§2.3　度量化定理

由于度量空间具有良好的性质, 寻求拓扑空间是可度量化空间的条件具有特别重要的意义. 自从 1917 年美国数学家 E. W. Chittenden[33](1895-1977)建立了第一个抽象空间的度量化定理以来, 最杰出的结果有, 1925 年 P. Urysohn 发表了可分度量空间的拓扑等价条件(推论 2.3.4), 1950 至 1951 年间, 日本数学家 J. Nagata(长田润一, 1925-), 苏联数学家 Ju. Smirnov(Ю. Смирнов, 1921-), 美国数学家 R. H. Bing(1914-1986)获得了度量空间的拓扑等价条件(定理 2.3.3). 本节介绍这些成果. **设所论空间均满足 $\mathbf{T}_1$ 分离性质.**

引理 2.3.1　具有 σ 局部有限基的正则空间是仿紧空间.

证明　设正则空间 X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$. 对于 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 置 $\mathscr{V}$={B∈$\mathscr{B}$: 存在 U∈$\mathscr{U}$ 使得 B⊂U}, 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 由定理 1.4.5, X 是仿紧空间. ∎

建立度量化定理的困难之一是定义空间上的距离函数. Urysohn 度量化定理是通过把具有可数基的正则空间嵌入 Hilbert 空间, Bing-Nagata-Smirnov 度量化空间是通过一列的伪度量导出距离函数. 如果把定义 2.1.1 中度量公理的条件(1)换为条件(1’) 当 x=y 时 d(x, y)=0, 则得到的 d 称为 X 上的伪度量(pseudo-metric)或伪距离(pseudo-distance), (X, d)称为伪度量空间(pseudo-metric space).

引理 2.3.2　设空间(X, τ)上的伪度量列{d_n}满足:

(1) 关于拓扑 τ 每一 d_n : X×X→[0, 1]是连续函数;

(2) 对于 X 的每一闭集 F 及 x∉F, 存在 n∈ℕ使得 d_n(x, F)>0.

对于每一 x, y∈X, 置 d(x, y)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x, y)$. 则 d 是集 X 上的度量且由 d 导出 X 上的度量拓扑就是 τ .

证明　先证明 d 是集 X 上的度量. 显然 d 满足定义 2.1.1 中度量公理的条件(2)和(3)且对于每一 x∈X 有 d(x, x)=0. 对于 X 中不同的两点 x 和 y, 因为 X 是 T_1 空间, 单点集是闭集, 由(2), 存在 n∈ℕ使得 d_n(x, y)>0, 从而 d(x, y)>0. 所以 d 是 X 上的度量.

其次, 证明 d 导出的度量拓扑就是 τ . 由引理 2.2.3, 只要证明对于 X 的子集 A, d(x, A)=0 当且仅当 x∈ $\overline{A}$ (关于拓扑 τ 的闭包).

---

[33] Chittenden 是美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)的学生.

设$x\notin\overline{A}$，由(2)，存在$n\in\mathbb{N}$使得$d_n(x, \overline{A})>0$，从而$d(x,A)\geq d(x, \overline{A})\geq d_n(x, \overline{A})/2^n>0$.

反之，由(1)，每一伪度量d_n关于X的拓扑τ是连续的，由函数列的一致收敛性，d也是连续的，从而由引理 2.2.2 的证明，f(x)=d(x, A)在(X, τ)上连续，所以若 $x\in\overline{A}$，则$f(x)\in f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}=\{0\}$，故d(x, A)=0. ▮

定理 2.3.3 (Bing-Nagata-Smirnov度量化定理)对于正则空间X下述条件相互等价:

(1) X是可度量化空间;

(2) X具有σ局部有限基(Nagata[1950], Smirnov[1951]);

(3) X具有σ离散基(Bing[1951]).

