§2.5　度量空间的完全性

本节继续介绍度量空间的另两个重要性质：完全性和 Baire 空间性质.

定义 2.5.1　设(X, d)是度量空间. X 中的序列$\{x_n\}$称为 Cauchy 序列(Cauchy sequence)，若对于任意的$\varepsilon>0$，存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 n, m>k 时有 $d(x_n, x_m)<\varepsilon$. X 称为完全度量空间(complete metric space)[39]，若 X 中的每一 Cauchy 序列是收敛序列.

度量空间中的Cauchy序列与完全度量空间依赖于空间中的度量. 如对于实数空间$\mathbb{R}$，在欧几里得度量 d 下($\mathbb{R}$, d)是完全度量空间，序列{n}在($\mathbb{R}$, d)中不是 Cauchy 序列. 若定义 $d': \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0, +\infty)$使得 $d'(x, y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$，则 d'是$\mathbb{R}$上的度量，d'导出$\mathbb{R}$上的度量拓扑就是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑(练习 2.1.2)，{n}是($\mathbb{R}$, d')的 Cauchy 序列，但是{n}不是($\mathbb{R}$, d')中的收敛序列，所以($\mathbb{R}$, d')不是完全度量空间. 另一方面，空间($\mathbb{R}$, d)同胚于子空间((0, 1), d)，但是((0, 1), d)不是完全度量空间，因为序列{1/n}是((0, 1), d)中不收敛的 Cauchy 序列.

易验证，如果完全度量空间 X 与空间 Y 同胚，则存在 Y 上的度量 d 使得(Y, d)是完全度量空间.

例 2.5.2　Hilbert 空间是完全度量空间.

证明　设$\{x_n\}$是 Hilbert 空间(**H**, d)(例 2.1.3)中的 Cauchy 序列，其中每一 $x_n=(x_{ni})\in\mathbf{H}$. 对于任意的 n, m, $i\in\mathbb{N}$有$|x_{ni}-x_{mi}|\leq d(x_n, x_m)$. 因此，对于每一固定的 $i\in\mathbb{N}$，序列$\{x_{ni}\}$是实数空间$\mathbb{R}$中的 Cauchy 序列，由于实数空间$\mathbb{R}$的完全性，设序列$\{x_{ni}\}$在$\mathbb{R}$中收敛于 y_i. 令 $y=(y_i)$. 对于任意的$\varepsilon>0$，存在 $j\in\mathbb{N}$使得当 n, m>j 时有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{ni}-x_{mi})^2}=d(x_n, x_m)<\varepsilon$，因而对于任意的 $k\in\mathbb{N}$有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{ni}-x_{mi})^2}<\varepsilon$. 在上式中令 $m\to+\infty$，可得 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{ni}-y_i)^2}\leq\varepsilon$，上式中再令 $k\to+\infty$，则有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{ni}-y_i)^2}\leq\varepsilon$，由此得到

[39] 过去习惯把 complete metric space 译为完备度量空间. 本书按《数学名词》(科学出版社, 1993)改译为完全度量空间.

$(y_i-x_{ni})\in\mathbf{H}$, 而 $x_n=(x_{ni})\in\mathbf{H}$, 可见$(y_i)\in\mathbf{H}$, 再由上式给出结论: $\{x_n\}$收敛于 y. 故$(\mathbf{H}, d)$是完全度量空间. ▌

定理 2.5.3 (Cantor[40]定理, 对于实直线 1880)度量空间(X, d)是完全的当且仅当若$\{F_n\}$是空间 X 的单调递减的非空闭集列且$\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$, 则$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$是单点集.

证明 必要性. 设(X, d)是完全度量空间, $\{F_n\}$是 X 的单调递减的非空闭集列且$\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 取$x_n\in F_n$, 下证序列$\{x_n\}$是Cauchy序列. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$, 对于每一$\varepsilon>0$, 存在$k\in\mathbb{N}$, 当 n>k 时有 $d(F_n)<\varepsilon$, 于是当$n\geq m>k$时有 x_n, $x_m\in F_m$, 所以$d(x_n, x_m)\leq d(F_m)<\varepsilon$, 从而$\{x_n\}$是Cauchy序列. 因为X是完全的, 所以序列$\{x_n\}$收敛于某点 $x\in X$. 因此, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, x 的任何邻域与 F_n 相交, 而 F_n 是闭集, 于是 $x\in F_n$. 故 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

若有$y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 则对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $d(x, y)\leq d(F_n)$, 再由$\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$, $d(x, y)=0$, 所以 x=y. 故$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$是单点集.

充分性. 设$\{x_n\}$是X中的Cauchy序列. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在 $m_k\in\mathbb{N}$使得当 $n>m_k$ 时有 $d(x_n, x_{m_k})<1/2^k$. 不妨设每一 $m_k<m_{k+1}$. 置 $F_k=\overline{B(x_{m_k}, 1/2^{k-1})}$, 则 F_k 是 X 的非空的闭集列且$d(F_k)\leq 1/2^{k-2}$, 所以$\lim\limits_{k\to\infty} F_k=0$.

设$y\in F_{k+1}$, 则$d(y, x_{m_k})\leq d(y, x_{m_{k+1}})+d(x_{m_{k+1}}, x_{m_k})<1/2^k+1/2^k=1/2^{k-1}$, 于是$y\in F_k$, 所以 $F_{k+1}\subset F_k$, 因而$\{F_k\}$是递减的.

由假设, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ 是一单点集{x}, 下证 Cauchy 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 对于任意的$\varepsilon>0$, 选取 $k\in\mathbb{N}$使得 $1/2^{k-2}<\varepsilon$, 则当 $n>m_k$ 时 $d(x_{m_k}, x_n)<1/2^k$. 此外, 有 $x\in F_k$, 于是 $d(x, x_{m_k})\leq 1/2^{k-1}$, 从而$d(x, x_n)\leq d(x, x_{m_k})+d(x_{m_k}, x_n)<1/2^{k-1}+1/2^k<1/2^{k-2}<\varepsilon$. 所以序列$\{x_n\}$收敛于 x. 故(X, d)是完全度量空间. ▌

---

[40] 德国数学家 G. Cantor(1845-1918), 他是德国数学家 E. Kummer(1810-1893)和 K. Weierstrass(1815-1897)的学生.

