第四章　一致空间与函数空间

本书第二部分由第四、五、六章组成, 目的是介绍连续函数空间的拓扑性质. 这与前三章讨论的紧空间与度量空间的拓扑性质是密切相关的. 拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想来自函数序列的点态收敛和一致收敛的概念. 早在 1878 年意大利数学家 U. Dini(1845-1918), 1883 年意大利数学家 G. Ascoli(1843-1896), 1885 年德国数学家 K. Weierstrass(1815-1897), 1889 年意大利数学家 C. Arzelà(1847-1912)就开始从事函数空间理论的研究. 特别是 1897 年法国数学家 J. Hadamard(1865-1963)在第一届国际数学家大会(ICM)上, 考虑了闭区间[0, 1]上全体连续函数所构成的族, 并于 1903 年定义了这个空间上的函数. 1906 年 Hadamard 的学生、法国数学家 M. Fréchet(1878-1973)[1906]利用集合论的观念, 将前人结果统一成为一个抽象的理论, 把它们的共同点归纳起来而且加以推广, 形成为名副其实的泛函分析. Fréchet 在抽象空间中引进具有欧几里得空间距离性质的“距离”观念, 并研究了上确界度量拓扑. 在一般拓扑学发展早期, 拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是点态收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年美国数学家 R. Fox(1913-1973)[1945]定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑, 引导人们关注函数空间的拓扑性质. 1976 年 A. Arhangel’skiĭ[1976]的论文“On some topological spaces that occur in functional analysis”是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志, 其中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得空间 X 具有性质 P 当且仅当函数空间 $C(X, \mathbb{R})$具有性质 Q. 由于 $C(X, \mathbb{R})$上具有较丰富的结构, 在此只能介绍一些最基本的内容. 为讨论上述中心问题的需要, 本章主要介绍与函数空间相关的一致空间、拓扑群及函数空间上的基本拓扑与自然映射.

§4.1　一致空间

一致空间可以作为介于拓扑空间与度量空间之间的一类空间. 自 1938 年法国 Bourbaki 学派的领导人之一 A. Weil(1906-1998)[1938]引进以来, 关于它的理论可以独立于拓扑空间理论之外, 但是与拓扑空间有密切的联系. 本节介绍的一致空间仅仅是为了讨论函数空间理论的需要而选取适当的部分.

设 X 是一非空集合. 记 $\Delta=\{(x, x) : x\in X\}$, 称 Δ 为 $X\times X$ 的对角线(diagonal). 对于 $X\times X$ 的子集 A 和 B, 及 $x\in X$, 记 $A^{-1}=\{(y, x) : (x, y)\in A\}$, $A\circ B=\{(x, y) :$ 存在 $z\in X$ 使得$(x, z)\in A$

且$(z, y)\in B\}$, $A[x]=\{y\in X : (x, y)\in A\}$. 若 $A=A^{-1}$, 则 A 称为对称的(symmetric).

定义 4.1.1 设μ是集合 $X\times X$ 的一个非空子集族且满足下述条件:

(U1) 对于每一 $U\in\mu$, $\Delta\subset U$;

(U2) 若 $U\in\mu$, 则 $U^{-1}\in\mu$;

(U3) 若 $U\in\mu$, 则存在 $V\in\mu$ 使得 $V\circ V\subset U$;

(U4) 若 $U, V\in\mu$, 则 $U\cap V\in\mu$;

(U5) 若 $U\in\mu$ 且 $U\subset V\subset X\times X$, 则 $V\in\mu$.

则称μ是 X 上的一致结构(uniformity), (X, μ)称为一致空间(uniform space).

设(X, μ)是一致空间, 称μ的子集β是μ的基(base), 如果对于每一 $U\in\mu$ 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\subset U$. 若β是一致结构μ的基, 则β就完全决定了μ. 称μ的子集δ是μ的子基(subbase), 若δ的元的所有有限交的族为μ的基. 这些与拓扑空间中基与子基的定义是相似的.

