函数 $S:C_\beta(\oplus\mathscr{X},L)\to\prod\{C_{\alpha_X}(X,L):X\in\mathscr{X}\}$是同胚.

证明 先证明 $S: C(\oplus\mathscr{X}, L)\to\prod C(\mathscr{X}, L)$是双射. 定义函数 $S':\prod L^{\mathscr{X}}\to L^{\oplus\mathscr{X}}$使得对于每一 $g\in\prod L^{\mathscr{X}}$ 和 $X\in\mathscr{X}$ 有 $S'(g)\circ\sigma_X=p_{L^X}(g)$. 让 $f\in L^{\oplus\mathscr{X}}$, 那么对于每一 $X\in\mathscr{X}$ 有 $S'(S(f))\circ\sigma_X=p_{L^X}(S(f))=f\circ\sigma_X$, 于是 $S'\circ S(f)=S'(S(f))=f$. 另一方面, 让$g\in\prod L^{\mathscr{X}}$, 那么对于每一 $X\in\mathscr{X}$ 有 $p_{L^X}(S(S'(g)))=S'(g)\circ\sigma_X=p_{L^X}(g)$, 因而 $S\circ S'(g)=S(S'(g))=g$. 故 $S(C(\oplus\mathscr{X}, L))=\prod C(\mathscr{X}, L)$且 S 是双射.

对于每一$X\in\mathscr{X}$, $A\in\alpha_X$ 和L的开集V, 有 $S^{-1}(p^{-1}_{L^X}([A, V]))=[\sigma_X(A), V]$, 于是 $S([\sigma_X(A), V])=p^{-1}_{L^X}([A, V])$, 所以 S 是同胚. ∎

推论 4.5.17 如果 $\mathscr{X}$ 是空间族, 则和函数 $S:C_k(\oplus\mathscr{X}, L)\to\prod C_k(\mathscr{X}, L)$和 $S:C_p(\oplus\mathscr{X}, L)\to\prod C_p(\mathscr{X}, L)$是同胚.

证明 对于每一$X\in\mathscr{X}$, 让α_X是X的所有非空紧子集的族. 令$\beta=\bigcup\{\sigma_X(\alpha_X):X\in\mathscr{X}\}$, 则 β 是 $\oplus\mathscr{X}$ 的闭网络, $\oplus\mathscr{X}$ 的所有非空紧子集的族包含了 β 且由 β 逼近. 因而, 如果 $id:\oplus\mathscr{X}\to\oplus\mathscr{X}$是恒等映射, 那么由定理 4.5.7(3), $id^*:C_\beta(\oplus\mathscr{X}, L)\to C_k(\oplus\mathscr{X}, L)$是同胚. 再由定理 4.5.16, 和函数 $S:C_k(\oplus\mathscr{X}, L)\to\prod C_k(\mathscr{X}, L)$是同胚. 类似地证明点态收敛拓扑的情形. ∎

6. 积函数

让$\mathscr{L}$是空间族, $\prod\mathscr{L}$表示族$\mathscr{L}$中空间的积空间. 对于每一$L\in\mathscr{L}$, 让 $p_L:\prod\mathscr{L}\to L$ 是投影函数. 如果 X 是一空间, 用$\mathscr{L}^X$表示族$\{L^X:L\in\mathscr{L}\}$.

积函数(product function)$P:(\prod\mathscr{L})^X\to\prod\mathscr{L}^X$定义为对于每一 $f\in(\prod\mathscr{L})^X$和 $L\in\mathscr{L}$, 有 $p_{L^X}(P(f))=p_L(f)$. 对于两个因子的积函数 $P:(L_1\times L_2)^X\to L_1{}^X\times L_2{}^X$, 若 $f\in(L_1\times L_2)^X$且 $x, z\in X$, 则 $P(f)(x, z)=(p_1f(x), p_2f(z))$. 积函数也可以自然地限制到连续函数空间上. 如果X是一空间且$\mathscr{L}$是空间族, 让 $C(X,\mathscr{L})$表示集族$\{C(X, L):L\in\mathscr{L}\}$.

定理 4.5.18 设 X 是一空间且 $\mathscr{L}$ 是空间族. 如果α是 X 的闭网络, 则 $P:C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})\to\prod C_\alpha(X,\mathscr{L})$是连续的. 如果$\alpha$是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, 则 P 是同胚.

证明 先证明 $P:C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})\to\prod C_\alpha(X, \mathscr{L})$是双射. 定义函数 $P':\prod\mathscr{L}^X\to(\prod\mathscr{L})^X$使得对于每一 $g\in\prod\mathscr{L}^X$和 $L\in\mathscr{L}$ 有 $p_L\circ P'(g)=p_{L^X}(g)$. 若 $f\in(\prod\mathscr{L})^X$, 对于每一 $L\in\mathscr{L}$ 有 $p_L\circ P'\circ P(f)=p_{L^X}(P(f))=p_L\circ f$, 于是 $P'\circ P(f)=f$. 类似地可以证明对于每一 $g\in\prod\mathscr{L}^X$ 有 $P\circ P'(g)=g$. 因而 $P'=P^{-1}$. 故 $P(C(X, \prod\mathscr{L}))=\prod C(X,\mathscr{L})$且 P 是双射.