Cantor 定理的完整证明来自波兰数学家 K. Kuratowski[41](1896-1980)[1930]. 下述 Kuratowski 定理有利于完全性的推广.

推论 2.5.4 **(**Kuratowski 定理[1933])度量空间(X, d)是完全的当且仅当对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族$\mathscr{F}$, 若对于每一$\varepsilon>0$, 存在$F\in\mathscr{F}$使得$d(F)<\varepsilon$, 则$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$.

证明 由Cantor定理, 只须证明必要性. 设$\{F_s\}_{s\in S}$是完全度量空间(X, d)的具有有限交性质的闭集族且对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $s_i\in S$ 使得 $d(F_{s_i})<1/i$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $F_n=\bigcap_{i\le n}F_{s_i}$, 则集列$\{F_n\}$满足 Cantor 定理的条件, 于是存在 $x\in X$ 使得$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\{x\}$. 对于每一固定的 $s\in S$, 让 $F'_n=F_s\cap F_n$, 那么集列$\{F'_n\}$仍满足 Cantor 定理的条件, 于是 $\varnothing\neq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F'_n=F_s\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n)=F_s\cap\{x\}$, 所以$x\in F_s$. 故$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$. ▌

显然, 完全度量空间的闭子空间仍是完全度量空间. 为了获得更一般的结果. 先讨论完全度量空间的可数积性质.

定理 2.5.5 设$\{(X_n, d_n)\}$是度量空间列, 且每一 $d_n(X_n)\le 1$. 对于笛卡儿积 $X=\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$赋予定理2.1.9 中的度量 d, 则(X, d)是完全度量空间当且仅当每一(X_m, d_m)是完全度量空间.

证明 设(X, d)是完全度量空间. 取定点$(x^*_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$. 对于每一 $m, n\in\mathbb{N}$, 让 $A_n=\begin{cases}\{x^*_n\}, & n\neq m\\ X_m, & n=m\end{cases}$, 并令 $X^*_m=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 则 X^*_m是$\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$的闭子空间, 于是 X^*_m是完全度量空间. 让 $p^*_m:X^*_m\to X_m$是投影映射. 对于(X_m, d_m)中的 Cauchy 序列$\{x_n\}$, 由于 $d({p^*_m}^{-1}(x_i), {p^*_m}^{-1}(x_k))=d_m(x_i, x_k)/2^m$, 所以$\{{p^*_m}^{-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X^*_m$中的 Cauchy 序列, 于是序列$\{{p^*_m}^{-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$存在极限且这极限关于$p^*_m$的象是序列$\{x_n\}$的极限. 故$(X_m, d_m)$是完全度量空间.

设每一(X_m, d_m)是完全度量空间. 让$\{(x^n_m)_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间(X, d)中的 Cauchy 序列, 则对于每一$m\in\mathbb{N}$, $\{x^n_m\}_{n\in\mathbb{N}}$是$(X_m, d_m)$中的 Cauchy 序列, 设这序列收敛于 $x^0_m\in X_m$. 由定理2.1.9 及积拓扑的构造, 序列$\{(x^n_m)_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$收敛于$(x^0_m)\in X$. 因此, (X, d)是完全度量空间. ▌

---

[41] Kuratowski 是波兰数学学派奠基人 Z. Janiszewski(1888-1920)和 W. Sierpiński(1882-1969)的学生.

引理 2.5.6 度量空间 X 的每一 G_δ 集可闭嵌入积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$.

证明 设 A 是度量空间(X, d)的 G_δ 集，存在 X 的闭集列$\{F_i\}$使得 $X\setminus A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $X_{i+1}=\mathbb{R}$, 定义函数 $f_{i+1}:X\to X_{i+1}$ 使得每一 $f_{i+1}(x)=d(x, F_i)$, 由引理 2.2.2, f_{i+1} 是连续的. 又定义 $X_1=X$, $f_1=\mathrm{id}_X:X\to X_1$. 令 $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 再定义 $f=\Delta_F:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i=X\times\mathbb{R}^\omega$. 则 f 是闭嵌入.

事实上, 因为 f_1 是同胚, 由对角线引理(引理 1.3.8), f 是嵌入函数. 设 $y\in X\times\mathbb{R}^\omega\setminus f(X)$. 记 $y=(y_n)$, 则存在 $i>1$ 使得 $y_i\neq f_i(y_1)$, 由$\mathbb{R}$是 T_2 空间及 f_i 的连续性, 分别取 y_i 在$\mathbb{R}=X_i$中的开邻域 U 和 y_1 在 X 中的开邻域 V 使得 $U\cap f_i(V)=\varnothing$, 则 y 在 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 中的开邻域 $p_i^{-1}(U)\cap p_1^{-1}(V)$与 f(X)不相交. 这表明 f(X)是 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭集.

令 $\mathbb{R}^+=(0, +\infty)$. 显然, $f(A)\subset f(X)\cap(X\times(\mathbb{R}^+)^\omega)$. 如果存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)\in X\times(\mathbb{R}^+)^\omega$, 则当 $i>1$ 时有 $f_i(x)=p_i f(x)>0$, 于是 $x\in X\setminus F_{i-1}$, 从而 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(X\setminus F_i)=A$. 故 $f(A)=f(X)\cap(X\times(\mathbb{R}^+)^\omega)$. 由于 $X\times(\mathbb{R}^+)^\omega$ 同胚于 $X\times\mathbb{R}^\omega$, 所以 f(A)是 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间. 故 A 同胚于积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间. ∎

定理 2.5.7 完全度量空间的 G_δ 子空间仍是完全度量空间.

