§3.4 紧覆盖映象

基于逆紧映射是 k 映射(练习 1.6.4, 定理 1.3.6)这一重要特性, 1964 年 E. Michael 引入了紧覆盖映射的概念(定义 2.4.8). 逆紧映射保持可度量性(定理 2.4.2). 度量空间的紧覆盖映象具有怎样的内在刻画? 本节将首先介绍 1973 年 E. Michael 和 K. Nagami 的工作, 然后介绍几类与紧覆盖映射相关的映射类.

定理 3.4.1 (Michael, Nagami[1973])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖映象当且仅当 X 的每一紧子集可度量化.

证明 设 $f:M\to X$ 是紧覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于 X 的每一非空紧子集 K, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K. 由于 L 的紧性及推论 1.1.9, $f_{|L}:L\to K$ 是逆紧映射, 又由于 L 是度量空间, 所以 K 是度量空间.

反之, 设空间 X 的每一紧子集是可度量化的. 让 $\mathcal{K}$ 是 X 的全体非空紧子集组成的集族. 令 M 是 X 的覆盖 $\mathcal{K}$ 的拓扑和, f 是从 M 到 X 上的自然映射, 则 M 是可度量化空间, f 是紧覆盖映射. 故 X 是可度量化空间的紧覆盖映象. ▮

引理 3.4.2 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 Y 是 k 空间, 则 f 是商映射.

证明 对于空间 Y 的子集 F, 设 $f^{-1}(F)$是 X 的闭集. 对于 Y 的每一紧子集 K, 由于 f 是紧覆盖映射, 存在 X 的紧子集 L 使得 f(L)=K. 这时 $L\cap f^{-1}(F)$是 X 的紧子集, 于是 $f(L\cap f^{-1}(F))=K\cap F$ 是 Y 的紧子集, 因为 Y 是 T_2 空间, 所以 $K\cap F$ 是 K 的闭集. 由于 Y 是 k 空间, F 是 Y 的闭集. 故 f 是商映射. ▮

由引理 3.2.1(引理 3.2.7, 引理 2.4.15)和引理 3.4.2(引理 3.2.6, 引理 3.2.9), 有下述推论.

推论 3.4.3 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的商(伪开, 可数双商)映象当且仅当 X 是每一紧子集可度量化的序列(Fréchet, 强 Fréchet)空间. ▮

在每一紧子集是第一可数的空间中, k 空间条件与序列空间条件是等价的. 这一结论证明如下: 设 k 空间 X 的每一紧子集是第一可数空间, 若 F 是 X 的序列闭集, 对于 X 的任一紧子集 K, 由引理 3.1.1, $F\cap K$ 是 K 的序列闭集, 由于 K 是第一可数的, 所以 K 的序列闭集 $F\cap K$ 是 K 的闭集, 而 X 是 k 空间, 故 F 是 X 的闭集, 因而 X 是序列空间. 这表明推论 3.4.3 中的序列空间条件可换为 k 空间条件.

为了获得度量空间的紧覆盖的开映象的内在刻画, 同时也为了§3.5 寻求度量空间的商 s 映象的内在特征做准备, 引入 cfp 覆盖的概念.

定义 3.4.4 (燕鹏飞[1997])设 K 是空间 X 的子集. $\mathcal{F}$ 称为 K 的 cfp 覆盖(cfp-covering), 若 $\mathcal{F}$ 是 K 在 X 中的(有限)覆盖且被 K 的闭集组成的有限覆盖精确加细.

(刘川, 戴牧民[1996])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, K 是 X 的子集. $\mathcal{P}$ 称为关于 K 具有性质 CC, 若 H 是 K 的紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域, 则存在 $\mathcal{P}$ 的(有限)子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 是 H 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{F}\subset$ V.

在讨论覆盖及精确加细的情形下, **约定: cfp 覆盖均是有限的.** cfp 意为"闭的有限分解"的英文缩写.

引理 3.4.5 设(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系. 若 K 是 X 的紧子集且存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 关于 K 具有性质 CC, 则存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K.

证明 记 $\mathcal{P}=\{\mathrm{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 不妨设 K 是 X 的非空子集. 由于 $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 是可数的, $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 的元组成 K 的 cfp 覆盖的全体是可数的, 记为 $\mathcal{F}=\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中每一 $\mathcal{P}_i=\{\mathrm{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 被 K 的非空闭集组成的有限覆盖 $\mathcal{F}_i=\{\mathrm{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 精确加细. 置 L=$\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$. 那么

(5.1) L 是紧子集 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集, 从而 L 是 Λ^ω 的紧子集.

设 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\setminus\mathrm{L}$, 则 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_{\alpha_i}=\varnothing$. 由 K 的紧性及定理 1.1.2, 存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcap_{i\le i_0}\mathrm{F}_{\alpha_i}=\varnothing$, 令 W=$\{(\beta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:$ 对于 $i\le i_0$ 有 $\beta_i=\alpha_i\}$, 则 W 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 中含有点 α 的开集且 W$\bigcap$L=$\varnothing$. 所以 L 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集.

(5.2) L$\subset$M 且 f(L)$\subset$K.

设 $\alpha=(\alpha_i)\in$L, 则 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_{\alpha_i}\neq\varnothing$, 取定 x$\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{F}_{\alpha_i}$. 如果证明了 $\{\mathrm{P}_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络, 那么 $\alpha\in$M 且 f(α)=x$\in$K, 于是有 L$\subset$M 且 f(L)$\subset$K. 设 V 是 x 在 X 中的邻域, 由于 K 是 X 的正则子空间, 存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得 $\overline{\mathrm{W}}=\mathrm{cl}_{\mathrm{K}}(\mathrm{W})\subset$V. 因为 $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 关于 K 具有性质 CC, 存在 $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 的子集 $\mathcal{P}'$ 使得 $\mathcal{P}'$ 是 $\overline{\mathrm{W}}$ 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{P}'\subset$V. 又因为 K 的紧子集 K╲W$\subset$X╲{x}, 存在 $\mathcal{P}_{\mathrm{K}}$ 的子集 $\mathcal{P}''$ 使得 $\mathcal{P}''$ 是 K╲W 的 cfp 覆盖且 $\bigcup\mathcal{P}''\subset$X╲{x}. 令 $\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\bigcup\mathcal{P}''$, 则 $\mathcal{P}^*$ 是 K 的 cfp 覆盖, 于是存在 k$\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{P}_k=\mathcal{P}^*$. 由于 x$\in\mathrm{F}_{\alpha_k}\subset\mathrm{P}_{\alpha_k}\in\mathcal{P}_k$, 所以 $\mathrm{P}_{\alpha_k}\in\mathcal{P}'$, 故 $\mathrm{P}_{\alpha_k}\subset$V, 从而 $\{\mathrm{P}_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络.

(5.3) K$\subset$f(L).

设 $x\in K$, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_i\in\Gamma_i$ 使得 $x\in F_{\alpha_i}$, 令 $\alpha=(\alpha_i)$, 则 $\alpha\in L$ 且由(5.2)所证知 $f(\alpha)=x$, 因此 $K\subset f(L)$.

综上所述, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K. █

定义 3.4.4 中的性质 CC 确保 X 的紧子集 K 是度量空间 M 的紧子集 L 的映象, 即紧覆盖映象, 取名 CC 意为"紧覆盖"(Compact-Covering)的英文缩写.

E. Michael 和 K. Nagami[1973]在建立度量空间的紧覆盖映象理论中引入外基的概念作为过渡.

定义 3.4.6 空间 X 的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的子集 A(在 X 中)的外基(outer base), 若对于每一 $x\in A$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subset U$.

显然, 空间 X 的基是 X 的任一子集在 X 中的外基. 对于空间 X 的子集 A, 应注意区别下述三个不同的概念: (1) A 的基; (2) A 在 X 中的(邻域)基; (3) A 的外基. 下述引理说明了它们之间的一种关系.