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设空间X是可度量化空间. 让d是X上的度量使得由d导出的X上的度量拓扑就是X上的拓扑. 对于每一$n\in\mathbb{N}$，置$\mathscr{B}_n=\{B(x, 1/2^n): x\in X\}$，则对于每一x，$y\in B(z, 1/2^n)$，有$d(x, y)\leq d(x, z)+d(z, y)<1/2^n+1/2^n\leq 1/n$，于是$st(x, \mathscr{B}_n)\subset B(x, 1/n)$. 由Stone定理(定理2.2.5), X的开覆盖$\mathscr{B}_n$具有σ离散开加细$\mathscr{V}_n$，于是每一$st(x,\mathscr{V}_n)\subset st(x,\mathscr{B}_n)$.

置$\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$，则$\mathscr{V}$是X的$\sigma$离散基. 事实上，对于每一$x\in X$及X中含有x的开集U，存在$n\in\mathbb{N}$使得$B(x, 1/n)\subset U$，取$V\in\mathscr{V}_n$使得$x\in V$，那么$x\in V\subset st(x,\mathscr{V}_n)\subset st(x,\mathscr{B}_n)\subset U$.

(3)$\Rightarrow$(2)是显然的，下面证明(2)$\Rightarrow$(1).

设正则空间X具有基$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$，其中每一$\mathscr{B}_n=\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$是局部有限的. 对于每一$n, m\in\mathbb{N}$及$\alpha\in\Lambda_n$，置

(*) $V_{\alpha,m}=\bigcup\{B\in\mathscr{B}_m: \overline{B}\subset B_\alpha\}$.

由$\mathscr{B}_m$的局部有限性及引理 1.4.4，$\overline{V}_{\alpha,m}\subset B_\alpha$. 由引理 2.3.1，X是正规空间，再由Urysohn引理，存在连续函数$f_{\alpha,m}: X\to[0, 1]$使得$f_{\alpha,m}(X\setminus B_\alpha)\subset\{0\}$, $f_{\alpha,m}(\overline{V}_{\alpha,m})\subset\{1\}$. 由$\mathscr{B}_n$的局部有限性，对于每一$x\in X$，存在x的开邻域$U_x$及$\Lambda_n$的有限子集$\Gamma_n(x)$使得对于$\alpha\in\Lambda_n$，$B_\alpha\cap U_x\neq\varnothing$当且仅当$\alpha\in\Gamma_n(x)$. 对于每一x，$y\in X$，定义实值连续函数$g_{n,m}$: $U_x\times U_y\to R$使得$g_{n,m}(x_1, x_2)=\sum_{\alpha\in\Gamma_n(x)\cup\Gamma_n(y)}|f_{\alpha,m}(x_1)-f_{\alpha,m}(x_2)|$. 由于当$\alpha\notin\Gamma_n(x)\cup\Gamma_n(y)$时,

$f_{\alpha,m}$在$U_x \bigcup U_y$上取值为0, 所以$g_{n,m}(x_1, x_2)=\sum_{\alpha\in\Lambda_n}|f_{\alpha,m}(x_1)-f_{\alpha,m}(x_2)|$. 因为$\{U_x\times U_y$: x, $y\in X\}$是积空间 $X\times X$ 的开覆盖, 并且若 $g'_{n,m}:U_{x'}\times U_{y'}\to R$, 如果$(x_1, x_2)\in(U_x\times U_y)\bigcap(U_{x'}\times U_{y'})$, 则有 $g_{n,m}(x_1, x_2)=g'_{n,m}(x_1, x_2)$, 于是可以定义函数 $p_{n,m}$: $X\times X\to R$使得当$(x_1, x_2)\in U_x\times U_y$时$p_{n,m}(x_1, x_2)=g_{n,m}(x_1, x_2)$, 那么$p_{n,m}$是连续的. 置$d_{n,m}(x_1, x_2)=\min\{1, p_{n,m}(x_1, x_2)\}$, 则$d_{n,m}$是集X上的伪度量且每一$d_{n,m}(x_1, x_2)\le 1$.