证明 设 X 是完全度量空间, A 是 X 的 G_δ 子空间. 由引理 2.5.6, A 同胚于积空间 $X\times\mathbb{R}^\omega$ 的闭子空间, 再由定理 2.5.5, $X\times\mathbb{R}^\omega$ 是完全度量空间, 从而 A 是完全度量空间. ∎

由此, 无理数空间$\mathbb{P}$是完全度量空间.

下述两个定理是 Cantor 完全性定理最好的应用之一.

定理 2.5.8 若 M 是度量空间 X 的完全度量子空间, 则 M 是 X 的 G_δ 集.

证明 设 d 是子空间 M 上的完全度量. 让 $G=\{x\in\overline{M}$: 对于每一 $\varepsilon>0$ 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 $d(M\cap U)<\varepsilon\}$, 则 $M\subset G$ 且 G 是 X 的 G_δ 集. 事实上, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $O_n=\{x\in\overline{M}$: 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $d(M\cap U)<1/n\}$, 则 O_n 是$\overline{M}$的开集. 由于

$G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$，所以 G 是$\overline{M}$的 G_δ 集. 而$\overline{M}$是 X 的 G_δ 集(定理 2.2.4)，故 G 是 X 的 G_δ 集.

定义函数 $f:G\to M$ 如下：对于每一 $x\in G$，取定$\{U_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在度量空间 X 中可数递减的局部基，那么$\{\overline{M\cap U_{x,n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$(关于子空间 M 的闭包，下同)是完全度量空间(M, d)的单调递减的非空闭集列且$\lim_{n\to\infty} d(\overline{M\cap U_{x,n}})=0$(注意到，$\overline{M\cap U_{x,n}}\subset M\cap cl_X(U_{x,n})$)，由 Cantor 定理，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{M\cap U_{x,n}}$是单点集，定义其为$\{f(x)\}$. 对于每一 $x\in G$ 和$\varepsilon>0$，由 G 的定义，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $d(\overline{M\cap U_{x,n}})<\varepsilon$，当 $z\in G\cap U_{x,n}$时，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $U_{z,m}\subset U_{x,n}$，于是 $f(z)\in\overline{M\cap U_{z,m}}\subset\overline{M\cap U_{x,n}}$，所以 $d(f(x), f(z))\le d(\overline{M\cap U_{x,n}})<\varepsilon$，从而 f 在 x 连续. 故 f 在 G 上连续.

显然，当 $x\in M$ 时有 f(x)=x. 对于每一 $z\in G\subset\overline{M}$，存在 M 中的序列$\{x_i\}$收敛于 z，于是序列$\{f(x_i)\}$(即$\{x_i\}$)收敛于 f(z)，从而 $z=f(z)\in M$. 因此 G=M，于是 M 是 X 的 G_δ 集. ∎

称度量空间(X, d)与度量空间(Y, d’)是等距的(isometric)，如果存在满射 $f:X\to Y$ 使得对于每一 $x, z\in X$ 有 d’(f(x), f(z))=d(x, y). 这 f 称为等距映射. 显然，若完全度量空间 X 与度量空间 Y 等距，则 Y 也是完全度量空间；两等距的度量空间是同胚的.

定理 2.5.9 每一度量空间等距于某一完全度量空间的子空间.

证明 设(X, d)是任一度量空间. 让 Y 是空间 X 上所有有界实值连续函数的集. 对于每一 $f, g\in Y$，定义 $d'(f, g)=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in X\}$. 易验证(Y, d’)是度量空间.

(9.1) (Y, d’)是完全度量空间.

设$\{f_n\}$是(Y, d’)的 Cauchy 序列. 对于每一 $x\in X$ 和 $n, m\in\mathbb{N}$，由于$|f_n(x)-f_m(x)|\le d'(f_n, f_m)$，所以$\{f_n(x)\}$是实数空间$\mathbb{R}$的 Cauchy 序列，于是$\{f_n(x)\}$在$\mathbb{R}$中存在极限，设为 f(x). 从而定义了函数 $f: X\to\mathbb{R}$. 则在(Y, d’)中序列$\{f_n\}$收敛于 f. 事实上，对于任意的$\varepsilon>0$，存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 n, m>k 时有 $d'(f_n, f_m)<\varepsilon/2$. 对于每一 $x\in X$，存在自然数 $n_x>k$ 使得$|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$，于是当 n>k 时有$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_{n_x}(x)|+|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$，从而当 n>k 时有 $d'(f_n, f)\le\varepsilon$. 故序列$\{f_n\}$在 X 上一致收敛于 f，从而 $f\in Y$. 因此，(Y, d’)是完全度量空间.

(9.2) (X, d)与(Y, d’)的子空间等距.

取定 $a\in X$, 对于每一 $x\in X$, 定义 $f_x \in \mathbb{R}^X$ 使得 $f_x(z)=d(z, x)-d(z, a)$, $z\in X$. 由三角不等式, $|f_x(z)|\le d(a, x)$, 所以 $f_x \in Y$. 下面证明对于每一 $x, y\in X$ 有 $d'(f_x, f_y)=d(x, y)$. 对于每一 $z\in X$, $f_x(z)-f_y(z)=d(z, x)-d(z, a)-d(z, y)+d(z, a)\le d(x, y)$, 由对称性, 有$|f_x(z)-f_y(z)|\le d(x, y)$, 即 $d'(f_x, f_y)\le d(x, y)$. 因为 $f_x(y)-f_y(y)=d(y, x)-d(y, a)+d(y, a)=d(y, x)$, 所以 $d'(f_x, f_y)\ge d(x, y)$. 故 $d'(f_x, f_y)=d(x, y)$.