易验证

引理 4.1.2 对于非空集合 X, $X\times X$ 的子集族δ是 X 的某个一致结构的子基, 如果δ满足:

(US1) $\Delta\subset\bigcap\delta$;

(US2) 若 $U\in\delta$, 则存在 $V\in\delta$ 使得 $V\subset U^{-1}$;

(US3) 若 $U\in\delta$, 则存在 $V\in\delta$ 使得 $V\circ V\subset U$. ∎

集合 X 的每一一致结构可诱导 X 上的拓扑结构. 设(X, μ)是一致空间. 令 $\tau=\{G\subset X :$ 对于每一 $x\in G$ 存在 $U\in\mu$ 使得 $U[x]\subset G\}$, 则τ是 X 上的拓扑. 事实上, 显然, $\varnothing$, $X\in\tau$. 其次, 设 G_1, $G_2\in\tau$, 对于每一 $x\in G_1\cap G_2$, 存在 U_1, $U_2\in\mu$ 使得 $U_1[x]\subset G_1$ 且 $U_2[x]\subset G_2$, 记 $V=U_1\cap U_2$, 则 $V\in\mu$ 且 $V[x]\subset G_1\cap G_2$, 故 $G_1\cap G_2\in\tau$. 再次, 设对于每一 $a\in A$ 有 $G_a\in\tau$, 对于每一 $x\in\bigcup_{a\in A}G_a$, 存在 $a\in A$ 使得 $x\in G_a$, 于是存在 $U\in\mu$ 使得 $U[x]\subset G_a\subset\bigcup_{a\in A}G_a$, 故 $\bigcup_{a\in A}G_a\in\tau$. 为了避免混淆, “空间”仍表示拓扑空间, 而一致空间中的“一致”一般不省略.

定义 4.1.3 设(X, μ)是一致空间. 令τ ={G$\subset$X ：对于每一 x$\in$G 存在 U$\in\mu$使得 U[x]$\subset$G}, τ 称为由一致结构μ诱导的 X 上的拓扑(topology induced by the uniformity), τ 也称为一致结构μ的拓扑(topology of uniformity)或一致拓扑(uniform topology).

若未特别说明, 一致空间上的拓扑指一致拓扑. 设 f 是定义在一致空间(X, μ)到一致空间(Y, ν)的函数, 称 f 关于μ和ν是一致连续的(uniformly continuous), 若对于每一 F$\in\nu$, 存在 M$\in\mu$使得ϕ(M)$\subset$F, 其中定义ϕ:X$\times$X$\to$Y$\times$Y 为ϕ(x, z)=(f(x), f(z)).

f 关于μ和ν是一致连续的, 当且仅当对于每一 F$\in\nu$有ϕ^{-1}(F)$\in\mu$, 当且仅当对于每一 F$\in\nu$集{(x, z)$\in$X$\times$X : ϕ(x, z)$\in$F}$\in\mu$.

引理4.1.4 设(X, μ)和(Y, ν)都是一致空间, 若函数f: (X, μ)$\to$(Y, ν)一致连续, 则 f 是连续的.

证明 对于Y的开集V, 若 x$\in f^{-1}$(V), 则存在 F$\in\nu$使得 F[f(x)]$\subset$V. 由于 f 是一致连续的, 存在M$\in\mu$使得ϕ(M)$\subset$F. 下面证明 M[x]$\subset f^{-1}$(V). 若 z$\in$M[x], 则(x, z)$\in$M, 于是ϕ(x, z)=(f(x), f(z))$\in$F, 即 f(z)$\in$F[f(x)]$\subset$V, 因而 z$\in f^{-1}$(V). 所以 f^{-1}(V)是 X 的开集, 故 f 是连续函数. ∎

引理4.1.5 设(X, μ)是一致空间. 对于每一 x$\in$X, 令μ_x={U[x] : U$\in\mu$}, 则μ_x是 X 的一致拓扑在 x 的邻域基.

证明 只须证明对于每一 x$\in$X 和 U$\in\mu$, U[x]包含点 x 的开邻域. 让 G={y$\in$X ：存在 V$\in\mu$使得 V[y]$\subset$U[x]}, 则 x$\in$G$\subset$U[x]. 下面证明 G 是一致拓扑的开集. 对于每一 y$\in$G 存在 V$\in\mu$使得 V[y]$\subset$U[x], 又存在 W$\in\mu$使得 W$\circ$W$\subset$V. 对于任意的 u$\in$W[y]及 v$\in$W[u], 则(y, u)$\in$W 且(u, v)$\in$W, 于是(y, v)$\in$W$\circ$W$\subset$V, 所以 v$\in$V[y]$\subset$U[x], 从而 W[u]$\subset$U[x], 因此 u$\in$G, 所以 W[y]$\subset$G, 故 G 是 X 的开集. ∎

引理 4.1.6 设(X, μ)是一致空间. 令

$$\beta=\{B\in\mu : B \text{ 是 } X\times X \text{ 中对称的闭集}\},\ \lambda=\{C\in\mu : C \text{ 是 } X\times X \text{ 中对称的开集}\}.$$

则β和λ都是μ的基.