引理 3.4.7 设 K 是空间 X 的可度量化的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数的邻域基, 则 K 在 X 中具有可数外基.

证明 由于 K 是空间 X 的可度量化的紧子集, 由定理 2.2.8, K 具有可数基. 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的可数基, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数开邻域基. 令 $A=\{\{n, m\}\in\mathbb{N}^2 : \overline{U}_m\subset U_n\}$. 对于 $(n, m, k)\in A\times\mathbb{N}$, 由于 $\overline{U}_m\subset U_n$, 于是 $\overline{U}_m\cap(K\setminus U_n)=\varnothing$, 因为 $\overline{U}_m$ 和 $K\setminus U_n$ 都是 T_2 空间 X 的紧子集, 由定理 1.1.4, 存在 X 的开集 $U_{n,m}$ 使得 $\overline{U}_m\subset U_{n,m}\subset\overline{U}_{n,m}\subset X\setminus(K\setminus U_n)$, 置 $W(n, m, k)=U_{n,m}\cap V_k$. 形如上述 W(n, m, k)的集合的有限交全体组成的 X 的开集族记为 $\mathscr{H}$, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的. 往证 $\mathscr{H}$ 是 K 在 X 中的外基.

对于每一 $p\in K$ 及 p 在 X 中的开邻域 U, 定义 $B=\{\alpha\in A\times\mathbb{N} : p\in W(\alpha)\}$, $H(F)=\bigcap\{W(\alpha) : \alpha\in F\}$, $F\subset B$.

设不存在 B 的有限子集 F 使得 $H(F)\subset U$, 取 $p(F)\in H(F)\setminus U$. 置 $Q(F)=\{p(F') : F'$ 是 B 的有限子集且 $F\subset F'\}$, 则 $U\cap Q(F)=\varnothing$ 且 $K\cap\overline{Q(F)}\neq\varnothing$. 否则, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $V_k\cap\overline{Q(F)}=\varnothing$, 由 K 的正则性及 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的基, 存在 $(n, m)\in\mathbb{N}^2$ 使得 $p\in\overline{U}_m\subset U_n$. 记 $\alpha=(n, m, k)$, $F'=F\cup\{\alpha\}$, 则 $\alpha\in B$ 且 $p(F')\in W(\alpha)\cap Q(F)\subset V_k\cap Q(F)=\varnothing$, 矛盾.

显然，若 $F_1\subset F_2$，则 $Q(F_1)\supset Q(F_2)$，因此$\{K\cap\overline{Q(F)}$: F 是 B 的有限子集$\}$具有有限交性质，由 K 的紧性, $K\cap(\bigcap\{\overline{Q(F)}$: F 是 B 的有限子集$\}\neq\varnothing$. 另一方面，对于 $x\in K\setminus\{p\}$，再由 K 的正则性，存在$(n, m)\in\mathbb{N}^2$ 使得 $p\in U_m\subset\overline{U}_m\subset U_n\subset K\setminus\{x\}$，于是 $\overline{U}_{n,m}\subset X\setminus(K\setminus U_n)\subset X\setminus\{x\}$，取定 $k\in\mathbb{N}$，让$\alpha=(n, m, k)$，那么$\alpha\in B$ 且 $x\notin\overline{U}_{n,m}$，而 $Q(\{\alpha\})=\{p(F')$: F' 是 B 的有限子集且$\alpha\in F'\}\subset H(\{\alpha\})=W(\alpha)\subset U_{n,m}$，于是 $x\notin\overline{Q(\{\alpha\})}$，因此$(K\setminus\{p\})\cap(\bigcap\{\overline{Q(F)}$: F 是 B 的有限子集$\}=\varnothing$. 这时$\bigcap\{K\cap\overline{Q(F)}$: F 是 B 的有限子集$\}=\{p\}\subset U$. 再由 K 的紧性，存在 B 的有限子集 F 使得 $p\in K\cap\overline{Q(F)}\subset U$(练习 1.1.2)，从而 $U\cap Q(F)\neq\varnothing$，矛盾. 因此存在 B 的有限子集 F 使得 $H(F)\subset U$. 故 $\mathcal{H}$ 是 K 在 X 中的外基，所以 K 在 X 中具有可数外基. ▮

引理 3.4.8 设 K 是空间 X 的子集. 若 $\mathcal{B}$ 是 K 的外基，则 $\mathcal{B}$ 关于 K 具有性质 CC.

证明 设 H 是 K 的紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域. 若 $x\in H$，存在 $B_x\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B_x\subset V$，由于 H 的正则性，存在 H 的开集 V_x 使得 $x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset B_x$. 于是$\{V_x\}_{x\in H}$ 是紧子集 H 的开覆盖，所以它存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}\}_{i\le n}$，从而 $H=\bigcup_{i\le n}\overline{V}_{x_i}\subset\bigcup_{i\le n}B_{x_i}\subset V$，且$\{\overline{V}_{x_i}\}_{i\le n}$是$\{B_{x_i}\}_{i\le n}$的精确加细. 故 $\mathcal{B}$ 关于 K 具有性质 CC. ▮

定理 3.4.9 (Michael, Nagami[1973])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的开映象当且仅当 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基.

证明 设存在可度量化空间 M 和紧覆盖的开映射 $f:M\to X$. 由定理 3.4.1, X 的每一紧子集可度量化. 设 K 是 X 的紧子集，则存在 M 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$. 由定理 2.3.13, L 在 M 中具有可数邻域基$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，而 f 是开映射，于是$\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数邻域基.

反之，设空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基. 对于 X 的每一紧子集 K，由引理 3.4.7, K 在 X 中具有可数外基 $\mathcal{P}_K$. 令 $\mathcal{P}=\bigcup\{\mathcal{P}_K$: K 是 X 的紧子集$\}$，则 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的第一可数的基，且由引理 3.4.8, $\mathcal{P}_K$ 关于 K 具有性质 CC. 设$(f, M, X, \mathcal{P})$是 Ponomarev 系，由引理 3.3.1 和引理 3.4.5, f 是紧覆盖的开映射. 故 X 是可度量化空间的紧覆盖的开映象. ▮

下面两个例子将说明定理 3.4.9 中的两个条件是相互独立的. Ponomarev 定理(定理 3.3.2)

表明度量空间的开映象精确为第一可数空间. 对照推论 3.4.3 和定理 3.4.9, 下述例子说明每一紧子集可度量化的第一可数空间未必是可度量化空间的紧覆盖的开映象.

例 3.4.10 蝶形空间 X(例 3.2.11).

(1) 每一紧子集可度量化的第一可数空间;

(2) 紧子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中不具有可数的邻域基.

例 3.2.11 已说明正则的第一可数空间 X 的紧子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中不具有可数的邻域基. 为了证明 X 的每一紧子集可度量化, 由定理 2.3.7, 只须证明 X 具有可数网络. 由于 X 的子空间$\mathbb{R}\times\{0\}$和 $X\setminus(\mathbb{R}\times\{0\})$都具有欧几里得拓扑, 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是它们的可数基, 那么 $\mathcal{P}\cup\mathcal{F}$ 是 X 的可数网络. ∎

下述例子表明空间 X 的每一紧子集具有可数邻域基并不蕴含 X 的紧子集自身具有可数基.

例 3.4.11 Alexandroff 双圆空间 X(Engelking[1989]).

(1) 不可度量化的紧空间;

(2) 每一紧子集在 X 中具有可数邻域基.

对于 i=1, 2, 记 $C_i=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=i\}$. 取 $X=C_1\cup C_2$. 从点(0, 0)出发经 C_1 到 C_2 的投影映射记为 $p:C_1\to C_2$. 在 X 上赋予 Alexandroff 双圆拓扑(Alexandroff's double circles topology): 对于 $z\in X$, 若 $z\in C_2$, 则 z 是 X 的孤立点; 若 $z\in C_1$, z 在 X 中的邻域基元形如 $V_j\cup p(V_j\setminus\{z\})$, 其中 $j\in\mathbb{N}$, V_j 是 C_1的中心在 z, 弧长为 1/j 的开圆弧. 空间 X 称为 Alexandroff 双圆空间(Alexandroff's double circles space).