注意到, 对于每一 $L\in\mathscr{L}$, $A\in\alpha$和 L 的开集 V, $P^{-1}(p_{L^X}^{-1}([A, V]))=(p_{L^X}\circ P)^{-1}([A, V])=[A, p_L^{-1}(V)]$. 事实上, $f\in[A, p_L^{-1}(V)]$, 当且仅当 $p_L\circ f(A)\subset V$, 当且仅当$(p_{L^X}\circ P)(f)(A)\subset V$, 当且仅当 $f\in(p_{L^X}\circ P)^{-1}([A, V])$. 所以 P 是连续的. 若$\alpha$是 X 的遗传闭的紧网络, 由引理 4.3.12, $\{[A, p_L^{-1}(V)] : A\in\alpha, V$ 是 L 的开集$\}$是 $C_\alpha(X, \prod\mathscr{L})$的子基. 由于$P([A, p_L^{-1}(V)])=p_{L^X}^{-1}([A, V])$, 故 P 是同胚. ▌

练习

4.5.1 设μ是 T_2 空间 L 上相容的一致结构, 则内射 $i:L\to C_\mu(X, L)$是闭嵌入.

4.5.2 若 C(X, L)的子集 F 分离空间 X 中的点, 则 Δ_F 是单的.

4.5.3 设 $f\in C(X, Y)$, 如果α是空间 X 的紧网络, Y 是完全正则的 T_1 空间且 f 是单的, 则 $f^*:C(Y, \mathbb{R})\to C_\alpha(X, \mathbb{R})$是几乎满的.

4.5.4 设α, β分别是空间 X 和完全正则空间 Y 的紧网络, $f\in C(X, Y)$, 那么(1) $f^*:C_\beta(Y, \mathbb{R})\to C_\alpha(X, \mathbb{R})$是连续的当且仅当 $f(\alpha)$由β逼近; (2) f^*是相对开函数当且仅当$\beta_{|f(X)}$由 $f(\alpha)$逼近; (3) 让 X=Y, $C_\alpha(X, \mathbb{R})=C_\beta(X, \mathbb{R})$当且仅当$\alpha$与$\beta$可相互逼近.

4.5.5 设 Y 是空间 X 的可数次拓扑和. 证明: 对于点态收敛拓扑或紧开拓扑, 函数空间 $C(X, \mathbb{R}^\omega)$同胚于 $C(Y, \mathbb{R})$.

§4.6　几个经典定理

本节介绍函数空间理论中的三个著名的经典定理: Stone-Weierstrass 定理, Ascoli 定理和 Nagata 定理.

$C(X, \mathbb{R})$的子集 F 称为代数(algebra), 如果 $f, g\in F$, $r\in\mathbb{R}$, 则 $f+g$, fg, $rf\in F$. 如果 $C(X, \mathbb{R})$的代数 F 含有非零常值函数, 则称 F 是酉代数(unitary algebra). 显然, C(X)自身是酉代数.

引理 4.6.1　设α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络. 如果F是函数空间 $C_\alpha(X)$的代数, 则 $\overline{F}$也是 $C_\alpha(X)$的代数.

证明　定义$\phi:C_\alpha(X)\times C_\alpha(X)\to C_\alpha(X)$为$\phi(f, g)=f+g$, 则$\phi$连续(定理 4.3.11)且 $\phi(F\times F)\subset F$, 于是$\phi(\overline{F}\times\overline{F})=\phi(\overline{F\times F})\subset\overline{\phi(F\times F)}\subset\overline{F}$, 从而$\overline{F}$中两个函数的和仍属于$\overline{F}$. 同理, 利用函数$(f, g)\to fg$和$(r, f)\to rf$的连续性可以证明$\overline{F}$关于两个函数乘积, 数乘也是封闭的(练习 4.3.5). 故$\overline{F}$是代数. ∎

引理 4.6.2　$\sqrt{t}\in C(\mathbb{I})$是$\mathbb{I}$上多项式的一致收敛极限.

证明　由二项式定理知, 对于每一 $x\in[0, 1)$有 $1-\sqrt{1-x}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\binom{1/2}{n}\right|x^n$. 由于上述级数是正项级数, 所以对于每一 $x\in[0, 1)$, n 项部分和 $S_n(x)$满足$0\le S_n(x)\le 1-\sqrt{1-x}\le 1$, 又由于每一 $S_n(x)$在 x=1 是连续的, 所以 $S_n(1)\le 1$, 于是$\{S_n(1)\}$是单调有界的数列, 从而$\{S_n(1)\}$是收敛序列, 因此幂级数$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\binom{1/2}{n}\right|x^n$在$\mathbb{I}$上一致收敛. 这说明函数列$\{S_n(1-t)\}$在$\mathbb{I}$上一致收敛于极限函数 $1-\sqrt{t}$. 如果令 $P_n(t)=1-S_n(1-t)$, 则多项式 $P_n(t)$在$\mathbb{I}$上一致收敛于$\sqrt{t}$.