证明 仅证明β是μ的基. 对于每一 U$\in\mu$, 由于对于每一 V$\in\mu$, $V\cap V^{-1}$是μ的对称元, 所以存在μ的对称元 V 使得 V$\circ$V$\circ$V$\subset$U. 设(x, y)$\in\overline{V}$(关于一致拓扑的闭包), 那么

存在$(s, t)\in (V[x]\times V[y])\bigcap V$, 于是$(x, s)\in V$, $(s, t)\in V$ 且$(y, t)\in V$, 由于 V 是对称的, 从而$(x, y)\in V\circ V\circ V$, 这说明$\overline{V}\subset V\circ V\circ V$, 因此$\overline{V}\subset U$. 另一方面, 由于从$X\times X$到$X\times X$的函数$(x, y)\mapsto (y, x)$是同胚的, 所以$\overline{V}=\overline{V^{-1}}=\overline{V}^{-1}$, 因而$\overline{V}$是$\mu$的对称元. 故$\mu$的所有闭的对称元所构成的集族$\beta$是$\mu$的一个基. ▮

若 X 的一致结构μ的元 V 是$X\times X$的闭集, 对于每一固定的$x\in X$, 由于从空间 X 到积空间$X\times X$的函数$y\mapsto (x, y)$是连续的, 所以$V[x]$是 X 的闭集.

引理 4.1.7 设(X, μ)是一致空间, 则一致结构μ的拓扑是 T_0[51]的当且仅当对角线$\Delta=\bigcap\mu$.

证明 设τ是一致结构μ的拓扑. 若(X, τ)是 T_0空间, 则对于每一$(x, y)\in X\times X\setminus\Delta$, 存在对称的$U\in\mu$使得$y\notin U[x]$或$x\notin U[y]$, 于是$(x, y)\notin U$, 所以$\Delta=\bigcap\mu$. 反之, 若$\Delta=\bigcap\mu$, 则对于 X 中不同的点 x 和 y, 存在$U\in\mu$使得$(x, y)\notin U$, 选取对称的$V\in\mu$使得$V\circ V\subset U$, 若存在$z\in V[x]\bigcap V[y]$, 那么$(x, z), (z, y)\in V$, 于是$(x, y)\in V\circ V\subset U$, 矛盾. 因此$V[x]\bigcap V[y]=\varnothing$, 故$(X, \tau)$是$T_2$空间. 因而$(X, \tau)$是$T_0$空间. ▮

设(X, τ)是拓扑空间. 若存在 X 上的一致结构μ使得μ诱导的拓扑就是τ, 则称μ是与 X 的拓扑相容的一致结构. 每一度量自然地诱导出一致结构. 设(X, ρ)是一个度量空间, 对于实数 $r>0$, 定义 $U_r=\{(x, y)\in X\times X : \rho(x, y)<r\}$. 令$\mu=\{U\subset X\times X$: 存在 $r>0$ 使得 $U_r\subset U\}$, 则μ是 X 上的一致结构(注意到 $U_r\circ U_r\subset U_{2r}$). μ称为(X, ρ)的通常的一致结构. μ的每一个元都是对角线Δ在积空间$X\times X$中的邻域. $X\times X$的子集族$\{U_r : r>0\}$是 X 的通常一致结构的基. 对于每一 $x\in X$ 及 $r>0$, $U_r[x]=B(x, r)$, 所以μ是与 X 的拓扑相容的一致结构. 一致空间(X, μ)称为可(伪)度量化的, 若存在 X 上的(伪)度量ρ使得μ是由ρ诱导的一致结构.

引理 4.1.8 (度量化引理)设$\{U_n\}$是积集 $X\times X$ 中对称的集列且满足 $U_1=X\times X$, $\Delta\subset U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$, $n\in\mathbb{N}$, 则存在 X 上的伪度量 p 使得 $U_n\subset\{(x, y)\in X\times X$: p(x,

[51] 由苏联数学家 A. N. Kolmogorov(А. Н. Колмогоров, 1903-1987)定义，他是苏联数学家 N. Luzin(1883-1950)的学生.

y)$\le 1/2^n$ }$\subset$ U$_{n-1}$.