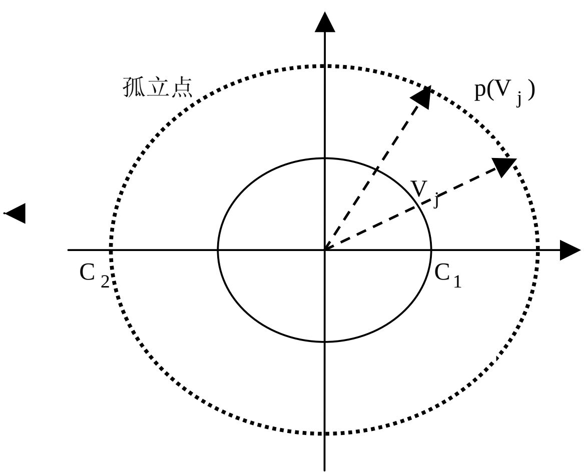

图 Alexandroff 双圆拓扑

(1) X 是不可度量化的紧空间. 由于 X 的子空间 C_1具有欧几里得拓扑, 所以 C_1是 X 的紧子集. 对于 X 的由邻域基元组成的开覆盖 $\mathcal{U}$, 由 C_1的紧性, 存在$\mathcal{U}$的有限子集 $\mathcal{W}$覆盖 C_1, 于是 $X\setminus\bigcup\mathcal{W}$ 是有限集, 所以 $\mathcal{U}$ 存在有限子覆盖, 从而 X 是紧空间. 由于$\{\{x\}: x\in C_2\}$是 X 的互不相交的不可

数的开集族，于是 X 不满足可数链条件，所以 X 不是可度量化空间(定理 2.2.8).

(2) X 的每一紧子集在 X 中具有可数邻域基. 对于 X 的任一非空紧子集 K，置 $K_1=K\cap C_1$，$K_2=K\cap C_2$. 不妨设 $K_1\neq\varnothing$. 设 $\mathcal{P}$ 是紧度量空间 C_1 的由一些开圆弧组成的可数基，让 $\mathcal{P}$ 的构成 K_1 的有限覆盖的全体记为$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，有 $k_n\in\mathbb{N}$使得 $\mathcal{F}_n=\{V(x_{n,i}):i\le k_n\}$，其中每一 $V(x_{n,i})$是 C_1 的中心在 $x_{n,i}$ 的开圆弧，置 $U_n=(\bigcup_{i\le k_n}V(x_{n,i})\cup p(V(x_{n,i})\setminus\{x_{n,i}\}))\cup K_2$. 往证$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 K 在 X 中的邻域基. 显然，每一 U_n 是 X 的开集且 $K\subset U_n$. 对于 K 在 X 中的任一邻域 U，当 $x\in K_1$时，存在 C_1 的中心在 x 的开圆孤 V(x)使得 $V(x)\cup p(V(x)\setminus\{x\})\subset U$. 由 K_1 的紧性，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $K_1\subset\bigcup_{i\le k_n}V(x_{n,i})\cup p(V(x_{n,i})\setminus\{x_{n,i}\})\subset U$，从而 $K\subset U_n\subset U$. ▮

注 例 3.4.11(2)是错误的，用 Alexandroff 双箭空间代替例 3.4.11，则(1), (2)成立.

为了以后更进一步讨论可度量化空间的商映象的需要，本节的第二部分介绍紧覆盖映射的几种推广.

定义 3.4.12 设映射 $f:X\to Y$. f 称为序列覆盖映射(sequence-covering mapping; Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])，若 Y 的每一含极限点的收敛序列是 X 的某一紧子集在 f 的映象. f 称为序列商映射(sequentially quotient mapping; Boone, Siwiec[1976])，若 S 是 Y 的收敛序列，则存在 X 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列.

显然，紧覆盖映射是序列覆盖映射. 下述充要条件说明与商映射对比，把 3.4.12 定义的映射称为序列商映射是合适的.

引理 3.4.13 (Boone[48], Siwiec[1976])设映射 $f:X\to Y$，那么 f 是序列商映射当且仅当若 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集，则 F 是 Y 的序列闭集.

证明 设 f 是序列商映射且 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集. 如果 F 的序列 S 在 Y 中收敛于点 y，则存在 X 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列，设序列 T 在 X 中收敛于 x，那么 f(x)=y. 由于 $S\subset F$，于是 $T\subset f^{-1}(F)$，由引理 3.1.1，$x\in f^{-1}(F)$，因此 $y\in F$，故 F 是 Y 的序列闭集.

反之，设 f 不是序列商映射，则存在 Y 中收敛于某点 y 的序列$\{y_n\}$不满足定义 3.4.12 中

---

[48] J. R. Boone 是日本数学家 H. Tamano(玉野久弘)的学生.

对序列商映射的要求. 不妨设所有的 $y_n \neq y$, 让 $F=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. 如果 $\{x_i\}$ 是 $f^{-1}(F)$ 中的序列且在 X 中 $\{x_i\}$ 收敛于 x, 那么 $x\notin f^{-1}(y)$, 于是 $x\in f^{-1}(F)$, 所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集, 但是 F 不是 Y 的序列闭集. ▋

引理 3.4.14 设映射 $f:X\to Y$.

(1) 若 X 是序列空间, f 是商映射, 则 f 是序列商映射;

(2) 若 Y 是序列空间, f 是序列覆盖或序列商映射, 则 f 是商映射.

证明 (1) 设 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集, 由于 X 是序列空间, 所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集, 而 f 是商映射, 于是 F 是 Y 的闭集, 从而 F 是 Y 的序列闭集. 由引理 3.4.13, f 是序列商映射.

(2) 设 f 是序列覆盖映射或序列商映射, 则 f 具有性质(*): 若 S 是 Y 的含极限点的收敛序列, 则存在 X 的紧子集 L 使得 f(L)是 S 的子序列. 设 $F\subset Y$ 使得 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集. 若由 F 中点组成的序列 $\{y_n\}$ 在 Y 中收敛于 y, 由性质(*), 则存在 X 中的紧子集 L 使得 f(L)是 $\{y\}\bigcup\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$ 中的子序列. 不妨设 $f(L)=\{y\}\bigcup\{y_{n_i} : i\in\mathbb{N}\}$, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_i\in L\bigcap f^{-1}(y_{n_i})$, 由于 L 的紧性, 设 x 是序列 $\{x_i\}$ 在 X 中的一个聚点, 则 $x\in f^{-1}(y)\bigcap f^{-1}(F)$, 于是 $y\in F$, 从而 F 是 Y 的序列闭集, 因为 Y 是序列空间, 所以 F 是 Y 的闭集. 故 f 是商映射.
▋

下述引理说明在一定条件下序列覆盖映射是序列商映射, 如度量空间上的序列覆盖映射是序列商映射.

引理 3.4.15 设空间 X 的每一紧子集是序列紧的. 若 $f:X\to Y$ 是序列覆盖映射, 则 f 是序列商映射.

证明 设 $\{y_n\}$ 是空间 Y 中的收敛于某点 y 的序列, 则存在空间 X 的紧子集 L 使得 $f(L)=\{y\}\bigcup\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 取定 $x_n\in f^{-1}(y_n)\bigcap L$, 因为 L 是序列紧的, 所以序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列 $\{x_{n_i}\}$, 于是 $\{f(x_{n_i})\}$ 是 $\{y_n\}$ 的收敛的子序列, 从而 f 是序列商映射.
▋

本节最后举几个例子说明上述几类映射之间的不蕴含关系. 为了说明序列商映射未必

是序列覆盖映射，先介绍 Gillman[49]-Jerison 空间 $\psi(\mathbb{N})$.