至此, 得到了集X上的伪度量列$\{d_{n,m}\}$. 由以上构造过程, 这些伪度量满足引理2.3.2的条件(1). 下证它们也满足条件(2). 对于X的每一闭集F及$x\notin F$, 由正则性, 存在$\alpha\in\Lambda_n$和$\beta\in\Lambda_m$使得$x\in B_\beta\subset\overline{B_\beta}\subset B_\alpha\subset X\setminus F$. 由(*), $B_\beta\subset V_{\alpha,m}$, 故$f_{\alpha,m}(x)=1$且$f_{\alpha,m}(F)\subset\{0\}$. 于是对于每一$z\in F$, $p_{n,m}(x, z)=g_{n,m}(x, z)\ge 1$, 从而$d_{n,m}(x, z)=1$, 所以$d_{n,m}(x, F)=1$. 故伪度量列$\{d_{n,m}\}$满足引理2.3.1的条件(2). 由引理2.3.2知, X是可度量化空间. ▌

推论 2.3.4 (Urysohn度量化定理[1925b])空间X是可分的可度量化空间当且仅当X是具有可数基的正则空间.

证明 由定理2.2.4和定理2.2.8知, 可分的可度量化空间是具有可数基的正则空间. 若正则空间X具有可数基, 由定理2.3.3和定理2.2.8, X是可分的可度量化空间. ▌

推论2.3.4是作为定理2.3.3的推论间接证明的. 1925年Urysohn关于2.3.4的直接证明是简洁明了的, 而且 2.3.3 的证明受其启发. 下面叙述利用对角线引理(引理 1.3.8)证明Urysohn度量化定理. 先介绍Hilbert方体$\mathbb{I}^\omega$(Hilbert cube). $\mathbb{I}^\omega$是单位闭区间$\mathbb{I}$的闭区间族{[0, 1/n] : $n\in\mathbb{N}$}的积空间, 即$\mathbb{I}^\omega=\{(x_n)\in\mathbb{R}^\omega : 0\le x_n\le 1/n, n\in\mathbb{N}\}$, 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以$\mathbb{I}^\omega$是Hilbert空间**H**(例2.1.3)的子空间, 从而$\mathbb{I}^\omega$是度量空间. 按记号, $\mathbb{I}^\omega$应为$\mathbb{I}$的可数次积空间, 即Tychonoff方体, 可以证明这Hilbert方体与Tychonoff方体同胚(练习2.3.2).

推论 2.3.4' 具有可数基的正则空间可嵌入Hilbert方体$\mathbb{I}^\omega$.

证明 设空间 X 是具有可数基的正则空间. 让 $\mathscr{U}$ 是 X 的可数基. 令$\Lambda=\{(U, V) : U, V\in\mathscr{U}$且$\overline{U}\subset V\}$. 则$\Lambda$是可数的. 记$\Lambda=\{(U_n, V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由引理2.3.1和定理1.4.10, X是正规空间, 再由 Urysohn 引理, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在连续函数 $f_n:X\to[0, 1/n]$使得

$f_n(\overline{U}_n)\subset\{0\}$, $f_n(X\setminus V_n)\subset\{1/n\}$. 令 $F=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 则连续函数族 F 分离 X 的点与闭集. 事实上, 如果 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$, 由 $\mathcal{U}$ 是 X 的基及正则性, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x\in\overline{U}_n\subset V_n\subset X\setminus A$, 于是 $f_n(x)=0$ 且 $f_n(A)\subset\{1/n\}$, 所以 $f_n(x)\notin\overline{f_n(A)}$. 由对角线引理, $\Delta_F:X\to\mathbb{I}^{\omega}$ 是嵌入, 即 X 可嵌入 Hilbert 方体$\mathbb{I}^{\omega}$. ▮

对照定理 2.3.3 和推论 2.3.4’的证明, 基本的思路是利用 Urysohn 引理得出连续函数集, 进而构造X上的距离函数. 使用Urysohn引理构造的集对分别是($\overline{V}_{\alpha,m}$, B_α)和($\overline{U}_n$, V_n). 由于$\mathbb{I}^{\omega}$是度量空间, 推论 2.3.4’表明具有可数基的正则空间是可度量化空间. 在此, 对于集论假设在 Urysohn 度量化定理中的作用做些说明. Suslin[34]直线(Suslin line)是非可分的满足可数链条件(ccc)的线性序空间(linearly ordered space). Good 和 Tree[1995]证明了命题“存在紧的Suslin 直线使得其上每一实值连续函数是常值函数”与 ZF 是相容的, 于是 Urysohn 引理不能在 ZF 中证明, 并且命题“正规的 T_2 空间不是完全正则空间”, “局部紧的 T_2 空间不是完全正则空间”也是与 ZF 相容的. 另一方面, Good 和 Tree[1995]也证明了仅假设 ZF, 每一第二可数的正则空间中 Uryshon 引理成立, 从而在 ZF 中 Urysohn 度量化定理成立, 即每一第二可数的正则空间是可度量化空间.