∎

引理 4.6.3　如果 F 是函数空间 $C_\alpha(X)$的闭的酉代数, 那么

(1) 若 $f\in F$, 则$|f|\in F$;

(2) 若 $f, g\in F$, 则 $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}\in F$.

证明　设 $f\in F$. 为了证明$|f|\in F$, 由 F 的闭性, 只须证明$|f|$在 $C_\alpha(X)$中的任一基本邻域$\bigcap_{i\le n}[A_i, V_i]$与F相交. 让 $K=\bigcup_{i\le n}A_i$, $\varepsilon=\min_{i\le n}\{d(|f|(A_i), \mathbb{R}\setminus V_i)\}$, 其中 d 是$\mathbb{R}$上的欧几

里得度量，则 K 是 X 的紧子集且 $\varepsilon>0$. 由 K 的紧性，存在 $b>0$ 使得对于每一 $x\in K$ 有 $|f(x)|\leq b$. 由引理 4.6.2, 存在多项式列 $\{P_n(t)\}$ 在 $\mathbb{I}$ 上一致收敛于 $\sqrt{t}$，于是 $\{bP_n(f^2/b^2)\}$ 在 K 上一致收敛于 $b\sqrt{f^2/b^2}=|f|$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $x\in K$ 时有 $|bP_m(f^2/b^2)(x)-|f|(x)|<\varepsilon$，因此 $bP_m(f^2/b^2)\in F\cap(\bigcap_{i\leq n}[A_i,V_i])$. 故 $|f|\in F$.

因为 $\max\{f, g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min\{f, g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$, 所以，若 $f, g\in F$, 则 $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}\in F$. ▮

定理 4.6.4 (M. H. Stone-Weierstrass 定理)设 α 是正则空间 X 的遗传闭的紧网络且 F 是 $C_\alpha(X)$ 的酉代数. 若 F 分离 X 中的点，则 F 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集.

证明 (4.1) 对于 X 中不同的点 y, z, 和实数 a, b, 存在 $h\in F$ 使得 $h(y)=a$ 且 $h(z)=b$.

由于 F 分离 X 中的点，存在 $g\in F$ 使得 $g(y)\neq g(z)$, 再由于 F 含有非零的常值函数，于是 $h=a+\dfrac{b-a}{g(z)-g(y)}(g-g(y))$ 是符合要求的函数.

为了证明 F 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集，只须证明 $\overline{F}$ 是 $C_\alpha(X)$ 的稠密子集，即每一 $f\in C_\alpha(X)$ 的基本邻域 $\bigcap_{i\leq n}[A_i,V_i]$ 与 $\overline{F}$ 相交. 设 $K=\bigcup_{i\leq n}A_i$，$\varepsilon=\min_{i\leq n}\{d(f(A_i),\mathbb{R}\setminus V_i)\}$, 则 K 是 X 的紧子集且 $\varepsilon>0$.

(4.2) 取定 $z\in K$, 存在 $g\in\overline{F}$ 使得 $g(z)=f(z)$ 且对于每一 $x\in K$ 有 $g(x)<f(x)+\varepsilon$.

由(4.1), 对于每一 $x\in K$, 存在 $h_x\in F$ 使得 $h_x(z)=f(z)$ 且 $h_x(x)<f(x)+\varepsilon/2$. 因为 h_x 的连续性，存在 x 在 X 中的邻域 V_x 使得当 $y\in V_x$ 时有 $h_x(y)<f(y)+\varepsilon$. 再由 K 的紧性，存在 K 的有限子集 $\{x_k\}_{k\leq m}$ 使得 $\{V_{x_k}\}_{k\leq m}$ 覆盖 K. 定义 $g=\min_{k\leq m}\{h_{x_k}\}$, 由引理 4.6.1 和引理 4.6.3, $g\in\overline{F}$ 且对于每一 $x\in K$, 存在 $k\leq m$ 使得 $x\in V_{x_k}$，于是 $g(x)\leq h_{x_k}(x)<f(x)+\varepsilon$.

(4.3) 存在 $g\in\overline{F}$ 使得对于每一 $x\in K$ 有 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

对于每一 $z\in K$, 存在 $g_z\in\overline{F}$ 满足(4.2). 由于 $g_z(z)=f(z)$, 于是 $f(z)-\varepsilon/2<g_z(z)$, 所以存在 z 在 X 中的邻域 V_z 使得当 $y\in V_z$ 时有 $f(y)-\varepsilon<g_z(y)$. 由 K 的紧性，存在有限子集族 $\{V_{x_j}\}_{j\leq l}$ 覆盖 K. 让 $g=\max_{j\leq l}\{g_{x_j}\}$, 则 $g\in\overline{F}$. 对于每一 $x\in K$, 存在 $j\leq l$ 使得 $x\in V_{x_j}$，于是 $f(x)-\varepsilon<g_{x_j}(x)\leq g(x)$, 再由(4.2), $g(x)=\max_{j\leq l}\{g_{x_j}(x)\}<f(x)+\varepsilon$，从而在 K 上有

$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

这表明 $g\in \overline{F}\cap(\bigcap_{i\le n}[A_i, V_i])$. 故 $\overline{F}=C_\alpha(X)$. ∎

定理 4.6.4 推广了 1885 年 K. Weierstrass 得到的数学分析中经典的 Weierstrass 逼近定理 (Weierstrass approximation theorem): 若 f 是闭区间[a, b]上的连续函数, 则存在多项式列 $\{P_n(x)\}$使其在[a, b]上一致收敛于 f. 而 M. H. Stone[1947]将其拓广为紧空间关于一致收敛拓扑的情形. 对于紧开拓扑的情形, 定理 4.6.4 的叙述来自 J. L. Kelley[1955], 证明取自 J. Dugundji[1966].