例 **3.4.16**　Gillman-Jerison 空间 $\psi(\mathbb{N})$(Gillman, Jerison[1960]).

(1) 局部紧的可展空间;

(2) 每一紧子集可度量化且在 $\psi(\mathbb{N})$ 中具有可数邻域基.

(3) 不具有点可数基.

$\mathbb{N}$ 的无限子集族 $\mathscr{A}$ 称为 $\mathbb{N}$ 的几乎互不相交族(almost disjoint family)，若 $\mathscr{A}$ 中任两不同元之交是 $\mathbb{N}$ 的有限子集. 由 Zorn 引理(引理 3.3.6)，设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{N}$ 的极大的几乎互不相交族，则 $\mathscr{A}$ 是不可数的. 否则，记 $\mathscr{A}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $A_n\setminus\bigcup_{i<n}A_i=A_n\setminus\bigcup_{i<n}(A_i\cap A_n)$ 是无限集，所以存在 $x_n\in A_n\setminus\bigcup_{i<n}A_i$. 令 $C=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$，则 C 是 $\mathbb{N}$ 的无限子集且对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $C\cap A_n$ 是有限集，那么 $C\notin\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A}\cup\{C\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的几乎互不相交族，这与 $\mathscr{A}$ 的极大性相矛盾. 置 $\psi(\mathbb{N})=\mathscr{A}\cup\mathbb{N}$. $\psi(\mathbb{N})$ 赋予下述拓扑称为 Gillman-Jerison 空间(Gillman-Jerison space): $\mathbb{N}$ 中的点是 $\psi(\mathbb{N})$ 的孤立点；对于每一 $A\in\mathscr{A}$, A 在 $\psi(\mathbb{N})$ 中的邻域基元形如 $\{A\}\cup(A\setminus F)$，其中 F 是 A 的有限子集.

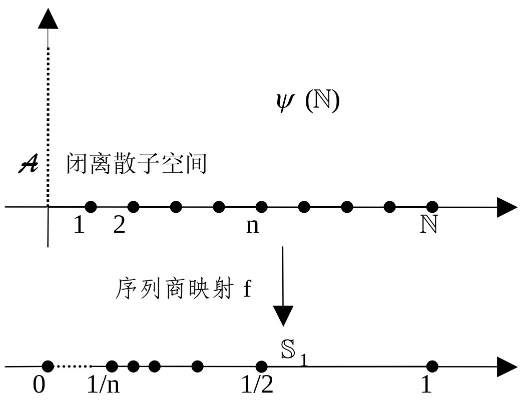

图 Gillman-Jerison 空间的映象

(1) $\psi(\mathbb{N})$ 是局部紧的可展空间. 显然，$\psi(\mathbb{N})$ 是 T_2 空间. 由于上述定义的邻域基元是 $\psi(\mathbb{N})$ 的紧子集，所以 $\psi(\mathbb{N})$ 是局部紧空间. 下面验证 $\psi(\mathbb{N})$ 是可展空间. 不妨设 $\bigcup\mathscr{A}=\mathbb{N}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，定义 $F_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathscr{U}_n=\{\{A\}\cup(A\setminus F_n) : A\in\mathscr{A}\}\cup\{\{x\} : x\in F_n\}$，则 $\mathscr{U}_n$ 是 $\psi(\mathbb{N})$ 的开覆盖. 对于每一 $x\in\psi(\mathbb{N})$，当 $x\in F_n$ 时有 $st(x, \mathscr{U}_n)=\{x\}$，当 $x\in\mathscr{A}$ 时有 $st(x, \mathscr{U}_n)=\{x\}\cup(x\setminus F_n)$. 于是 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 $\psi(\mathbb{N})$ 的展开，从而 $\psi(\mathbb{N})$ 是可展空间.

---

[49] L. Gillman 是波兰数学家 A. Tarski(1902-1983)的学生.

(2) 设 K 是$\psi(\mathbb{N})$的紧空间. 由于$\mathcal{A}$是$\psi(\mathbb{N})$的闭离散子空间, 所以 K$\cap\mathcal{A}$是有限集, 于是 K 是$\psi(\mathbb{N})$的可数集, 而$\psi(\mathbb{N})$是第一可数空间, 所以 K 具有可数基, 由 Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), K 是可度量化的. 易验证, K 在$\psi(\mathbb{N})$中也具有可数邻域基(练习 3.4.2).

(3) $\mathbb{N}$是$\psi(\mathbb{N})$的可数的稠密子集, 所以$\psi(\mathbb{N})$是可分空间. 若$\psi(\mathbb{N})$具有点可数基, 由引理 3.3.3, 则$\psi(\mathbb{N})$具有可数基, 于是$\psi(\mathbb{N})$的子空间$\mathcal{A}$也具有可数基. 但是,$\mathcal{A}$是$\psi(\mathbb{N})$的不可数的闭离散子空间, 矛盾. 故$\psi(\mathbb{N})$不具有点可数基.

下面通过空间$\psi(\mathbb{N})$说明: 序列商映射未必是序列覆盖映射.

定义 f: $\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$使得 f($\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$)={0}且每一 f(n)=1/n. 由$\mathcal{A}$的极大性, 在$\psi(\mathbb{N})$中$\mathbb{N}$的任一无限子集有聚点在$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中(练习 3.4.3), 而$\psi(\mathbb{N})$是第一可数空间, 于是$\mathbb{N}$中的每一由互不相同点组成的序列有子序列收敛于$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中的点, 所以 f 是序列商映射. 但是 f 不是序列覆盖映射. 否则, 由于$\mathbb{S}_1$是收敛序列, 存在 X=ψ($\mathbb{N}$的紧子集 L 使得 f(L)=$\mathbb{S}_1$, 于是$\mathbb{N}\subset$L, 而$\mathbb{N}$是 X 的稠密子集, 所以 X=L, 故 X 是紧空间, 矛盾. 从而 f 不是序列覆盖映射. ∎

例 3.4.17 (1) 开映射未必是序列覆盖映射或序列商映射.

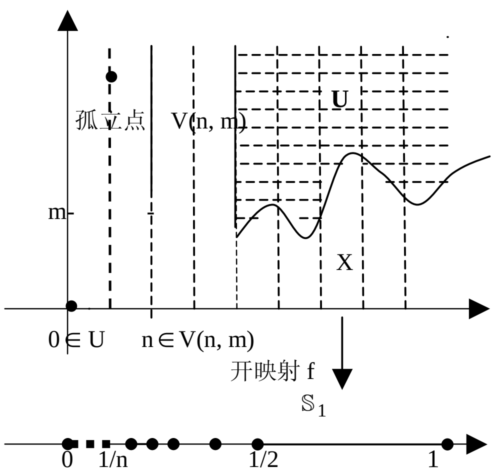

图 Arens 空间的子空间的映象

设 X={0}$\cup\mathbb{N}^2$. 对于每一 n, m$\in\mathbb{N}$, 令 V(n, m)={(n, k)$\in\mathbb{N}^2$: k$\geq$m}. 集合 X 赋予如下拓扑: $\mathbb{N}^2$中的点是 X 的孤立点; 点 0 的邻域基元形如{0}$\cup(\bigcup_{n\geq i}V(n, m_n))$, 其中 i, $m_n\in\mathbb{N}$. X 是 S_2 (例 3.1.7)的子空间. 先证明 X 的紧子集是有限集. 设 K 是 X 的紧子集, 由于每一 V(n, 1)是 X 的闭离散子集, 所以 V(n, 1)$\cap$K 是有限集, 于是 0 不是 K 的聚点, 而$\mathbb{N}^2$中的点是 X 的孤立点, 因此 K 在 X 中没有聚点, 故 K 是 X 的有限子集. 让 Y=$\mathbb{S}_1$. 定义 f:X$\to$Y 使得 f(0)=0 且每一 f(n, m)=1/n, 则 f 是开映射. 由于 X 中的紧子集是有限集, 所以 f 不是序列覆盖映射或序列商映射.