由(9.1)和(9.2), 度量空间(X, d)等距于完全度量空间(Y, d')的子空间. ▌

定理 2.5.10 空间 X 是完全度量空间当且仅当 X 是 Čech 完全度量空间.

证明 设(X, d)是完全度量空间. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{A}_i=\{B(x, 1/i)\}_{x\in X}$. 由 Kuratowski 定理, 对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{F}$, 如果对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $\mathcal{F}$ 中的元直径小于 $\mathcal{A}_i$, 则 $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$. 由定理 1.7.3, X 是 Čech 完全空间.

反之, 设度量空间 X 是 Čech 完全的. 由定理 2.5.9, 存在等距映射 $f:X\to f(X)$使得 $f(X)$ 是完全度量空间 Y 的稠密子集. 让 cY 是 Y 的 T_2 紧化, 则 cY 是 X 的紧化. 由引理 1.7.1, $c(f(X))$是 cY 的 G_δ 集, 所以 $f(X)$是完全度量空间 Y 的 G_δ 集, 再由定理 2.5.7, $f(X)$是完全度量空间, 故 X 是完全度量空间. ▌

由定理 1.7.4, 定理 1.7.5 分别有完全度量空间的映射定理和 Baire 范畴定理.

推论 2.5.11 设 X, Y 是度量空间. 若 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 则 X 是完全度量空间当且仅当 Y 是完全度量空间. ▌

推论 2.5.12 (Hausdorff[1914])完全度量空间是 Baire 空间. ▌

推论 2.5.13 (Bourbaki[1948])设$\{X_s\}_{s\in S}$是一族的完全度量空间, 则积空间$\prod_{s\in S}X_s$是 Baire 空间.

证明 设 $X=\prod_{s\in S}X_s$ 且$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间 X 的开稠密子集列. 要证$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ 是 X 的稠密子集, 即若 A_0 是 X 的非空开集, 则$\bigcap_{n\in\omega}A_n\neq\varnothing$. 对于每一 $n\in\omega$, 由于 A_n 是 X 的非空开集, 存在 S 的有限子集 S_n 和每一空间 X_s 的非空开集 $W_{s,n}$ 使得$\prod_{s\in S}W_{s,n}\subset A_n$ 且当 $s\in S\setminus S_n$ 时 $W_{s,n}=X_s$. 令 $T=\bigcup_{n\in\omega}S_n$, $Y=\prod_{s\in T}X_s$, 则 T 是 S 的可数子集且由定理 2.5.5 知 Y 是

完全度量空间. 设 $p:X\to Y$ 是投影映射, 则 p 是开映射, 于是 $\{p(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 Y 的开的稠密子集列. 由推论 2.5.12, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$ 是 Y 的稠密子集且 $p(A_0)$ 是 Y 的非空开集, 存在 $(y_s)_{s\in T}\in\bigcap_{n\in\omega} p(A_n)$. 取定 $x=(x_s)_{s\in S}\in X$ 使得当 $s\in T$ 时有 $x_s=y_s$, 则 $x\in\bigcap_{n\in\omega} A_n$. 故 $\prod_{s\in S} X_s$ 是 Baire 空间. ▮

练习

2.5.1 证明: 度量空间中含有聚点的 Cauchy 序列是收敛序列.

2.5.2 局部紧的度量空间是完全度量空间.

2.5.3 证明: 可分度量空间 X 是完全可度量的当且仅当 X 可闭嵌入 $\mathbb{R}^\omega$.

2.5.4 设 X 是完全度量空间, $f:X\to Y$ 是闭映射, 则 Y 是完全度量空间当且仅当 Y 是第一可数空间.

§2.6 零维度量空间的映象

本节介绍几个度量空间之间的映射定理, 主要是把某些度量空间表示为零维度量空间的映象, 内容包括 Morita 定理, Engelking 定理和 Alexandroff 定理等. 一方面说明映射在联系不同类空间之间的作用, 另一方面为第三章介绍度量空间的映射理论提供背景材料, 同时也为第五章讨论函数空间的完全性做准备.

度量空间的逆紧映象是度量空间(定理 2.4.2), K. Morita[1955]证明了任一度量空间可表为性质较好的 Baire 零维空间(例 2.1.12)的子空间的逆紧映象.

先将定义 2.3.6 中空间的网络概念推广为空间中点的网络. 对于固定的 $x\in X$, 如果 X 的子集族 $\mathcal{F}$ 满足: $x\in\bigcap\mathcal{F}$ 且若 U 是 x 在 X 中的邻域, 存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $F\subset U$, 则称 $\mathcal{F}$ 是点 x 在 X 中的网络. 显然, $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络当且仅当 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网络.

空间 X 的权(weight)定义为 $w(X)=\omega+\min\{|\mathcal{B}|:\mathcal{B}$ 是空间 X 的基$\}$. 显然, 空间 X 具有可数基当且仅当 $w(X)=\omega$.

定理 2.6.1 (Morita 定理[1955])任一权为 λ 的度量空间是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的子空间的逆紧映象.

证明 设(X, d)是无限的度量空间且 $w(X)=\lambda$. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间,

再由定理 1.4.5, X 的每一开覆盖具有局部有限的闭加细. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\mathscr{F}_i$ 是 X 的开覆盖$\{B(x, 1/i)\}_{x\in X}$的局部有限的闭加细, 那么$|\mathscr{F}_i|\leq\lambda$, 记 $\mathscr{F}_i=\{F_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 其中$|\Lambda|=\lambda$(可能某些 $F_{\alpha,i}=\varnothing$). 这时每一 $d(F_{\alpha,i})\leq 2/i$. 置 $M=\{(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}\neq\varnothing\}$, 并且赋予 M 离散空间$\Lambda$的可数次积空间$\Lambda^{\omega}$的子空间拓扑, 即 M 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的子空间. 对于每一$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 取定 $x_\alpha\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 如果 U 是 x_α 在 X 中的邻域, 存在$\varepsilon>0$ 使得 $B(x_\alpha, \varepsilon)\subset U$, 当 $2/i<\varepsilon$ 时有 $x_\alpha\in F_{\alpha_i,i}\subset B(x_\alpha, \varepsilon)\subset U$, 所以$\{F_{\alpha_i,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是点 x_α 在 X 中的网络. 若 $x\in X\setminus\{x_\alpha\}$, 则存在$i\in\mathbb{N}$使得$F_{\alpha_i,i}\in X\setminus\{x\}$, 于是$\{x_\alpha\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 故$x_\alpha$ 是唯一确定的. 定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$.