对于积空间 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 及 A 的非空子集 B, 定义投影函数(projective function)$p_B:\prod_{\alpha\in A}X_\alpha \to \prod_{\alpha\in B}X_\alpha$, 即对于每一 $x=(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 和 $\alpha\in B$ 有 $p_\alpha(p_B(x))=x_\alpha$.

例 4.6.5 对于无限集合 A 及 Tychonoff 方体$\mathbb{I}^A$, 若 $f\in C(\mathbb{I}^A, \mathbb{R})$, 则存在 A 的可数子集 B 和连续函数$\varphi:p_B(\mathbb{I}^A)\to\mathbb{R}$使得 $f=\varphi\circ p_B$.

证明 让 $X=\mathbb{I}^A$. 对于 A 的每一非空有限子集 F, 记 $C_F=\{\varphi\circ p_F\in C(X):\varphi\in C(\mathbb{I}^F)\}$. 令 $D=\bigcup\{C_F$: F 是 A 的非空有限子集$\}$, 则 D 是 $C_k(X, \mathbb{R})$的酉代数且分离 X 中的点, 由 Stone-Weierstrass 定理, D 是 $C_k(X)$的稠密子集. 因为 X 是紧空间, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $f_n\in D$ 使得 $\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|<1/n$, 于是存在 A 的非空有限子集 F_n 使得 $f_n\in C_{F_n}$. 令 $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, 则 B 是 A 的可数子集.

(5.1) 若 $x, x'\in X$ 且 $p_B(x)=p_B(x')$, 则 $f(x)=f(x')$.

事实上, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $p_{F_n}(x)=p_{F_n}(x')$, 于是 $f_n(x)=f_n(x')$, 从而 $|f(x)-f(x')|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x')-f(x')|<2/n$. 故 $f(x)=f(x')$.

定义函数$\varphi:p_B(X)\to\mathbb{R}$如下. 对于每一 $q\in p_B(X)$, 由(5.1), $f(p_B^{-1}(q))$是单点集, 定义 $\varphi(q)=f(p_B^{-1}(q))$. 显然, $f=\varphi\circ p_B$.

(5.2) $\varphi:p_B(X)\to\mathbb{R}$是连续的.

对于每一 $q\in p_B(X)$, 记 $r=\varphi(q)$, 取定 $x\in X$ 使得 $p_B(x)=q$, 则 $f(x)=r$. 让 W 是 r 在 $\mathbb{R}$ 中的邻域, 存在 X 中的基本开集 U 使得 $x\in U$ 且 $f(U)\subset W$. 再让 U’是 X 中的基本开集满足 $p_B(U')=p_B(U)$, $p_{A\setminus B}(U')=\mathbb{I}^{A\setminus B}$, 由 (5.1) 有 $f(U')=f(U)\subset W$. 再由 φ 的定义, $\varphi(p_B(U))=f(p_B^{-1}(p_B(U)))\subset f(p_B^{-1}(p_B(U')))=f(U')\subset W$, 而 $x\in U$, $q=p_B(x)\in p_B(U)$, 所以 $p_B(U)$ 是 q 在 $p_B(X)$ 中的邻域, 故 φ 是连续的. ▊

f 的值由可数个坐标决定, 这性质称为 f 依赖于可数个坐标(depend on countably many coordinates)或定理 6.1.1 介绍的因子引理的特例.

本节的第二部分介绍关于函数空间收敛性的 Ascoli 定理. 19 世纪末关于函数列的收敛性问题的研究在意大利十分活跃, 最重要的是 G. Ascoli[1883]引入等度连续性(equicontinuity). 作为 Ascoli 定理的现代发展, 下面利用均匀连续性给出 $C_k(X, L)$ 中紧子集的刻画.

设 X 是拓扑空间, L^X 的子集 F 称为均匀连续的(evenly continuous)(Kelley[1955]), 若对于每一 $x\in X$, $r\in L$ 和 r 的邻域 V, 存在 x 的邻域 U 和 r 的邻域 V’使得当 $f\in F$ 且 $f(x)\in V'$ 时有 $f(U)\subset V$, 即 $e(U\times(F\cap[x, V']))\subset V$, 其中 $e: X\times L^X\to X$ 是赋值函数. 显然, 均匀连续族的每一元是连续的.