(2) 逆紧映射未必是序列商映射.

考虑正整数集$\mathbb{N}$赋予离散拓扑的极大紧化$\beta\mathbb{N}$(例 1.2.8). 定义 f: $\beta\mathbb{N}\to\mathbb{S}_1$使得 $f(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})=\{0\}$且每一 $f(n)=1/n$, 则 f 是映射. 由于$\beta\mathbb{N}$是紧空间, 所以 f 是逆紧映射. 又由于$\beta\mathbb{N}$中不存在非平凡的收敛序列, 于是 f 不是序列商映射.

(3) 序列覆盖映射未必是紧覆盖映射或商映射.

设 $Y=\beta\mathbb{N}$, 空间 X 是集合$\beta\mathbb{N}$赋予离散拓扑, 则 X 是度量空间. 让 $f:X\to Y$ 是恒等映射. 由于$\beta\mathbb{N}$中不存在非平凡的收敛序列, 所以 f 是序列覆盖映射. 又由于 X 中的紧子集是有限集, 于是 f 不是紧覆盖映射. 再由于 X 的闭集$\mathbb{N}$不是 Y 的闭集, 从而 f 不是商映射. ▮

练习

3.4.1 设 K 是空间 X 的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数外基, 则 K 是 X 的可度量化的子集且 K 在 X 中具有可数的邻域基(引理 3.4.7 的逆命题).

3.4.2 设 X 是第一可数空间. 若 K 是 X 的可数的紧子集, 证明: K 在 X 中具有可数邻域基.

3.4.3 对于 Gillman-Jerison 空间$\psi(\mathbb{N})$证明: (1) $\mathbb{N}$的任一无限子集有聚点在$\psi(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$中; (2) $\psi(\mathbb{N})$是伪紧空间; (3) 例 3.4.16 定义的映射 $f:\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$是闭映射, 但不是边界紧映射.

3.4.4 证明: $\beta\mathbb{N}$的每一单点集是序列开集, 从而$\beta\mathbb{N}$不是序列空间.

3.4.5 利用 Miščenko 引理证明: 设空间 X 具有点可数的闭 k 网络, 则 X 是可度量化空间的紧覆盖的 s 映象(Michael[1977]).

§3.5 商 s 映象

本节介绍可度量化空间的开 s 映象和商 s 映象的内在特征. 关于可度量化空间的开 s 映象的刻画, 定理 3.3.5 已表明这空间具有点可数基, 问题在于紧覆盖的开s映射会产生怎样新的信息. 这种设想是有必要的, 因为度量空间的开映象与度量空间的紧覆盖的开映象是不同的空间类. 困难之处在于构造合适的紧覆盖映射. 定理 3.4.9 已揭示了良好的开端. 外基是建立可度量化空间上紧覆盖开映象的合适媒介, 对于未必开的紧覆盖映象的建立则需要如下与定义 3.4.4 的性质 CC 相关的 cfp 网络.

定义 3.5.1 (燕鹏飞, 林寿[1999b])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cfp 网络(cfp-network), 若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 存在 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}$ 是 K 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$.

cfp 网络与 k 网络(定义 3.3.11)密切相关. 显然, 空间 X 的闭 k 网络是 X 的 cfp 网络, X 的 cfp 网络是 X 的 k 网络.

引理 3.5.2 空间 X 的基是 X 的 cfp 网络.

证明 设$\mathcal{B}$是空间 X 的基. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 因为$\mathcal{B}$是 K 的外基, 由引理 3.4.8, 存在$\mathcal{B}$的子集$\mathcal{F}$使得$\mathcal{F}$是 K 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 故$\mathcal{B}$是 X 的 cfp 网络. ∎

下述关于点可数集族的 cfp 性质与著名的 Miščenko 引理(引理 3.3.10)类似. 对于空间 X 的子集 A, X 的子集族$\mathcal{F}$称为 A 的极小 cfp 覆盖(minimal cfp-covering), 若$\mathcal{F}$是 A 的 cfp 覆盖, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\setminus\{F\}$不是 A 的 cfp 覆盖.

引理 3.5.3 (燕鹏飞, 林寿[1999b])如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 那么 X 的每一紧子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小 cfp 覆盖.

证明 不妨设 K 是空间 X 的非空紧子集且$\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是由$\mathcal{P}$的元组成的 K 的极小 cfp 覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in\mathbb{N}$使得集族$\Phi=\{\mathcal{P}_\alpha:\ \alpha\in\Lambda,\ |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$是不可数的. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 令$\Phi(P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi\ :P\in\mathcal{P}_\alpha\}$. 取定 $x_1\in K$, 则$\Phi=\bigcup\{\Phi(P): x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于$\mathcal{P}$是点可数的, 于是存在$P_1\in\mathcal{P}$使得$x_1\in P_1$且$\Phi(P_1)$是不可数的. 若 n=1, 则$|\Phi(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 设$\Phi(P_1)=\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_1}$, 其中每一 $\mathcal{P}_\alpha=\{P_{\alpha i}\}_{i\le n}$被 K 的闭集组成的有限覆盖$\mathcal{F}_\alpha=\{F_{\alpha i}\}_{i\le n}$精确加细且 $P_{\alpha 1}=P_1$. 先证明$\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}\}_{\alpha\in\Lambda_1}$具有有限交性质. 任取$\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_1}$的有限子集$\{\mathcal{F}_{\beta_j}\}_{j\le m}$, 则有$\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}\subset P_1$, 由于$\mathcal{P}_{\beta_j}$是 K 的极小 cfp 覆盖, 因而存在 $x\in K\setminus P_1\subset K\setminus\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}$, 故 $x\in\bigcap_{j\le m}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\beta_j i})$, 所以集族$\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}\}_{\alpha\in\Lambda_1}$具有有限交性质, 由 K 的紧性, 它具有非空的交. 取 $x_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i})$. 令$\Phi(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1)\ :\ P\in\mathcal{P}_\alpha\}$, 则$\Phi(P_1)=\bigcup\{\Phi(P_1, P)\ :\ x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 事实上, 任取$\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1)$, 由于 $x_2\in\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}$, 存在 $2\le i_0\le n$ 使得 $x_2\in F_{\alpha i_0}\subset P_{\alpha i_0}$, $P_{\alpha i_0}\ne P_1$且$\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1, P_{\alpha i_0})$. 再由$\mathcal{P}$的点可数性, 存在$P_2\in\mathcal{P}$使得$x_2\in P_2$, $P_2\ne P_1$且$\Phi(P_1, P_2)$是不

可数的. 继续上述过程, 可得到点集$\{x_i\}_{i\le n}$及集族$\{P_i\}_{i\le n}$满足: 每一$x_i \in P_i \in \mathcal{P}$, 当$i\neq j\le n$时$P_i \neq P_j$且$\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)$是不可数的, 但是$|\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)|=1$, 矛盾. 故仅有可数个由$\mathcal{P}$的元组成的K的极小cfp覆盖. ▮

引理 3.5.4 (燕鹏飞, 林寿[1999b])设$\mathcal{P}$是空间X的点可数的cfp网络. 若$(f, M, X, \mathcal{P})$是Ponomarev系, 则f是紧覆盖的s映射.

证明 设空间X的点可数的cfp网络$\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 由引理3.3.1, $f:M\to X$是s映射. 由引理3.4.5, 为了证明f是紧覆盖映射, 只须证明: 若K是X的紧子集, 则存在$\mathcal{P}$的可数子集$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC.