定理 2.3.3 和推论 2.3.4 中的正则性是必不可少的.

例 2.3.5 Smirnov 删除序列拓扑(Steen, Seebach[1978]): 具有可数基的 T_2 非正则空间.

对于实数集合$\mathbb{R}$, 记τ是$\mathbb{R}$的欧几里得拓扑, $S=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$. 在$\mathbb{R}$上赋予下述拓扑: V 是$\mathbb{R}$的开集当且仅当存在 $G\in\tau$ 和 $B\subset S$ 使得 $V=G\setminus B$. 这拓扑称为 Smirnov 删除序列拓扑(Smirnov’s deleted sequence topology), 记为τ_1. 在τ_1中非零点的邻域基可取为τ中相应点的邻域基, 而 0 的邻域基可取为$\{(-1/n, 1/n)\setminus S : n\in\mathbb{N}\}$. 显然, $\tau\subset\tau_1$, 所以($\mathbb{R}$, τ_1)是 T_2 空间. 由于τ具有可数基, 且 0 在τ_1中具有可数邻域基, 所以τ_1具有可数基. 由于$\mathbb{R}\setminus S$是($\mathbb{R}$, τ_1)的开集, 所以 S 是($\mathbb{R}$, τ_1)的闭集, 设 U 是 S 在τ_1中的开邻域, V 是 0 在τ_1中的开邻域, 则存在$G\in\tau$和$B\subset S$

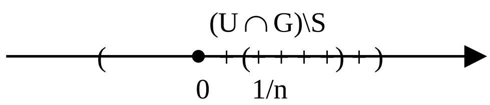

图 Smirnov 删除序列拓扑

---

[34] 苏联数学家 М. Я. Суслин.

使得 $G\setminus B\subset V$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $1/n\in G$, 于是 $(U\cap G)\setminus S\neq\varnothing$, 所以 $U\cap V\neq\varnothing$, 从而 $0\in\overline{U}$, 故 $(\mathbb{R},\ \tau_1)$ 不是正则空间. ▮

由于 T_2 的紧空间是正规空间, 所以具有可数基的 T_2 紧空间是可度量化空间. 定理 2.3.7 说明可数基的条件可适当减弱. 俄罗斯数学家 A. V. Arhangel'skiĭ(A. B. Архангельский, 1938-)[35][1959]引入的网络概念是基的重要推广.

定义 2.3.6 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的网络(network), 若 X 中每一开集是 $\mathcal{P}$ 的某子族的并.

显然, $\mathcal{P}$ 是 X 的网络当且仅当对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in P\subset U$. 空间 X 的基是 X 的网络. $\{\{x\}: x\in X\}$ 也是空间 X 的网络.

定理 2.3.7 (Arhangel'skiĭ[1959])设 X 是 T_2 的紧空间. 则 X 是可分的可度量化空间当且仅当 X 具有可数网络.

证明 设 X 是可分的可度量化空间. 由推论 2.3.4, X 具有可数基, 于是这可数基就是 X 的可数网络.

反之, 设 T_2 的紧空间 $(X,\ \tau_1)$ 具有可数网络 $\mathcal{P}$. 不妨设 X 不是单点集. 置 $\mathcal{F}=\{\{P, Q\}\subset\mathcal{P}$: 存在 X 中不相交的开集分别包含 P 和 Q$\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是可数的, 记 $\mathcal{F}=\{\{P_n, Q_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 U_n, $V_n\in\tau_1$ 使得 $P_n\subset U_n$, $Q_n\subset V_n$ 且 $U_n\cap V_n=\varnothing$. 令 $\mathcal{S}=\{U_n, V_n : n\in\mathbb{N}\}$.