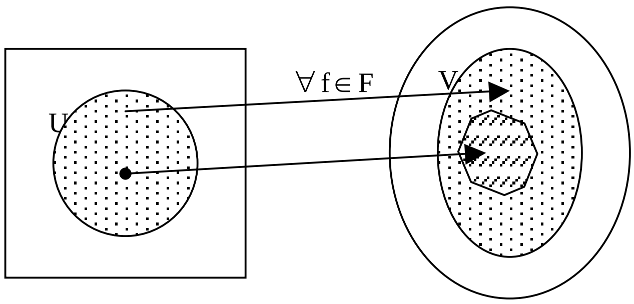

图　F 均匀连续

引理 4.6.6　设 L 是正则空间. 如果 F 是 C(X, L)的均匀连续子集, 那么 F 在 L^X 中的闭包也是均匀连续的.

证明　让 $\overline{F}$ 是 F 在 L^X 中的闭包. 对于每一 $x\in X$, $r\in L$ 和 r 的闭邻域 V, 由于 F 是均匀连续的, 存在 x 的邻域 U 和 r 的开邻域 V’使得当 $f\in F$ 且 $f(x)\in V'$ 时有 $f(U)\subset V$. 设 $f\in\overline{F}$ 且 $f(x)\in V'$, 由引理 4.4.11, 存在 F 中的网 $\{f_d\}_{d\in D}$ 点态收敛于 f, 再由定理 4.4.13, 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d>d_0$ 时有 $f_d(x)\in V'$. 如果 $u\in U$, 则当 $d>d_0$ 时有 $f_d(u)\in V$, 于是由 V 的闭性知 $f(u)\in V$, 因而 $f(U)\subset V$, 所以 $\overline{F}$ 是均匀连续的. 由此, F 在 L^X 中的闭包等于 F 在 $C_p(X, L)$ 中

的闭包. ▉

设 X, Y 和 L 是三个拓扑空间, 指数函数(exponential function)E:$L^{X\times Y}\to(L^X)^Y$定义为对于每一 $f\in L^{X\times Y}$, $x\in X$ 和 $y\in Y$ 有 E(f)(y)(x)=f(x, y). 易验证, 指数函数是双射(练习 4.6.1). 如果 $f\in C(X\times Y, L)$, 那么对于每一 $y\in Y$, $E(f)(y)\in C(X, L)$. 因而 $E(C(X\times Y, L))\subset C(X, L)^Y$. 为了简明起见, 指数函数在 C(X×Y, L)上的限制仍记为 E. 下面讨论何时 $E(C(X\times Y, L))\subset C(Y, C(X, L))$(引理 4.6.9)? 何时 E(C(X×Y, L))=C(Y, C(X, L))(引理 4.6.10)?

引理 4.6.7 设 Z 是紧空间, L 是正则空间. 若 $E:C(X\times Z, L)\to C(X, L)^Z$ 是指数函数, 则对于每一 $f\in C(X\times Z, L)$, E(f)(Z)是 C(X, L)的均匀连续的子集.

证明 设 $x\in X$, $r\in L$ 且 V 是 r 的开邻域, 取 L 的开集 V'使得 $r\in V'\subset\overline{V'}\subset V$. 让 p_2: $X\times Z\to Z$ 是投影函数, 定义 $Y=p_2((\{x\}\times Z)\cap f^{-1}(\overline{V'}))$, 则 Y 是 Z 的紧子集, 由定理 1.3.3, 投影函数 $p_1:X\times Y\to X$ 是闭映射, 于是 $U=X\setminus p_1((X\times Y)\setminus f^{-1}(V))$是 x 在 X 中的开邻域. 如果 $g\in E(f)(Z)$且 $g(x)\in V'$, 那么存在 $z\in Z$ 使得 g=E(f)(z), 于是 $f(x, z)=g(x)\in V$, 所以$(x, z)\in f^{-1}(V)$. 若 $x'\in U$, 则 $x'\notin p_1((Y\times X)\setminus f^{-1}(V))$, 于是$(x', z)\in f^{-1}(V)$, 从而 $g(x')=f(x', z)\in V$, 故 $g(U)\subset V$. 因此, E(f)(Z)是 C(X, L)的均匀连续的子集. ▉

引理 4.6.8 如果F是$C_p(X, L)$的均匀连续的子集, 那么赋值函数$e: X\times F\to L$是连续的. 反之, 如果 L 是正则空间, F 是$C_p(X, L)$的紧子集且 $e: X\times F\to L$ 是连续的, 那么 F 是均匀连续的.

证明 设 F 是均匀连续的, 让$(x, f)\in X\times F$ 且 V 是 e(x, f)=f(x)在 L 中的邻域, 则存在 x 的邻域 U 和 f(x)的邻域 V'使得当 $g\in F$ 且 $g(x)\in V'$时有 $g(U)\subset V$, 从而 $e(U\times[x, V'])\subset V$. 事实上, 若$(x', g)\in U\times[x, V']$, 则 $g(x)\in V'$, 于是 $g(x')\in V$, 即 $e(x', g)\in V$. 故 e 是连续的. 因为 E(e)(F)=F, 其中 $E:C(X\times F, L)\to C(X, L)^F$ 是指数函数, 由引理 4.6.7, 逆命题成立. ▉

C(X, L)的子集 F 称为在$x\in X$ 是点态有界的(pointwise bounded), 如果$\overline{e_x(F)}$是 L 的紧子集, 其中 $e_x:C_p(X, L)\to L$ 是在 x 的赋值函数. 回忆 $e_x(F)=\{f(x) : f\in F\}$, 有时记$e_x(F)$为 F(x). F 称为点态有界的, 如果 F 在 X 的每一点是点态有界的. 因为 e_x 总是连续的(见推论 4.5.12 后的说明), 如果 L 是 T_2 空间, 则 $C_p(X, L)$的每一个紧子集是点态有界的.