不妨设K的X的非空紧子集, 由引理3.5.3, 记由$\mathcal{P}$的元组成K的极小cfp覆盖族为$\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 令$\mathcal{P}_K=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_i$. 则$\mathcal{P}$的可数子集$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC. 事实上, 对于K的任意非空紧子集H及H在X中的邻域V, 因为K是X的紧子集, 所以K是X的正规子集, 存在H在K中的开邻域W使得$cl_K(W)\subset V$, 由于$\mathcal{P}$是X的cfp网络, 存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}'$使得$\mathcal{P}'$是$cl_K(W)$的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{P}'\subset V$. 由于紧集$K\setminus W\subset X\setminus H$, 又存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}''$使得$\mathcal{P}''$是$K\setminus W$的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{P}''\subset X\setminus H$. 令$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\bigcup\mathcal{P}''$, 则$\mathcal{P}^*$是K的cfp覆盖, 于是存在$k\in\mathbb{N}$使得$\mathcal{P}_k\subset\mathcal{P}^*$. 设$\mathcal{P}_k=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$被K的闭集组成的有限覆盖$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$精确加细, 令$\mathcal{F}=\{P_\alpha\in\mathcal{P}_k : K_\alpha\bigcap H\neq\varnothing\}$, 那么$\mathcal{F}$是H的cfp覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 所以$\mathcal{P}_K$关于K具有性质CC.

综上所述, f是紧覆盖的s映射. ▮

本节开头提出的疑问回答如下.

定理3.5.5 (Michael-Nagami定理[1973])空间X具有点可数基当且仅当X是可度量化空间的紧覆盖的开s映象.

证明 由定理3.3.5, 可度量化空间的紧覆盖的开s映象具有点可数基. 反之, 设$\mathcal{B}$是空间X的点可数基, 让$(f, M, X, \mathcal{B})$是Ponomarev系, 又由引理3.3.1, f是开s映射, 再由引理3.5.2和引理3.5.4, f是紧覆盖映射. 故X是可度量化空间的紧覆盖的开s映象. ▮

利用Michael-Nagami定理可立刻得到Miščenko的度量化定理(推论3.3.13): 具有点可数基的紧空间是可度量化空间. 事实上, 设X是具有点可数基的紧空间, 由定理3.5.5, 存在可度量化空间M和紧覆盖的开s映射$f:M\to X$, 再由定理3.4.1, 紧空间X是可度量化的.

由定理 3.3.5 和定理 3.5.5, 可度量化空间的开 s 映象是度量空间的紧覆盖的开 s 映象. E. Michael 和 K. Nagami[1973]提出问题: 可度量化空间的商 s 映象是否是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象? 这涉及如下几个问题.

问题 3.5.6 (1) 可度量化空间的商 s 映象的内在刻画?

(2) 可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象的内在刻画?

(3) 上述两种刻画是否等价?

其中问题(1)是 A. Arhangel'skiĭ[1966]在名著"映射与空间"中提出的问题. 本节的第二部分介绍这方面的进展. 首先应当提到的是陈怀鹏[1999]已构造了例子说明: 可度量化空间的商 s 映象未必是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象, 所以问题(3)是否定的. 利用前述关于 Ponomarev 系的工作, 问题(2)可获得较满意的解决.

定理 3.5.7 (燕鹏飞, 林寿[1999b])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cfp 网络.

证明 充分性由引理 3.5.4, 下面证明必要性. 设空间 X 是可度量化空间 M 在紧覆盖 s 映射 f 下的象. 由于 M 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), 让 $\mathcal{P}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 由引理 3.5.2, $\mathcal{P}$ 是 M 的 cfp 网络. 由于紧覆盖映射保持 cfp 网络(练习 3.5.1), 所以 f($\mathcal{P}$)是 X 的 cfp 网络. 又由于 f 是 s 映射, 于是 f($\mathcal{P}$)是 X 的点可数集族. 故 f($\mathcal{P}$)是 X 的点可数的 cfp 网络. ∎

下述推论是问题(2)的回答.

推论 3.5.8 (燕鹏飞, 林寿[1999b])空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cfp 网络的 k 空间.

证明 必要性由定理 3.5.7 和引理 1.6.6, 充分性由定理 3.5.7 和引理 3.4.2. ∎

问题(1)的最终解决依赖于 cs*网络的引入.

定义 3.5.9 (高智民[1987a])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs*网络(cs*-network), 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$, 即存在 $P\in\mathcal{P}$ 和子序列$\{x_{n_i}\}$使得$\{x\}\cup\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P\subset U$.

cs*网络的概念与 F. Siwiec[1971]定义的 cs 网络(cs-network, 即收敛序列网络)的概念密切相关. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网络, 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P\subset U$. 显然, 空间 X 的基是 cs 网

络, X 的 cs 网络是 cs*网络, X 的 cs*网络是网络.

下面介绍 cs*网络的一些基本性质.

引理 3.5.10 空间 X 的 cfp 网络是 X 的 cs*网络.

证明 设$\mathcal{P}$是空间 X 的 cfp 网络. 对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点$x\in U$. 让$K=\{x\}\bigcup\{x_n\in U: n\in\mathbb{N}\}$, 则 X 的紧子集 $K\subset U$, 于是存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{P}'$使得$\mathcal{P}'$是 K 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{P}'\subset U$. 记$\mathcal{P}'=\{P_i\}_{i\le m}$, 且$\mathcal{P}'$被 K 的闭集组成的覆盖$\{K_i\}_{i\le m}$精确加细. 由于每一 K_i 是 X 的闭集, 存在 $i\le m$ 使得序列$\{x_n\}$的某子序列是终于 K_i 的, 从而这子序列是终于 P_i 的且 $P_i\subset U$. 故$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网络. ∎

引理 3.5.11 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数的 cs*网络, 那么$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络当且仅当 X 的每一紧子集是序列紧的.

证明 设$\mathcal{P}$是空间 X 的 k 网络. 对于 X 的每一紧子集 K, $\mathcal{P}_{|K}=\{P\bigcap K: P\in\mathcal{P}\}$是 K 的点可数的 k 网络, 由定理 3.3.12, K 是可度量化的子空间, 再由定理 2.2.9, K 是序列紧的.

反之, 设 X 的每一紧子集是序列紧的. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 记$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: P\subset U\}$, 若不存在$\mathcal{H}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}$, 对于每一 $x\in K$, 记可数集$\{P\in\mathcal{H}: x\in P\}=\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 则可选取 K 中的序列$\{x_k\}$使得当 n, j<k 时 $x_k\notin P_n(x_j)$. 这时每一 $P_n(x)$仅含有序列$\{x_k\}$的有限项. 因为 K 是序列紧的, 所以$\{x_k\}$存在收敛的子序列$\{x_{k_i}\}$. 设$\{x_{k_i}\}$收敛于 $x\in K\subset U$. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网络, 存在$\mathcal{P}$中的元 P 使得$\{x_{k_i}\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$, 于是 $P\in\mathcal{H}$ 且存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $P_n(x)=P$, 从而 $P_n(x)$含有$\{x_k\}$中的无限项, 矛盾. 因此存在$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$. 故$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络. ∎

由于紧的序列空间的序列紧空间(练习 3.1.2), 所以引理 3.5.11 的充要条件也等价于 X 的每一紧子集是序列子空间.

引理 3.5.12 序列商映射保持 cs*网络.

证明 设 $f: X\to Y$ 是序列商映射, $\mathcal{P}$是空间 X 的 cs*网络. 让$\mathcal{F}=f(\mathcal{P})$. 若对于 Y 的开集 U 及 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于点 $y\in U$, 由于 f 是序列商映射, 存在 X 中的收敛序列$\{x_m\}$使得$\{f(x_m)\}$是$\{y_n\}$的子序列. 设$\{x_m\}$收敛于 x, 则 $f(x)=y$, 于是 $x\in f^{-1}(U)$. 因为$\mathcal{P}$是 X 的 cs*

网络，存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得$\{x_m\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset f^{-1}(U)$，从而$\{y_n\}$的某子序列是终于 $f(P)\in\mathcal{F}$的且 $f(P)\subset U$. 故 $\mathcal{F}$是 Y 的 cs*网络. ▌

逆紧映射未必保持 cs*网络. 利用例 3.4.17(2)定义的逆紧映射 $f:\beta\mathbb{N}\to\mathbb{S}_1$. 令 $\mathcal{P}=\{\{x\}:x\in\beta\mathbb{N}\}$，由于$\beta\mathbb{N}$中不存在非平凡的收敛序列，所以$\mathcal{P}$是$\beta\mathbb{N}$的 cs*网络(cs 网络)，但是 $f(\mathcal{P})$不是$\mathbb{S}_1$的 cs*网络. $\mathcal{P}$是$\beta\mathbb{N}$的点可数的 cs*网络，由定理 3.3.12，$\beta\mathbb{N}$不具有点可数的 k 网络. 在§3.6 中将进一步介绍具有点可数 k 网络，但是不具有点可数 cs*网络的空间(引理 3.6.9).