证明 定义函数 f:X$\times$X$\to$[0, 1]使得 f(x, y)=$\begin{cases}0\ ,\ (x,y)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{U}_i\\ 1/2^i,(x,y)\in\mathrm{U}_i\setminus\mathrm{U}_{i+1}\end{cases}$，则(x, y)$\in$U$_i$ 当且仅当 f(x, y)$\le 1/2^i$，且 f(x, x)=0, f(x, y)=f(y, x). 对于任意的 x, y$\in$X, 定义 p(x, y)为所有数 $\sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1,}x_i)$ 的下确界，其中 x$_0$, x$_1$,…, x$_k$ 是 X 的任意有限个点且 x$_0$=x, x$_k$=y. 则 p 满足三角不等式，所以 p 是 X 上的伪度量. 下面用归纳法证明(*).

(*) 对于 X 中的任意有限个点 x$_0$, x$_1$,…, x$_k$ 及 x$_0$=x, x$_k$=y, 有 f(x, y)/2$\le\sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1},x_i)$.

若 k=1, 显然有(*)成立. 设当 k<m($\ge$2)时有(*)成立，要证明当 k=m 时(*)成立. 令 a=$\sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1},x_i)$. 如果 a$\ge$1/2, 由于 f(x, y)$\le$1, 所以(*)成立. 如果 a<1/2, 若 a=0, 则对于 i=1, 2,…, m 有 f(x$_{i-1}$, x$_i$)=0, 于是对于每一 n$\in\mathbb{N}$有(x$_{i-1}$, x$_i$)$\in$U$_n$，因而(x, y)$\in$U$_n\circ$U$_n\circ\ldots\circ$U$_n$(m 个 U$_n$), 所以(x, y)$\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$，故 f(x, y)=0. 若 0<a<1/2, 那么或者 f(x$_0$, x$_1$)$\le$a/2, 或者 f(x$_{m-1}$, x$_m$)$\le$a/2. 由于(*)关于 x, y 的对称性，不妨设 f(x$_0$, x$_1$)$\le$a/2, 设 j 是使得 $\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1},x_i)$ $\le$ a/2 的最大自然数，那么 $\sum_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1},x_i)$ >a/2, 从而 $\sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1},x_i)\le$ a/2. 由归纳假设，有 f(x$_0$, x$_j$)/2 $\le\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1},x_i)$ $\le$ a/2, f(x$_{j+1}$, x$_m$)/2 $\le\sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1},x_i)\le$ a/2, 所以 f(x$_0$, x$_j$)$\le$a, f(x$_{j+1}$, x$_m$)$\le$a. 此外，由于 a=$\sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1},x_i)$，所以 f(x$_j$, x$_{j+1}$)$\le$a. 设 l 是使得 1/2$^l\le$a 的最小自然数，则 $l\ge$2, 且 f(x$_0$, x$_j$)$\le$1/2^l, f(x$_j$, x$_{j+1}$)$\le$1/2^l, f(x$_{j+1}$, x$_m$)$\le$1/2^l, 从而(x$_0$, x$_j$), (x$_j$, x$_{j+1}$), (x$_{j+1}$, x$_m$)$\in$U$_l$，于是(x$_0$, x$_m$)=(x, y)$\in$U$_{l-1}$，因此 f(x, y)$\le$1/2$^{l-1}\le$2a, 即 f(x, y)/2$\le$a, 故(*)成立.

由 p 的定义及(*)有 f(x, y)/2$\le$p(x, y)$\le$f(x, y)成立. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 置 E$_n$={(x, y)$\in$X$\times$X : p(x, y)$\le$1/2^n}. 如果(x, y)$\in$U$_n$，那么 f(x, y)$\le$1/2^n，于是 p(x, y)$\le$1/2^n，所以(x, y)$\in$E$_n$. 如

果$(x, y)\in E_n$，那么 $p(x, y)\le 1/2^n$，则 $f(x, y)\le 1/2^{n-1}$，所以$(x, y)\in U_{n-1}$. 故 $U_n\subset E_n\subset U_{n-1}$.

█

定理 4.1.9 (Weil 度量化定理[1938])一致空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0空间且 X 的一致结构具有可数基.