(1.1) $f:M\to X$ 是连续的满射.

对于每一$x\in X$, $i\in\mathbb{N}$, 存在$\alpha_i\in\Lambda$使得$x\in F_{\alpha_i,i}$. 令$\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}$, 由于$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 那么$\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 设 $f(\alpha)=x$, 让 U 是 x 在 X 中的邻域, 因为 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以$\{F_{\alpha_i,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{\alpha_m,m}\subset U$. 令 $V=\{\gamma\in M:\gamma$ 的第 m 个坐标是$\alpha_m\}$, 由于Λ赋予离散拓扑, 于是 V 是 M 中含有α 的开集. 对于每一$\gamma=(\gamma_i)\in V$, $f(\gamma)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i,i}\subset F_{\alpha_m,m}$, 所以 $f(V)\subset F_{\alpha_m,m}\subset U$, 故 f 是连续的.

(1.2) f 是紧映射.

对于每一 $x\in X$, $i\in\mathbb{N}$, 置$\Gamma_i=\{\alpha\in\Lambda: x\in F_{\alpha,i}\}$, 则$\Gamma_i$是$\Lambda$的非空有限子集. 由 Tychonoff 积空间(定理 1.1.12), $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 是Λ^{ω}的紧子集. 如果$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 则 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以$\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 故$\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\subset f^{-1}(x)$. 如果$\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$, 所以每一$\alpha_i\in\Gamma_i$, 于是 $\alpha\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 故 $f^{-1}(x)\subset\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$. 因此 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 即 f 是紧映射.

设$\alpha=(\alpha_i)\in M$, $n\in\mathbb{N}$, 令 $B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)=\{(\beta_i)\in M:$ 当 $i\leq n$ 时有 $\beta_i=\alpha_i\}$.

(1.3) $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n))\subset\bigcap_{i\leq n}F_{\alpha_i,i}$.

对于每一 $\beta=(\beta_i)\in B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)$, $f(\beta)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\beta_i,i}\subset\bigcap_{i\le n}F_{\alpha_i,i}$，于是 $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n))\subset\bigcap_{i\le n}F_{\alpha_i,i}$. 这时$\{B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$是$\alpha$在 M 中的局部基.

(1.4) f 是闭映射.

设 C 是空间 M 的闭集且 $x\in\overline{f(C)}$. 因为 $\mathscr{F}_1$是 X 的局部有限集族且由(1.3), 对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 有 $f(C\cap B(\alpha))\subset F_{\alpha,1}$，于是$\{f(C\cap B(\alpha))\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的局部有限集族. 由于 $C=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(C\cap B(\alpha))$, 由引理 1.4.4, 存在$\alpha_1\in\Lambda$使得 $x\in\overline{f(C\cap B(\alpha_1))}$. 继续上述过程, 存在$\gamma=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $x\in\overline{f(C\cap B(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))}\subset\bigcap_{i\le n}F_{\alpha_i,i}$，于是 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i,i}$，从而$\gamma\in M$ 且 $f(\gamma)=x$. 另一方面, 每一 $C\cap B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_n)\neq\varnothing$, 则 $\gamma\in\overline{C}=C$, 所以 $x\in f(C)$. 故 f(C)是 X 的闭集, 因此 f 是闭映射.

综上所述, X 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的子空间 M 的逆紧映象. ▮

M. Katětov 和 A. Stone 证明了 Baire 零维空间代表了足够多的零维完全度量空间(universal space).

定理 2.6.2 (Katětov[1952])设 X 是权为 λ 的度量空间. 若 IndX=0, 则 X 可嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$.

证明 设 d 是 X 上的度量. 由引理 2.2.6, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, X 具有互不相交的开覆盖 $\mathscr{W}_i=\{W_s\}_{s\in S_i}$ 使得每一 $d(W_s)<1/i$ 且$|S_i|\le\lambda$. 赋予集合 S_i 离散拓扑, 定义函数 $f_i:X\to S_i$ 如下: 对于每一 $x\in X$, 由于 $\mathscr{W}_i$ 是 X 的互不相交覆盖, 存在唯一的 $s\in S_i$ 使得 $x\in W_s$, 让 $f_i(x)=s$. 因为每一 $f_i^{-1}(s)=W_s$，所以 f_i 是连续的. 不妨设 S_i 是离散空间 X_i 的子集且$|X_i|=\lambda$.

令 $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，定义对角线函数 $f=\Delta_F:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$. 设 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$, 那么存在$n\in\mathbb{N}$使得 $d(x,A)\ge 1/n$, 于是 $f_n(x)\notin f_n(A)=\overline{f_n(A)}$, 所以连续函数族 F 分离 X 中点与闭集, 由对角线引理(引理 1.3.8), f 是嵌入函数.

因为积空间$\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 同胚于 Baire 零维空间 $B(\lambda)$, 所以 X 可嵌入 $B(\lambda)$. ▮

定理 2.6.3 (Stone[1962])设 X 是权为λ的完全度量空间. 若 IndX=0, 则 X 可闭嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$.