如果α是空间 X 的闭网络且 L 是 T_2 空间，则 $C_p(X, L) \le C_\alpha(X, L)$且 $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间(定理 4.3.2 和定理 4.3.5)，于是 $C_\alpha(X, L)$的紧子集是闭，点态有界的．引理 4.6.8 表明在一定的条件下，$C_\alpha(X, L)$的紧子集也是均匀连续的．

引理 4.6.9　设α是空间 X 的紧网络且 L 是正则的 T_1 空间，则 $C_\alpha(X, L)$的每一闭，点态有界且均匀连续的子集是紧的．

证明　先证明，若 Y 是拓扑空间，$f \in C(X \times Y, L)$，则 $E(f):Z \to C_\alpha(X, L)$是连续的，其中 $E:C(X \times Y, L) \to C_\alpha(X, L)^Y$ 是指数函数．设 $y \in Y$ 且[B, W]是 E(f)(y)在 $C_\alpha(X, L)$中的基本开邻域．对于每一 $x \in B$, $f(x, y) \in W$，分别存在 x 在 X 中的邻域 V_x 和 y 在 Y 中的邻域 U_x 使得 $f(V_x \times U_x) \subset W$．因为 B 是紧的，存在 B 的有限子集$\{x_i\}_{i \le n}$使得 $B \subset \bigcup_{i \le n} V_{x_i}$．让 $U = \bigcap_{i \le n} U_{x_i}$，则 U 是 y 的邻域且 $E(f)(U) \subset [B, W]$．事实上，对于每一 $y \in U$, $x \in B$，存在 $i \le n$ 使得 $x \in V_{x_i}$，于是 $E(f)(y)(x)=f(x, y) \in W$，即 $E(f)(U)(B) \subset W$，所以 $E(f)(U) \subset [B, W]$．故 E(f)是连续的．

设 F 是 $C_\alpha(X, L)$的闭，点态有界且均匀连续的子集．由引理 4.6.6, F 在 $C_p(X, L)$中的闭包Y是均匀连续的，又由引理 4.6.8，赋值函数 $e: X \times Y \to L$ 是连续的，于是 E(e)是连续的．因为 Y 是紧空间$\prod\{\overline{e_x(F)} : x \in X\}$的闭集，所以 Y 是 $C_p(X, L)$的紧子集，因而 E(e)(Y)=Y 是 $C_\alpha(X, L)$的紧子集．再由于F是 Y 在 $C_\alpha(X, L)$中的闭集，于是 F 是 $C_\alpha(X, L)$中的紧子集．█

若α是空间 X 的紧网络，由引理 4.6.9 第一段的证明，则对于每一空间 Y 有 $E(C(X \times Y, L)) \subset C(Y, C_\alpha(X, L))$．因而，对于每一空间 Y 有 $E(C(X \times Y, L)) \subset C(Y, C_k(X, L))$.

引理4.6.10　设X是T_2空间．若$X \times Y$是k空间，则指数函数$E:C(X \times Y, L) \to C(Y, C_k(X, L))$是满函数．

证明　让 $g \in C(Y, C_k(X, L))$．由于 $E:L^{X \times Y} \to (L^X)^Y$ 是双射，所以 $E^{-1}(g) \in L^{X \times Y}$．因为 $X \times Y$ 是 k 空间，只须证明 $E^{-1}(g)_{|A \times B}$ 是连续的(练习 1.6.3)，其中 A 和 B 分别是 X 和 Y 的非空紧子集．让 $j:A \to X$ 是包含映射，由推论 4.5.8(2)，诱导函数 $j^*:C_k(X, L) \to C_k(A, L)$是连

续的. 因为 A 是紧 T_2 的, 由推论 4.5.12, 赋值函数 $e:A\times C_k(A, L)\to L$ 是连续的. 让 $id:A\to A$ 是恒等映射, 则 $E^{-1}(g)_{|A\times B}=e\circ(id\times j^*)\circ(id\times g_{|B})$. 所以 $E^{-1}(g)\in C_k(X\times Y, L)$. ▮

1883 年 G. Ascoli 证明了断言: 闭区间[a, b]上的连续函数列含有一致收敛子列当且仅当它在[a, b]上是一致有界(uniformly bounded)和等度连续的. 这就是著名的 Ascoli 定理(或 Ascoli-Arzelà 定理). 它是建立紧算子谱理论(the spectral theory of compact operators)的一个关键定理(key theorem). 由 Bagley 和 Yang[1966]证明的下述定理是 Ascoli 经典定理的现代发展.