证明 设一致空间X是度量空间，则由X的度量自然诱导出的一致结构具有可数基. 反之，设 T_0空间 X 的一致结构具有可数基$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，不妨设 $U_1=X\times X$, $\Delta=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ 且 $U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$，$n\in\mathbb{N}$. 则由度量化引理中构造的函数 p 是 X 上的度量且满足 $U_n\subset\{(x, y)\in X\times X: p(x, y)\le 1/2^n\}\subset U_{n-1}$，于是 X 上的一致结构由度量 p 所诱导，故一致空间 X 是可度量化空间. █

若仅设一致结构(X, μ)具有可数基，则由μ诱导的一致拓扑是伪度量空间.

定理 4.1.10 空间 X 的拓扑τ是 X 的一致拓扑当且仅当(X, τ)是完全正则空间.

证明 设 X 上的拓扑τ由 X 的一致结构μ导出. 对于每一 $x\in X$ 及 X 中不含有点 x 的闭集 F，由引理 4.1.5 和引理 4.1.6，存在μ的由对称开集组成的集列$\{U_n\}$使得每一 $U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$ 且 $U_1[x]\subset X\setminus F$. 由引理 4.1.2，$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 上某一一致结构的子基，记由$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$生成的 X 上的一致结构为$\nu$，则一致结构$\nu$具有可数基. 从定理 4.1.9，由$\nu$诱导的 X 上的拓扑$\eta$是伪度量拓扑，X 上存在关于$\eta$连续的实值函数 $f: X\to[0, 1]$使得 $f(x)=0$ 且 $f(X\setminus U_1[x])\subset\{1\}$. 这时拓扑$\tau$精于$\eta$，所以 f 关于$\tau$连续，$f(x)=0$ 且 $f(F)=1$. 故(X, τ)是完全正则空间.

反之，设(X, τ)是完全正则空间. 让$\{p_s\}_{s\in S}$是 X 上全体连续的(即每一 $p_s: X\times X\to[0, +\infty)$是连续的)伪度量的集. 对于每一 $s\in S$，$r>0$，让 $U_{s,r}=\{(x, y)\in X\times X: p_s(x, y)<r\}$. 则$\{U_{s,r}: s\in S, r>0\}$是 X 上某个一致结构$\mu$的子基，下面证明$\tau$是$\mu$的一致拓扑. 对于每一 $x\in X$，$U_{s,r}[x]=B_{p_s}(x, r)\in\tau$. 另一方面，对于任意的 $z\in O\in\tau$，由于τ是完全正则的拓扑，存在关于τ连续的 X 上的实值函数 $f: X\to[0, 1]$使得 $f(z)=0$ 且 $f(X\setminus O)\subset\{1\}$. 定义 $p: X\times X\to[0, +\infty)$使得每一 $p(x, y)=|f(x)-f(y)|$，则 p 是 X 上连续的伪度量，于是存在 $s\in S$ 使得 $p=p_s$. 这时 $z\in U_{s,1/2}[z]\subset O$. 故$\tau$一致于由$\mu$诱导的 X 上的拓扑. █

一般说来，完全正则空间上可能存在不同的相容的一致结构.

例 4.1.11 存在离散，但不可度量化的一致空间(Kelley[1955]).

设 X 是序数集$[0,\ \omega_1)$. 对于每一 $a<\omega_1$，让 $U_a=\{(x, y)\in X^2 : x=y,\ 或 x\geq a 且 y\geq a\}$. 令 $\beta=\{U_a : a<\omega_1\}$，则 $\Delta\subset U_a=U_a\circ U_a=U_a^{-1}$，于是 β 是 X 上某一一致结构 μ 的基. 设 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 μ 的可数族，存在 $a_n<\omega_1$ 使得 $U_{a_n}\subset W_n$，令 $a=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$，则 $a<\omega_1$，取 $a<b<\omega_1$，则对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $U_b\subset U_{a_n}\subset W_n$，于是 $W_n\not\subset U_b$，即 μ 没有可数基. 由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9)，一致空间$(X,\ \mu)$不是可度量化的. 对于每一 $a<\omega_1$，取 $a<b<\omega_1$，则 $U_b[a]=\{a\}$是由 μ 诱导的一致拓扑的开集，所以拓扑空间 X 是离散空间. 显然，$\{\Delta\}$也是 X 上某一一致结构 ν 的基，一致空间$(X,\ \nu)$是可度量化空间，由 ν 诱导的 X 上的一致拓扑是离散拓扑，但是 $\mu\neq\nu$，所以 X 上存在不同的相容的一致结构. ▮

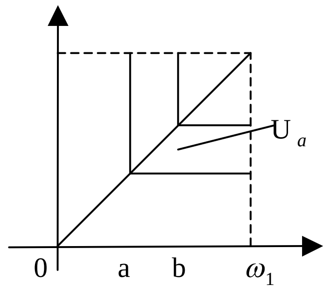

图 不可度量化的一致空间

然而，紧空间上仅有唯一相容的一致结构.