引理 3.5.13 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数的 cs*网络. 若 K 是 X 中某一含极限点的收敛序列所成之集，则存在 $\mathcal{P}$的可数子集 $\mathcal{P}_K$ 关于 K 具有性质 CC.

证明 由于$\mathcal{P}$是 X 的点可数集族，置$\mathcal{P}_K=\{P\in\mathcal{P}:P\cap K\neq\varnothing\}$，则$\mathcal{P}_K$是$\mathcal{P}$的可数子集. 设 H 是 K 的非空紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域. 若 H 是有限集，由于 X 是 T_2 空间且$\mathcal{P}$是 X 的网络，存在$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得$\mathcal{F}$中每一元与 H 的交是单点集且 $H\subset\bigcup\mathcal{F}\subset V$，于是$\mathcal{P}_K$的子集$\mathcal{F}$是 H 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{F}\subset V$. 若 H 是无限集，记 $H=\{x\}\bigcup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$，其中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 令$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}:x\in P\subset V\}=\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 若对于每一 $k\in\mathbb{N}$, $\{x_n\}$是不终于$\bigcup_{i\le k}P_i$ 的，则存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一 $x_{n_k}\in X\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$，于是每一 P_i 仅含有$\{x_{n_k}\}$的有限项. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网络，存在 $P\in\mathcal{P}$使得$\{x_{n_k}\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset V$，于是存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $P=P_m$，从而 P_m含有$\{x_{n_k}\}$的无限项，矛盾. 因此存在 $k\in\mathbb{N}$使得$\{x_n\}$是终于$\bigcup_{i\le k}P_i$ 的，从而对于每一 $i\le k$, $H\cap P_i$ 是 H 的非空闭集. 这时 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 是有限集，不妨设 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 非空，则存在$\mathcal{P}$的子集$\mathcal{F}$使得$\mathcal{F}$是 $H\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$ 的 cfp 覆盖，$\bigcup\mathcal{F}\subset V$ 且$\mathcal{F}$的每一元与 H 相交. 令$\mathcal{F}_1=\{P_i:i\le k\}\bigcup\mathcal{F}$，则$\mathcal{P}_K$的子集$\mathcal{F}_1$是 H 的 cfp 覆盖且$\bigcup\mathcal{F}_1\subset V$. 故$\mathcal{P}_K$关于 K 具有性质 CC. ▌

定理 3.5.14 (林寿[1993])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间的序列覆盖 s 映象;

(2) X 是可度量化空间的序列商 s 映象;

(3) X 具有点可数的 cs*网络.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由引理 3.4.15. (2)$\Rightarrow$(3)由可度量化空间具有点可数基及引理 3.5.12. (3)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有点可数的 cs*网络 $\mathcal{P}$, 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系, 由引理 3.3.1, f 是 s 映射, 由引理 3.5.13 及引理 3.4.5, f 是序列覆盖映射. █

至此, 利用引理 3.2.1, 引理 3.4.14 和定理 3.5.14, 可获得问题 3.5.6(1)较完整的回答.

推论 3.5.15 (Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Tanaka[1987])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间的商 s 映象;

(2) X 是可度量化空间的序列覆盖(或序列商)商 s 映象;

(3) X 是具有点可数 cs*网络的序列空间. █

推论 3.5.15 表明, 虽然可度量化空间的商 s 映象做不到是某一可度量化空间的“紧覆盖”的商 s 映象, 但是可以做到是某一可度量化空间的“序列覆盖”的商 s 映象. 极大紧化 $\beta\mathbb{N}$是具有点可数 cs*网络的 k 空间, 但是$\beta\mathbb{N}$不是序列空间(练习 3.4.4), 所以推论 3.5.15(3)中的“序列空间”条件不可减弱为“k 空间”. 对于具有点可数 cs 网络的空间(定义 3.5.9), 也可以建立类似定理 3.5.14 和推论 3.5.15 的结果, 不过这时相应的序列覆盖映射是 F. Siwiec[1971]定义的如下的“序列覆盖映射”(sequence-covering mapping): 设映射 f:X$\to$Y, f 称为“序列覆盖映射”, 若对于 Y 中的每一收敛序列$\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$. 由于名称上的混淆, 有些学者把定义 3.4.12 中的“序列覆盖映射”或“序列商映射”称为“伪序列覆盖映射”(pseudo-sequence-covering mapping; Ikeda, Liu, Tanaka[2002])或“弱序列覆盖映射”(weakly sequence-covering mapping, 高国士[2000]).

由于陈怀鹏[1999]已构造了例子说明可度量化空间的商 s 映象未必是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象, 由推论 3.5.15 和推论 3.5.8, 具有点可数 cs*网络的序列空间未必具有点可数的 cfp 网络. 然而, 是否具有点可数 cs*网络的 Fréchet 空间具有点可数的 cfp 网络还是一个尚未解决的问题.

注 3.5.16 在§3.4 和§3.5 中以相当大的篇幅论述可度量化空间的紧覆盖映象. 20 世纪的最后 30 年关于可度量化空间的紧覆盖映象的研究大体上经历了三个阶段, 即外基——cs*网络——cfp 网络. 1973 年 E. Michael 和 K. Nagami 为了获得度量空间的紧覆盖开映象的内在刻画, 引入了外基(定义 3.4.6)的概念, 由此产生紧覆盖映射的技术关键是证明下述引理.

引理 A 若第一可数空间 X 具有基 $\mathcal{U}$, 则存在满足下述条件的可度量化空间 M 和开映射 f:M$\to$X:

(A1) 若 X 的紧子集 K 具有可数外基 $\mathcal{U}_K \subset \mathcal{U}$, 则存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K;

(A2) 若 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{U}$ 中可数个元相交, 则 $f^{-1}(C)$具有可数基.

为了证明引理 A, 先是利用 König 引理(练习 1.1.7)证明下述引理.

引理 B 设 K 是空间 X 的紧子集. 若 K 在 X 中具有可数外基 $\mathcal{U}$, 则存在满足下述条件的 $\mathcal{U}$ 的有限子集列$\{\mathcal{U}_n\}$:

(B1) $K \subset \bigcup \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(B2) 对于每一 $x \in K$, 若 $x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 则$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的邻域基;

(B3) 对于每一 $x \in K$, 存在集列$\{U_n\}$使得 $x \in \overline{U_{n+1} \cap K} \subset U_n \in \mathcal{U}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

由引理 A 及 Miščenko 引理(引理 3.3.10)证明 Michael-Nagami 定理(定理 3.5.5): 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的紧覆盖的开 s 映象. 而后, 提出了著名的 Michael-Nagami 问题: 可度量化空间的商 s 映象是否是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象?G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka(田中祥雄)[1984]引入了序列覆盖映射(定义 3.4.12)的概念, 证明了推论 3.5.15 的(1)等价于(2), 即空间 X 是可度量化空间的商 s 映象当且仅当 X 是可度量化空间的序列覆盖的商 s 映象, 同时获得了度量空间的商 s 映象的内在刻画. 这刻画是借助"弱拓扑"(定义 1.6.4)来描述的, 形式较为复杂. Y. Tanaka[1987]利用 cs*网络(定义 3.5.9)的概念证明了推论 3.5.15 的(1)等价于(3), 即空间 X 是可度量化空间的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs*网络的序列空间, 获得了 A. Arhangel'skiĭ[1966]提出问题(问题 3.5.6(1))一个较满意的回答. G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 这些结果刺激了国际上关于 Michael-Nagami 问题的研究, 尤其是带动了国内关于紧覆盖映射的探讨. 林寿[1993]证明了定理 3.5.14 的(1)等价于(3): 空间 X 是可度量化空间的序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cs*网络. 该结果证明的关键部分是发现了 cs*网络的下述性质.