定理 4.6.11 (Ascoli 定理)设 X 是 T_2 的 k 空间, L 是正则的 T_1空间, 那么 $C_k(X, L)$的子集是紧的当且仅当它是闭, 点态有界且均匀连续的.

证明 由引理 4.6.9, 只须证明 $C_k(X, L)$的每一紧子集是闭, 点态有界且均匀连续的. 设 F 是 $C_k(X, L)$的紧子集. 则 F 是闭且点态有界的. 由 Cohen 定理(定理 1.6.11), $X\times F$ 是 k 空间, 再由引理 4.6.10, 指数函数 $E:C(X\times F, L)\to C(F, C_k(X, L))$是满的. 让 $e: X\times F\to L$ 是赋值函数, 则 E(e)是从 F 到 $C_k(X, L)$的包含函数, 所以 $E(e)\in E(C(X\times F, L))$, 而 E 是双射, 于是 e 是连续的. 由引理 4.6.8, F 必定是均匀连续的. ▮

本节的最后介绍 Nagata 定理. 它表明一定条件下函数空间 $C_p(X, \mathbb{R})$的代数拓扑结构决定了底空间 X 的拓扑结构. 记 $C_pC_p(X)=C_p(C_p(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. 如果 X 是完全正则的 T_1空间, 由对角线引理(定理 4.5.2), $\Delta:X\to C_pC_p(X)$是嵌入, 所以 X 中的元(实际上应为$\Delta(X)$中的元)可视为是 $C_p(X)$上的实值连续函数. 这时, 对于每一 $x\in X$ 和 $f\in C_p(X)$有 $x(f)=f(x)$, 即 x 是 x 的赋值函数. 借助函数空间的代数运算, 对于 X 中的元通过嵌入可进行线性运算.

置 $L_p(X)=\{\sum_{i\le n} r_i x_i\in C_pC_p(X) : x_i\in X,\ r_i\in\mathbb{R},\ i\le n\in\mathbb{N}\}$, 则 $L_p(X)$是线性空间 $C_pC_p(X)$的由 X 生成的子空间. 关于 $C_pC_p(X)$中加法运算和数乘运算, $L_p(X)$是线性拓扑空间 $C_pC_p(X)$(练习 4.3.5)中包含 X 的最小的线性子空间.

线性拓扑空间 L 的对偶(dual)空间是 L 上所有实值线性连续函数的集合赋予点态收敛拓扑的空间, 记其为 L'.

引理 4.6.12 设 X 是完全正则的 T_1空间, 则 $L_p(X)=(C_p(X))'$.

证明 显然, 对于每一 $x\in X$, x 是 $C_p(X)$上的实值线性连续函数. 所以 $L_p(X)$的元是 $C_p(X)$上的实值线性连续函数, 即 $L_p(X)\subset(C_p(X))'$.

反之, 设$\phi\in(C_p(X))'$. 让 f 是 $C_p(X)$上的零函数, 由于ϕ是线性的, 则$\phi(f)=0$. 再由ϕ的连续性, 存在 X 的有限子集 S 和 0 在$\mathbb{R}$中的开邻域 V 使得$\phi([S, V])\subset(-1, 1)$(见定理 4.3.11 后的说明). 设 $S=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, 其中当 $i\neq j$ 时有 $x_i\neq x_j$.

断言: 如果 $g\in C_p(X)$且当 $i\leq n$ 时有 $g(x_i)=0$, 则$\phi(g)=0$. 事实上, 对于每一 $k\in\mathbb{N}$有 $kg\in[S, V]$, 于是$|\phi(kg)|<1$, 因此 $k|\phi(g)|<1$, 即$|\phi(g)|<1/k$, 所以$\phi(g)=0$.

现在, 对于每一 $i\leq n$, 取 $g_i\in C_p(X)$使得 $g_i(x_i)=1$ 且 $g_i(S\setminus\{x_i\})\subset\{0\}$, 令 $r_i=\phi(g_i)\in\mathbb{R}$. 下面证明对于每一 $g\in C_p(X)$有$\phi(g)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)$. 事实上, 置 $h=g-(\sum_{i\leq n}g(x_i)g_i)$, 则 $h\in C_p(X)$且对于每一 $i\leq n$ 有 $h(x_i)=0$, 于是$\phi(h)=0$. 由于ϕ是线性的, $\phi(g)=\phi(\sum_{i\leq n}g(x_i)g_i)=\sum_{i\leq n}g(x_i)\phi(g_i)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)$. 这表明 $\phi(g)=\sum_{i\leq n}r_i g(x_i)=(\sum_{i\leq n}r_i x_i)(g)$. 从而$\phi=\sum_{i\leq n}r_i x_i\in L_p(X)$. 因此$(C_p(X))'\subset L_p(X)$. ∎

设 G 和 H 是两个关于各自的乘法运算封闭的集合, 称函数 $f: G\to H$ 是一个同态(homomorphism), 若每一 $f(xy)=f(x)f(y)$. 若同态 $f: G\to H$ 是一个双射, 则称 f 是一个同构(isomorphism). 如果存在 G 与 H 之间的同构, 则称 G 与 H 同构. 如果 G 和 H 是两个拓扑群, 且存在函数 $f: G\to H$ 既是同构又是同胚, 则称拓扑群 G 与 H 拓扑同构(topological isomorphism). 如果 G 与 H 是两个拓扑环, 且存在函数 $f: G\to H$ 既是同胚又关于环的加法运算和乘法运算都是同构, 则称拓扑环 G 与 H 是拓扑同构.