定理 4.1.12 设$(X,\ \tau)$是 T_2 的紧拓扑空间. 则 μ 是与 τ 相容的一致结构当且仅当 μ 的每一元是对角线 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域.

证明 设 μ 是与 τ 相容的一致结构. 对于每一 $M\in\mu$，存在 μ 的对称元 V 使得 $V\circ V\circ V\subset M$. 设 $(x,\ y)\in V$，若 $(u,\ v)\in V[x]\times V[y]$，则 $(u,\ v)\in V\circ V\circ V$，所以 $V[x]\times V[y]\subset V\circ V\circ V\subset M$，而 $V[x]\times V[y]$ 是 $(x,\ y)$ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域，于是 $\Delta\subset V\subset M^{\circ}$，因此 M 是 Δ 在 $X\times X$ 中的邻域.

反之，由于$(X,\ \tau)$是 T_2 的紧拓扑空间，于是$(X,\ \tau)$是完全正则空间，由定理 4.1.10，X 上存在与 τ 相容的一致结构 ν，则 ν 的每一元是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域. 设 V 是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域. 让 $\beta=\{B\in\nu : B 是 X\times X 的闭集\}$，由引理 4.1.6，$\beta$ 是 ν 的基. 若$(x,\ y)\in\bigcap\beta$，由于 $V[x]$是 x 在 X 中的邻域，存在 $B\in\beta$ 使得 $B[x]\subset V[x]$，于是 $y\in V[x]$，从而$(x,\ y)\in V$，因此 $\bigcap\beta\subset V$. 因为 $X\times X$ 是紧空间，所以存在 β 的有限子集 $\{B_i\}_{i\leq n}$ 使得

$\bigcap_{i\le n} B_i \subset V$(练习 1.1.2), 故 $V\in\nu$. 因此, $V\in\nu$ 当且仅当 V 是 Δ 在积空间 $X\times X$ 中的邻域.

■

推论 4.1.13 从 T_2 的紧一致空间到一致空间的每一连续函数是一致连续的.

证明 设函数 f: $(X, \mu)\to(Y, \nu)$是连续的, 其中(X, μ)是 T_2 的紧一致空间. 于是(Y, ν)也是紧空间.对于每一 $F\in\nu$, 由定理 4.1.12, F 是 $Y\times Y$ 的对角线的邻域. 定义 $\phi: X\times X\to Y\times Y$ 为 $\phi(x, z)=(f(x), f(z))$, 则 ϕ 是连续的, 于是 $\phi^{-1}(F)$是 $X\times X$ 的对角线的邻域, 再由定理 4.1.12, $\phi^{-1}(F)\in\mu$, 所以 f 是一致连续的. ■

Weil 的一致空间理论是基于积集 $X\times X$ 的子集建立的, J. Tukey[1940]利用 X 的覆盖也建立了与 A. Weil 的理论相平行的一致空间理论.

练习

4.1.1 设(X, μ)是一致空间. 对于 X 的子集 A, 证明: $A^\circ=\{x\in X$: 存在 $U\in\mu$ 使得 $U[x]\subset A\}$.

4.1.2 验证引理 4.1.2.

4.1.3 验证引理 4.1.6 中的 λ 是一致空间(X, μ)的基.

4.1.4 设(X, μ)是一致空间, p 是 X 上的伪度量, 称 p 是关于 μ 一致的(uniform with respect to μ), 如果对于每一 r>0, 存在 $U\in\mu$ 使得当$(x, y)\in U$ 时有 $p(x, y)<r$. 证明: 若 p 是 X 上关于 μ 一致的伪度量, 则 p: $X\times X\to[0, +\infty)$是连续的.

4.1.5 设一致空间(X, μ)具有可数基, 利用 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13)证明: 若 X 是 T_0空间, 则 X 是可度量化的拓扑空间.

4.1.6 设(X, μ)是一致空间且 $U\in\mu$, 则存在 X 上关于 μ 一致的伪度量 p 使得$\{(x, y)\in X\times X : p(x, y)<1\}\subset U$.