证明　设 d 是 X 上的完全度量. 由引理 2.2.6, 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, X 具有互不相交的开覆盖 $\mathscr{W}_i=\{W_s\}_{s\in S_i}$ 使得每一 $d(W_s)<1/i$ 且 $|S_i|\le\lambda$. 从定理 2.6.2 的证明, 可定义嵌入函数 $f:X\to\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$. 则 $(s_i)\in f(X)$ 当且仅当 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)\neq\varnothing$. 事实上, 若 $(s_i)\in f(X)$, 则存在 $x\in X$ 使得每一 $f_i(x)=s_i$, 于是 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)$. 若存在 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)$, 则每一 $f_i(x)=s_i$, 于是 $(s_i)=f(x)\in f(X)$.

设 $y=(s_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i\setminus f(X)$, 则或者存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $s_i\in X_i\setminus f_i(X)$, 或者 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)=\varnothing$, 其中每一 $s_i\in f_i(X)$. 如果存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $s_i\in X_i\setminus f_i(X)$, 则 y 在 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 中的开邻域 $p_i^{-1}(s_i)$ 与 f(X) 不相交. 如果 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}f_i^{-1}(s_i)=\varnothing$, 由于 $f_i^{-1}(s_i)=W_{s_i}$, 所以 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}W_{s_i}=\varnothing$. 因为每一 W_{s_i} 是 X 的闭集且 $d(W_{s_i})<1/i$, 由 Kuratowski 定理(推论 2.5.4), 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcap_{i\le n}W_{s_i}=\varnothing$. 则 y 在 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 中的开邻域 $\bigcap_{i\le n}p_i^{-1}(s_i)$ 与 f(X) 不相交. 从而 f(X) 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 的闭集. 故 X 可闭嵌入 Baire 零维空间 $B(\lambda)$. ▌

推论 2.6.4　对于每一无限基数 λ, Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的 G_δ 子空间可闭嵌入 $B(\lambda)$.

证明　设 X 是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$ 的非空的 G_δ 子空间, 由定理 2.2.7, IndX=0. 因为离散空间是完全度量空间, 由定理 2.5.5 和定理 2.5.7, X 是权数不超过 λ 的完全度量空间, 再由定理 2.6.3, X 可闭嵌入 $B(\lambda)$. ▌

非完全的度量空间不能表示为 Baire 零维空间的闭映象(练习 2.5.4). 1969 年 R. Engelking 证明了每一完全度量空间必是 Baire 零维空间的闭映象.

引理 2.6.5　设 F 是度量空间 (X, d) 的非空闭子集. 如果 IndX=0, 则存在闭映射 $f: X\to F$ 使得 $f_{|F}$ 是恒等映射.

证明　由于 IndX=0, 存在 X 的开闭子集的递减序列 $\{U_i\}$ 使得每一 $F\subset U_i\subset\{x\in X: d(x, F)<1/i\}$. 令 $W_1=X\setminus U_2$, $W_i=U_i\setminus U_{i+1}$, $i>1$. 则 $X\setminus F=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}W_i$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 由引理 2.2.6, X 的开闭集 W_i 可以表示为 X 的互不相交的开闭集族 $\mathscr{F}_i=\{F_s\}_{s\in S_i}$ 的并, 且每一 $d(F_s)<1/i$. 不妨设, 当 $i\neq j$ 时 $S_i\cap S_j=\varnothing$. 记 $S=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}S_i$. 则

(5.1) $\{F_s\}_{s\in S}$ 是 X 的不相交的开闭集族;

(5.2) 若 $s_n \in S_{i_n}$ 且 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} d(F_{s_n})=\lim_{n\to\infty} d(F, F_{s_n})$;

(5.3) $X\setminus F=\bigcup_{s\in S} F_s$.

对于每一 $i\in\mathbb{N}$，让 P_i 是 F 的满足对于每一不同的 $x, y\in P_i$ 有 $d(x, y)\geq 1/i$ 的极大子集(P_i 的存在性见定理 2.2.8 中(4)$\Rightarrow$(5)的证明)，那么

(5.4) 集 P_i 没有聚点;

(5.5) 对于每一 $x\in F$，存在 $p\in P_i$ 使得 $d(x, p)<1/i$;

从而，对于每一 $i\in\mathbb{N}$和 $s\in S_i$，存在 $p_s\in P_i$ 使得

(5.6) $d(p_s, F_s)<d(F, F_s)+2/i$.

定义 $f:X\to F$ 满足当 $x\in F$ 时，$f(x)=x$，当 $x\in F_s$ 时，$f(x)=p_s$. 由(5.1)和(5.3)，f 在 $X\setminus F$ 的每一点是连续的且 $f_{|F}$ 是恒等映射. 为了证明 f 的连续性，还需证明

(5.7) 若 $X\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in F$，则序列$\{f(x_n)\}$收敛于 $x=f(x)$.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $s_n\in S_{i_n}$ 使得 $x_n\in F_{s_n}$. 由于序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in F$，所以数列$\{d(x_n, F)\}$收敛于 0，于是 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$. 下面证明数列$\{d(x_n, f(x_n))\}$收敛于 0. 由(5.6)及 $f(x_n)=p_{s_n}$ 有 $d(x_n, f(x_n))=d(x_n, p_{s_n})\leq d(F_{s_n})+d(p_{s_n}, F_{s_n})\leq d(F_{s_n})+d(F, F_{s_n})+2/i_n$，再由(5.2)，$\{d(x_n, f(x_n))\}$收敛于 0. 故$\{f(x_n)\}$收敛于 x.

(5.8) f 是闭映射.