引理 C 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网络. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x, 记 $K=\{x\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足:

(C1) $\{\bigcup \mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的网络;

(C2) $\mathcal{P}_n$ 的每一元与 K 的交是非空的闭集;

(C3) 对于每一 $y \in K$, 若 $y \in P_n \in \mathcal{P}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 则$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 在 X 中的网络.

引理 C 中核心的条件是(C2), 它保证了对于每一 $n\in\mathbb{N}$, K 可以分解为有限个闭集的并, 且这闭集所成的族精确加细 $\mathcal{P}_n$, 由此通过 Ponomarev 方法可构造可度量化空间 M 和 s 映射 $f:M\to X$ 使得存在 M 的紧子集 L 有 f(L)=K. 对于 X 的任意紧子集 K 情况如何? 即怎样合适的条件确保用 Ponomarev 方法构造的映射是紧覆盖映射?

条件(C1)类似"k 网络"(定义 3.3.11)的条件. E. Michael[1977]曾用"闭 k 网络"(定义 3.3.11)的概念证明了具有点可数闭 k 网络的 k 空间是可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象(练习 3.4.5). 闭 k 网络的闭性确保了可度量化空间中适当紧子集的存在. 然而, 度量空间的紧覆盖的商 s 映象未必具有点可数的闭 k 网络(恽自求[1989]), 所以寻求弱于闭 k 网络而强于 cs*网络的集族性质应是回答上述疑问的途径之一. 回忆引理 B 的条件(B1), 它足以保证"紧子集 K 分解为有限个闭集的并, 且这闭集所成的族精确加细 $\mathcal{U}_n$". 闭 k 网络也具有这一性质. 从引理 C 条件(C2)知, 在具有点可数的 cs*网络的空间中对于由收敛序列构成的紧子集同样具有这一性质. 同时结合引理 A 条件(A1)中"可数外基 $\mathcal{U}_K$"这一性质, 刘川和戴牧民[1996]引入了"强 k 网络"的概念.

定义 D　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的强 k 网络(strong k-network), 若对于 X 的每一紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_K$ 满足(*): 如果 H 是 K 的紧子集, V 是 H 在 X 中的邻域, 则存在 $\mathcal{P}_K$ 的有限子集$\{P_i\}_{i\le n}$和 H 的闭覆盖$\{F_i\}_{i\le n}$(简称为 H 的有限分解)使得每一 $F_i\subset P_i\subset V$.

为了便于叙述, 定义 3.4.4 中分别把定义 D 中的条件(*)和 H 的有限覆盖$\{P_i\}_{i\le n}$称为性质 CC 和 cfp 覆盖.

借此, 刘川和戴牧民证明了下述紧覆盖映射定理.

定理 E　空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数的强 k 网络.

虽然强 k 网络定义的引入十分自然和合理, 但是单从定义中涉及的术语"任意紧子集 K 的任意紧子集 H"就感觉它似乎有点复杂. 燕鹏飞和林寿[1999b]引入了"紧有限分解网络(compact-finite-partition network)", 后正式定名的 cfp 网络(定义 3.5.1). 显然, 强 k 网络是 cfp 网络. 无论是 E. Michael 和 K. Nagami 证明定理 3.4.9, 还是刘川和戴牧民证明定理 E, 在构造可度量化空间的紧子集时引理 A 中的条件"可数外基 $\mathcal{U}_K$"或定义 D 中的条件"可数子集

$\mathcal{P}_K$”均发挥了巨大的作用，而在 Michael-Nagami 定理(定理 3.5.5)的证明中使用了 Miščenko 引理(引理 3.3.10)把空间 X 的点可数基$\mathcal{U}$转化为对于 X 的任意子集 K 仅有可数个由$\mathcal{U}$的元组成的有限极小覆盖，由此做出$\mathcal{U}$的可数外基$\mathcal{U}_K$. 对于点可数的 cfp 网络，利用 Miščenko 引理的思想，燕鹏飞和林寿证明了相应的引理 3.5.3: 如果$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数集族，那么 X 的每一紧子集仅有可数个由$\mathcal{P}$的元组成的极小 cfp 覆盖，由此证明了定理 3.5.7: 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cfp 网络. 这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象一个较为简单的内在刻画，同时可导出关于度量空间的 s 映象研究方面的系列结论. 如

1973 年 E. Michael 和 K. Nagami[1973]关于可度量化空间的紧覆盖开(或开 s)映象的刻画.

1977 年 E. Michael[1977]关于可度量化空间的紧覆盖 s 映象的充分条件.

1984 年 G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka[1984]关于可度量化空间的商(序列覆盖)s 映象的刻画.

1987 年 Y. Tanaka[1987]关于可度量化空间的商 s 映象的刻画.

1993 年林寿[1993]关于可度量化空间的序列覆盖 s 映象的刻画.

1996 年刘川和戴牧民[1996]关于可度量化空间的紧覆盖 s 映象的刻画.

上述工作结合 1999 年陈怀鹏[1999]构造的“一个可度量化空间的商 s 映象不能表示为任一可度量化空间的紧覆盖的商 s 映象”的例子构成了度量空间的紧覆盖映射及商 s 映射研究的主线索.

本书没有按时间的发展顺序对相关的结果一一叙述，先是直接引入 cfp 覆盖及性质 CC(定义 3.4.4)，从现代的观点阐述与紧覆盖映象相关的问题及获得的结果，使读者便于了解问题的实质，避免了大量的重复，而后再重述 20 世纪后 30 年关于这一问题发展的主要进程，以便读者对于问题的本来面目有所把握.

练习

3.5.1 证明: 紧覆盖映射保持 cfp 网络.

3.5.2 证明: 度量空间的商 s 映象具有点可数 k 网络.

3.5.3 设$\mathcal{P}$是空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$称为 X 的伪基(pseudo-base; Michael[1966])，若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V，存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $K\subset P\subset V$. 证明: 对于空间 X 下述条件相互等价: (1) X 具有可数伪基; (2) X 具有可数 cs 网络; (3) X 具有可数 cs*网络; (4) X 具

有可数 k 网络; (5) X 具有可数 cfp 网络.

3.5.4 证明: 具有点可数 cs*网络的强 Fréchet 空间具有点可数基.

3.5.5 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网络. 若 K 是 X 的由某一含极限点的收敛序列组成的紧子集, 证明: 若 U 中 K 在 X 中的邻域, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$ 且 $\mathcal{F}$ 中的每一元与 K 的交是非空的闭集. 由此再证明: 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足:

(1) $\{\bigcup\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的网络;

(2) $\mathcal{P}_n$ 的每一元与 K 的交是非空的闭集;

(3) 对于每一 $y\in K$, 若 $y\in P_n\in\mathcal{P}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$, 则$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y 在 X 中的网络.

3.5.6 设$\mathcal{P}$是空间X的子集族. $\mathcal{P}$称为X的wcs*网络(wcs*-network; 林寿, Tanaka[1994]), 若对于 X 的开集 U 及 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 $x\in U$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 P 含有序列$\{x_n\}$的无限项且 $P\subset U$, 即存在 $P\in\mathcal{P}$和子序列$\{x_{n_i}\}$使得$\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P\subset U$. 证明: (1) 对于空间 X, X 的 k 网络和 cs*网络都是 X 的 wcs*网络; (2) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网络且 X 的每一紧子集是序列紧的.