§4.2 拓扑群

回忆群的定义. 设 G 是一个非空集合. G 的一个二元运算"·"是指 $G\times G$ 到 G 的一个函数. 若 G 上存在一个二元运算"·"满足下述条件:

(G1) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x, y, z\in G$(结合律);

(G2) 存在 $e\in G$ 使得对于每一 $x\in G$ 有 $e\cdot x=x\cdot e=x$;

(G3) 对于每一 $x\in G$, 存在 $x^{-1}\in G$ 使得 $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$.

则称$(G,\cdot)$是一个群(group), 简记为群 G. e 称为群 G 的单位元, x^{-1} 称为 x 的逆元. 为了叙述的简明起见, 对于群$(G,\cdot)$及任意的 $x, y\in G$, 简记 $x\cdot y=xy$. 若群 G 关于二元运算是对称的, 即每一 $xy=yx$, 则 G 称为交换群(commutative group)或 Abel 群(Abel group). 交换群称为加群(additive group), 如果将群的二元运算叫做加法, 用符号“+”表示. 在加群中, 单位元 e 一般用 0 来表示, x 的逆元一般用-x 来表示. 19 世纪末李群理论的发展为 1925 年起一般拓扑群的研究提供了充分的准备. 1927 年波兰数学家 F. Leja(1885-1979)[1927]给出了第一个 Hausdorff 拓扑群的现代定义.

定义 4.2.1 对于非空集合 G, 如果 G 既是一个群又是一个拓扑空间, 并且满足下述条件, 则称 G 是一个拓扑群(topological group):

(TG1) $f(x, y)=xy$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数;

(TG2) $g(x)=x^{-1}$ 是 $G\to G$ 的连续函数.

条件(TG1)和(TG2)表明群结构与拓扑结构是相容的, 它等价于从积空间 $G\times G$ 到空间 G 的函数$(x, y)\mapsto xy^{-1}$是连续的.

类似地, 可定义拓扑环. 设非空集合 G 称为一个环(ring), 如果存在 G 上的二元运算“+”(加法)和“·”(乘法)满足:

(R1) $(G, +)$是一个加群;

(R2) $(G,\cdot)$关于“·”运算是封闭的且对于 G 中任意元 a, b, c 有 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$(乘法结合律);

(R3) 对于 G 中任意元 a, b, c 有 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$(分配律).

对于非空集合 G, 如果 G 既是一个环又是一个拓扑空间, 并且满足下述条件, 则称 G 是一个拓扑环(topological ring):

(TR1) $f(x, y)=x-y$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数;

(TR2) $g(x, y)=xy$ 是 $G\times G\to G$ 的连续函数.

如实数集$\mathbb{R}$关于通常的加法和欧几里得拓扑是拓扑群, 记为$(\mathbb{R}, +)$. 对于任一群 G, 取离散拓扑就成了拓扑群.

引理 4.2.2 拓扑群是齐性空间.

证明 设 G 是拓扑群. 考虑 G 到自身的右乘函数. 对于每一 $s\in G$, 定义 $r_s: G\to G$ 使得

$r_s(x)=xs$. 记 ϕ_1:G$\to$G×G 使得 $\phi_1(x)=(x, s)$, ϕ_2:G×G$\to$G 使得 $\phi_2(x, s)=xs$, 则 $r_s=\phi_2\circ\phi_1$. 显然, ϕ_1和 ϕ_2 都是连续函数, 因此 r_s 是连续的. 又有 $(r_s)^{-1}=r_{s^{-1}}$ 也是连续的, 于是 r_s 是同胚. 对于任意的 $x, y\in G$, 有 $x^{-1}y\in G$ 且 $r_{x^{-1}y}(x)=y$. 故 G 是齐性空间. ▮

由此, 若 $\mathscr{B}$ 是拓扑群 G 在单位元 e 的邻域基, 则对于每一 $x\in G$, $\{xB : B\in\mathscr{B}\}$是 G 在 x 的邻域基. 设 A, B 是群 G 的子集, 记 $AB=\{ab : a\in A, b\in B\}$, $A^{-1}=\{a^{-1} : a\in A\}$.

定理 4.2.3 (Weil[1936])拓扑群是一致空间.