设 A 是 X 的闭集且 $x\in\overline{f(A)}$. 由于 $\overline{f(A)}=\overline{f(A\cap F)}\cup\overline{f(A\setminus F)}=\overline{A\cap F}\cup\overline{f(A\setminus F)}$，设 $x\in\overline{A\cap F}$ 或者存在 $A\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$收敛于 x. 若 $x\in\overline{A\cap F}$，因为 $A\cap F$ 是闭集，则 $x\in A\cap F=f(A\cap F)\subset f(A)$. 若存在 $A\setminus F$ 中的序列$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$收敛于 x，则对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $s_n\in S_{i_n}$ 使得 $x_n\in F_{s_n}$，那么序列$\{p_{s_n}\}$收敛于 x. 由(5.4)，或者 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$，或者存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x=f(x_n)$. 如果 $x=f(x_n)$，则 $x\in f(A)$. 如果 $\lim_{n\to\infty} i_n=\infty$，则 $x\in A\cap F$，所以 $x=f(x)\in f(A)$. 故 f(A)是 F 的闭集. ∎

定理 2.6.6 (Engelking 定理[1969])每一权为λ的完全度量空间是 Baire 零维空间 $B(\lambda)$的闭映象.

证明 设 X 是权为λ的完全度量空间. 由 Morita 定理(定理 2.6.1), 存在 Baire 零维空间 $B(\lambda)$及其子空间 M 使得 X 是 M 的逆紧映象, 由推论 2.5.11, M 是 $B(\lambda)$的完全度量子空间, 又由定理 2.2.7 和定理 2.6.3, M 同胚于 $B(\lambda)$的闭子空间 C. 再由引理 2.6.5, C 是 $B(\lambda)$的闭映象, 从而 X 是 $B(\lambda)$的闭映象. ∎

本节的第二部分讨论紧度量空间的映射定理, 与其联系的是著名的 Cantor 三分集 (Cantor's middle-third set). Cantor 三分集是单位闭区间$\mathbb{I}$的子空间 $C=\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$, 其中集合 C_i 归纳定义如下: $C_1=\mathbb{I}\setminus(1/3, 2/3)$, 若已定义了 C_i, 把 C_i 的每一连通分支(闭区间)三等分后各去掉中间的开区间所得到的集定义为 C_{i+1}. C_i 由 2^i 个长度为$(1/3)^i$ 的互不相交的闭区间构成, $\mathbb{I}\setminus C_i$ 由 2^i-1 个长度不小于$(1/3)^i$ 的互不相交的开区间构成. 同胚于 C 的空间称为 Cantor 集 (Cantor set). 显然, Cantor 集是紧度量空间. 由推论 1.1.9 和定理 2.4.2, Cantor 集的 T_2 连续象是紧度量空间(练习 2.4.1). 1927 年 P. Alexandroff 证明了其逆命题也是正确的.

引理 2.6.7 设 C 是 Cantor 三分集, 则对于每一 $n, m\in\mathbb{N}$有

(1) $C=\bigcup_{i\le n} D_i$, 其中$\{D_i\}_{i\le n}$是 C 的互不相交的非空紧子集族;

(2) 各 $D_i=\bigcup_{j\le m(i)} D_{ij}$, 其中$\{D_{ij}\}_{j\le m(i)}$是 C 的互不相交的非空紧子集族.

证明 (1) 设$n>1$. 由 C 的归纳定义, 存在充分大的$k\in\mathbb{N}$使得$\mathbb{I}\setminus C_k$ 有 n-1 个点$\{t_i\}_{i\le n-1}$ 满足每一点位于$\mathbb{I}\setminus C_k$ 的不同的连通分支中, 设 $t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$. 对于每一 $i\le n$, 置 $D_i=[t_{i-1}, t_i]\cap C$. 则$\{D_i\}_{i\le n}$满足(1)的要求.

(2) 对于每一 $i\le n$, 记 $a_i=\inf D_i$, $b_i=\sup D_i$, 则 $a_i<b_i$. 再记$\mathbb{I}_i=[a_i, b_i]$, 以$\mathbb{I}_i$代替(1)中的$\mathbb{I}$, 用类似的方法可证明(2)成立. ∎

定理 2.6.8 (Alexandroff 定理[1927])每一非空的紧度量空间是 Cantor 三分集的闭映象.

证明 设(X, d)是非空的紧度量空间. 存在 X 的有限覆盖 $\mathscr{F}_1=\{A_i\}_{i\le n}$ 使得每一 A_i 是非空的紧子集且 $d(A_i)<1$. 对于 Cantor 三分集 C, 如引理 2.6.7(1)定义$\{D_i\}_{i\le n}$. 对于每一 $i\le n$, X 的子空间 A_i 有有限覆盖$\{A_{ij}\}_{j\le m(i)}$使得每一 A_{ij} 是非空紧子集且有 $d(A_{ij})<1/2$. 令 $\mathcal{F}_2=\{A_{ij}: i\le n, j\le m(i)\}$. 如引理 2.6.7(2)定义$\{D_{ij}: i\le n, j\le m(i)\}$. 继续上述过程, 存在 X 的有限覆盖列$\{\mathcal{F}_k\}$和 C 的非空紧子集族$\{D_{i_1i_2\ldots i_k}\}$满足:

(8.1) $\mathcal{F}_k=\{A_{i_1i_2\ldots i_k}: i_1\le n, i_l\le m(i_1i_2\ldots i_{l-1}), 2\le l\le k\}$;

(8.2) $d(A_{i_1i_2\ldots i_k})<1/k$;

(8.3) $A_{i_1i_2\ldots i_k}$ 是 X 的非空紧子集族$\{A_{i_1i_2\ldots i_kj}\}_{j\le m(i_1i_2\ldots i_k)}$的并;

(8.4) $D_{i_1i_2\ldots i_k}$ 是互不相交的非空紧子集族$\{D_{i_1i_2\ldots i_kj}\}_{j\le m(i_1i_2\ldots i_k)}$的并.

对于每一$c\in C$, 由(8.4), 存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{i_k\}$使得$c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}D_{i_1i_2\ldots i_k}$. 由(8.3)和(8.2), 存在唯一的 $x_c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_{i_1i_2\ldots i_k}$. 定义 $f:C\to X$ 使得 $f(c)=x_c$.

(8.5) $f(D_{i_1i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1i_2\ldots i_k}$.