定理 4.6.13 (Nagata 定理[1949])设 X, Y 是完全正则的 T_1空间. 如果拓扑环 $C_p(X)$和 $C_p(Y)$拓扑同构, 则空间 X 和 Y 同胚.

证明 函数$\phi:C_p(X)\to\mathbb{R}$称为可乘的, 如果对于任意的 $f, g\in C_p(X)$有$\phi(fg)=\phi(f)\phi(g)$. 对于空间 X, 记$\tilde{X}=\{\phi\in C_p C_p(X):\phi$是 $C_p(X)$上非零的线性可乘函数$\}$. 由引理 4.6.12, $X\subset\tilde{X}\subset L_p(X)$. 可类似定义$\tilde{Y}$使得$Y\subset\tilde{Y}\subset L_p(Y)$. 设 h 是拓扑环$C_p(X)$到拓扑环$C_p(Y)$的拓扑同构, 定义$\Theta:\tilde{X}\to\tilde{Y}$使得$\Theta(\phi)=\phi\circ h$, 则$\Theta$是拓扑空间$\tilde{X}$到拓扑空间$\tilde{Y}$的同胚

(练习 4.6.4), 所以只须证明 $X=\tilde{X}$ 和 $Y=\tilde{Y}$. 下面证明 $\tilde{X}\subset X$.

设 $\phi\in\tilde{X}$, 则 $\phi\neq 0$. 由于 $\phi\in L_p(X)$, 存在 $n\in\mathbb{N}$和 $x_i\in X$, $r_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}(i\le n)$使得 $\phi=\sum_{i\le n} r_i x_i$, 其中当 $i\neq j$ 时有 $x_i\neq x_j$. 如果 $n>1$, 则存在 X 中不相交的开集 V_1 和 V_2 使得对于 i=1, 2 有 $x_i\in V_i\subset X\setminus\{x_j : 3\le j\le n\}$, 于是存在 $f_i\in C_p(X)$使得 $f_i(x_i)=1/r_i$ 且 $f_i(X\setminus V_i)=\{0\}$, 这时 $\phi(f_i)=\sum_{j\le n} r_j f_i(x_j)=1$. 所以 $\phi(f_1f_2)=\phi(f_1)\phi(f_2)=1$. 然而 $f_1f_2\equiv 0$, 因而 $\phi(f_1f_2)=0$, 矛盾. 故只能是 n=1, 则 $\phi=r_1x_1$. 设 g 是 $C_p(X)$上取值恒为 1 的函数, 则 $g=g^2$ 且 $\phi(g)=\phi(g^2)=\phi(g)\phi(g)$. 另一方面, $\phi(g)=r_1x_1(g)=r_1g(x_1)=r_1$. 从而 $r_1^2=r_1$, 所以 $r_1=1$, 于是 $\phi=x_1\in X$. 因此 $\tilde{X}\subset X$. ▮

$C_p(X)$是线性拓扑空间. 如果存在线性函数 $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$是同胚, 则称 $C_p(X)$与 $C_p(Y)$线性同胚(linear homeomorphism). 这时也称拓扑空间 X 与 Y 是 l 等价的(l-equivalent). 显然, 两拓扑同构的连续函数环是线性同胚的.

例 4.6.14 存在不同胚, 但 l 等价的空间(van Mill[2001]).

设 $X=[0,1]\cup[2,3]$, $Y=[0,2]\cup\{3\}$都赋予欧几里得子空间拓扑, 则 X 与 Y 不同胚. 定义 $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$使得对于每一 $f\in C_p(X)$和 $y\in Y$ 有

$$\phi(f)(y)=\begin{cases} f(y), & 0\le y\le 1 \\ f(y+1)-(f(2)-f(1)), & 1<y\le 2 \\ f(2)-f(1), & y=3 \end{cases}.$$

则 ϕ 是线性同胚(练习 4.6.5). ▮

练习

4.6.1 指数函数 $E:L^{X\times Y}\to(L^Y)^X$ 是双射.

4.6.2 在积空间$\mathbb{R}^X$ 中, F 是$\mathbb{R}^X$ 的紧子集当且仅当 F 是$\mathbb{R}^X$ 的闭子集且对于每一 $x\in X$, $F[x]=\{f(x) : f\in F\}$是$\mathbb{R}$的有界集.

4.6.3 设 X 是完全正则的 T_1 空间, 证明: (1) X 是 $L_p(X)$的闭集; (2) $L_p(X)$是 $C_pC_p(X)$

的闭集; (3) X 是 $C_p C_p$ (X)的闭集.

4.6.4 证明: 定理 4.6.13 定义的函数$\Theta : \tilde{X} \to \tilde{Y}$是同胚.

4.6.5 证明: 例 4.6.14 定义的函数ϕ 是线性同胚.