证明 设(G, τ)是拓扑群. 让 $\mathscr{B}$ 是 G 的单位元 e 的邻域基. 对于每一 $B\in\mathscr{B}$, 令 $B_l=\{(x, y)\in G\times G : x^{-1}y\in B\}$, 则$(B_l)^{-1}=(B^{-1})_l$. 令 $\mu=\{U\subset G\times G$: 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $B_l\subset U\}$, 则 μ 是 G 上的一致结构. 为此只须证明对于每一 $B\in\mathscr{B}$ 存在 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $V_l\circ V_l\subset B_l$. 定义 f:G×G$\to$G 使得每一 $f(x, y)=xy$. 由拓扑群的条件(TG1), f 是连续函数, 而 $f(e, e)=e\in B$, 所以存在 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $f(V\times V)=VV\subset B$. 设$(x, y)\in V_l\circ V_l$, 存在 $z\in G$ 使得 $x^{-1}z\in V$ 且 $z^{-1}y\in V$, 于是 $x^{-1}y=(x^{-1}z)(z^{-1}y)\in VV\subset B$, 所以$(x, y)\in B_l$. 故 $V_l\circ V_l\subset B_l$.

对于每一 $x\in G$, $\{B_l[x] : B\in\mathscr{B}\}$是一致结构 μ 的拓扑在 x 的邻域基. 由于每一 $B_l[x]=xB$ 且$\{xB : B\in\mathscr{B}\}$是 τ 在 x 的邻域基, 故 τ 就是由 μ 诱导的一致拓扑. 因此, 拓扑群 G 是一致空间. ▮

定理 4.2.3 中的一致结构称为 G 上的左一致结构(left uniformity).

推论 4.2.4 拓扑群是完全正则空间. ▮

推论 4.2.5 (Birkhoff[52]度量化定理[1936])拓扑群是可度量化空间当且仅当它是第一可数的 T_0空间.

证明 只须证明充分性. 设拓扑群(G, τ)是第一可数的 T_0空间. 让$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G 在单位元 e 的可数邻域基. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $U_n=\{(x, y)\in G\times G : x^{-1}y\in B_n\}$. 由定理 4.2.3 的证明知, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G 上一致结构的基, 于是 T_0空间 G 的一致结构具有可数基. 由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9), G 是可度量化空间. ▮

---

[52] 美国数学家 Garrett Birkhoff(1911-1996), 他的父亲是数学家 George David Birkhoff(1884-1944)(法国数学家 J. H. Poincaré(1854-1912)和美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)的学生).

为了今后的应用，下面介绍与拓扑群相关的拓扑向量空间. 本书只讨论实数域$\mathbb{R}$上的线性空间. 对于非空集合 G, 设(G, +)是线性空间且(G, τ)是拓扑空间, 如果满足下述条件:

(TV1) 乘积空间 $G\times G$ 到空间 G 的函数$(x, y)\mapsto x+y$ 是连续的;

(TV2) 乘积空间$\mathbb{R}\times G$ 到空间 G 的函数$(r, x)\mapsto rx$ 是连续的.

则称 G 是一个拓扑向量空间(topological vector space). 拓扑向量空间也称为线性拓扑空间(linear topological spaces). 条件(TV1)和(TV2)表明 G 的线性运算关于 G 的拓扑是连续的. 有时为了标明 G 取拓扑τ 也把拓扑向量空间记为(G, τ).

引理 4.2.6 拓扑向量空间是拓扑群. ▉

练习

4.2.1 设 G 是拓扑群. 考虑 G 到自身的左乘函数. 对于每一 $s\in G$, 定义 $l_s: G\to G$ 使得 $l_s(x)=sx$. 证明: 左乘函数是同胚.

4.2.2 设 G 是拓扑群, A, B 是 G 的子集, $x\in G$, 那么

(1) 若 A 是 G 的开集(闭集), 则 Ax 和 xA 也是 G 的开集(闭集);

(2) 若 A 是 G 的开集, 则 AB 和 BA 都是 G 的开集;

(3) 若 A, B 都是 G 的紧集, 则 AB 是 G 的紧集.

4.2.3 设 G 是拓扑群, 下述条件相互等价:

(1) G 是 T_0 空间;

(2) G 是完全正则空间;

(3) {e}是闭集.

4.2.4 在定理 4.2.3 的证明中若以 $B_r=\{(x, y)\in G\times G : xy^{-1}\in B\}$, 则同样生成 G 上的一致结构(右一致结构).

4.2.5 由 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13)证明 Birkhoff 度量化定理(推论 4.2.5).