对于每一 $c\in D_{i_1i_2\ldots i_k}\subset C$, 存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{j_l\}$使得 $c\in\bigcap_{l\in\mathbb{N}}D_{j_1j_2\ldots j_l}$, 由(8.4), 当 $l\le k$ 时有$j_l=i_l$, 从而 $f(c)\in\bigcap_{l\in\mathbb{N}}A_{j_1j_2\ldots j_l}\subset A_{i_1i_2\ldots i_k}$. 故 $f(D_{i_1i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1i_2\ldots i_k}$.

由于 C 是紧空间, 由推论 1.1.9, 为完成定理的证明, 只须说明 f 是连续的满射.

对于每一 $x\in X$, 由(8.3), 存在$\mathbb{N}$中的序列$\{i_k\}$使得 $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_{i_1i_2\ldots i_k}$. 由(8.4), 存在 $c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}D_{i_1i_2\ldots i_k}$, 于是 $f(c)=x$. 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于每一 $c\in C$, 设 $f(c)=x$, 则存在$\mathbb{N}$中唯一的序列$\{i_k\}$使得$c\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}D_{i_1i_2\ldots i_k}$且$\{x\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_{i_1i_2\ldots i_k}$. 让 U 是 x 在 X 中的邻域, 则$\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_{i_1i_2\ldots i_k}\subset U$, 由 X 的紧性, 存在$k\in\mathbb{N}$使得$A_{i_1i_2\ldots i_k}\subset U$(练习 1.1.2). 由于 $D_{i_1i_2\ldots i_k}$ 是 c 在 C 中的开邻域且 $f(D_{i_1i_2\ldots i_k})\subset A_{i_1i_2\ldots i_k}\subset U$, 所以 f 在点 c 是连续的. 故 f 是连续的. ∎

由于 Cantor 三分集同胚于积空间 D^{ω}, 其中 D={0, 1}赋予离散拓扑(练习 2.6.1), 所以每一非空的紧度量空间是积空间 D^{ω} 的闭映象.

定理 2.6.9 (Baire[1909])无理数空间$\mathbb{P}$与 Baire 零维空间$\mathbb{N}^{\omega}$同胚.

证明 由定理 2.5.7, 存在$\mathbb{P}$上的度量 d 使得(P, d)是完全度量空间. 因为 Ind$\mathbb{P}$=0 且$\mathbb{P}$是

Lindelöf 空间, 由引理 2.2.6, 存在$\mathbb{P}$的覆盖列$\{\mathcal{F}_k\}$满足:

(9.1) $\mathcal{F}_k=\{F_{i_1 i_2\ldots i_k} : i_l\in\mathbb{N}, l\le k\}$;

(9.2) $d(F_{i_1 i_2\ldots i_k})<1/k$;

(9.3) $F_{i_1 i_2\ldots i_k}$是互不相交的非空开闭集族$\{F_{i_1 i_2\ldots i_k j}\}_{j\in\mathbb{N}}$的并.

定义 $f:\mathbb{N}^\omega\to\mathbb{P}$如下: 若$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$, 由于$\{F_{i_1 i_2\ldots i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$是完全度量空间$(\mathbb{P}, d)$的单调递减的非空闭集列且$d(F_{i_1 i_2\ldots i_k})<1/k$, 由 Cantor 定理(定理2.5.3), $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1 i_2\ldots i_k}$是单点集, 于是让$f(\alpha)\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1 i_2\ldots i_k}$. 显然, f 是双射(bijection, 既单且满的函数). 设$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$, $m\in\mathbb{N}$. 令$B(i_1, i_2, \ldots i_m)=\{\beta=(j_k)\in\mathbb{N}^\omega$: 当$k\le m$时有$j_k=i_k\}$.

(9.4) $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1 i_2\ldots i_m}$.

对于每一$\beta=(j_k)\in B(i_1, i_2, \ldots i_m)$, $f(\beta)\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{j_1 j_2\ldots j_k}\subset F_{i_1 i_2\ldots i_m}$, 于是 $f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))\subset F_{i_1 i_2\ldots i_m}$. 另一方面, 若 $x\in F_{i_1 i_2\ldots i_m}$, 则存在$\mathbb{N}$的序列$\{j_k\}$使得当$k\le m$时有$j_k=i_k$且 $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{j_1 j_2\ldots j_k}$, 令$\beta=(j_k)\in\mathbb{N}^\omega$, 那么$\beta\in B(i_1, i_2, \ldots i_m)$且 $f(\beta)=x$, 于是$F_{i_1 i_2\ldots i_m}\subset f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))$. 因此$f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1 i_2\ldots i_m}$.

(9.5) f 是开映射.

设$\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega$且 U 是 $x=f(\alpha)$在$\mathbb{P}$中的邻域, 则$\{x\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{i_1 i_2\ldots i_k}\subset U$. 由于每一$d(F_{i_1 i_2\ldots i_k})<1/k$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{i_1 i_2\ldots i_m}\subset U$. 则 $B(i_1, i_2, \ldots i_m)$是α在$\mathbb{N}^\omega$中的邻域且$f(B(i_1, i_2, \ldots i_m))=F_{i_1 i_2\ldots i_m}\subset U$. 因而, f 是连续的. 由例 2.1.12, $\{B(i_1, i_2, \ldots i_m)$: $\alpha=(i_k)\in\mathbb{N}^\omega, m\in\mathbb{N}\}$是空间$\mathbb{N}^\omega$的基, 所以 f 是开映射.

综上所述, $\mathbb{P}$与$\mathbb{N}^\omega$同胚. ▮

练习

2.6.1 证明: Cantor 三分集同胚于积空间 D^ω, 其中 $D=\{0, 1\}$赋予离散拓扑.

2.6.2 证明: 每一完全的可分度量空间(即 Polish 空间)是无理数空间$\mathbb{P}$的闭映象.

2.6.3 证明: 有理数空间$\mathbb{Q}$是无理数空间$\mathbb{P}$的连续映象.