设 x, y 是空间 X 中不同的两点, 由于 X 是 T_2 空间, 存在 X 中不相交的开集 U 和 V 分别含有点 x 和 y, 再由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络, 存在 $\mathcal{P}$ 中的元 P 和 Q 使得 $x\in P\subset U$ 且 $y\in Q\subset V$, 于是 $\{P, Q\}\in\mathcal{F}$, 所以存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $P=P_n$ 且 $Q=Q_n$, 从而 $\mathcal{S}$ 中的相应元 U_n 和 V_n 分别含有点 x 和 y.

这一方面说明 $\mathcal{S}$ 是空间 X 的覆盖, 于是 $\mathcal{S}$ 是 X 上某一拓扑 τ_2 的子基, 则 τ_2 具有可数基, 且 $\tau_2\subset\tau_1$. 另一方面也说明 τ_2 是 T_2 拓扑.

让 $id_X:(X,\ \tau_1)\to(X,\ \tau_2)$, 则 id_X 是从紧空间到 T_2 空间的连续单射, 由推论 1.1.10,

[35] 苏联数学家 P. Alexandroff(1896-1982)的学生.

id_X 是同胚, 所以 $\tau_1=\tau_2$. 故空间(X, τ_1)具有可数基. 由推论 2.3.4, X 是可分的可度量化空间. ▮

为了进一步说明度量化空间, 下面引入集态正规性.

定义 2.3.8 (Bing[1951])空间 X 称为集态正规空间(collectionwise normal space), 若 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的离散的闭集族, 则存在 X 的互不相交的开集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$.

显然, 集态正规空间是正规空间. 利用正规性, 定义 2.3.8 中可做到开集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是离散的(练习 2.3.6 或定理 1.5.7 的证明).

定理 2.3.9 T_2 的仿紧空间是集态正规空间.

证明 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 T_2 仿紧空间 X 的离散的闭集族. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置 $U_\alpha=X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}F_\beta$, 则 $F_\alpha\subset U_\alpha$, 且对于$\beta\neq\alpha$ 有 $F_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$. 由定理 1.4.5, 空间 X 的开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在局部有限的精确闭加细$\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置 $G_\alpha=X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta$. 下面验证$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是所求的开集族. 因$\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta\subset\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta$, 而$(\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta)\cap F_\alpha=\varnothing$, 所以$(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta)\cap F_\alpha=\varnothing$, 于是每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$. 此外, 对于不同的α, $\beta\in\Lambda$, $(\bigcup_{\gamma\neq\alpha}C_\gamma)\cup(\bigcup_{\gamma\neq\beta}C_\gamma)=X$, 所以 $G_\alpha\cap G_\beta=\varnothing$. 故 X 是集态正规空间. ▮

定义 2.3.10 (Moore[36][1916])空间 X 的开覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}$称为 X 的展开(development), 若对于每一 $x\in X$, $\{st(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的邻域基. 具有展开的空间称为可展空间(development space), 可展的正则空间称为 Moore 空间(Moore space).

显然, 可展空间是第一可数空间.

定理 2.3.11 (Bing 度量化准则[1951])空间 X 是可度量化空间当且仅当 X 是集态正规的可展空间.

证明 必要性. 设(X, d)是度量空间, 由定理 2.2.5, X 是仿紧空间, 再由定理 2.3.9, X 是

[36] 美国数学家 R. L. Moore(1882-1974), 他是美国数学家 E. H. Moore(1862-1932)和 O. Veblen(1880-1960)的学生. 美国数学家 O. Veblen, G. D. Birkhoff(1884-1944), H. L. Smith(1893-1957), E. W. Chittenden(1895-1977)等也是 E. H. Moore 的学生. “Moore 教学法”(R. L. Moore)享有盛誉, 培养了众多的拓扑学家, 如 G. T. Whyburn(美, 1904-1969), F. B. Jones(美, 1910-1999), R. H. Bing(美, 1914-1986), R. H. Sorgenfrey(美, 1915-1996), M. E. Rudin(美, 1924-), B. Fitzpatrick Jr(美, 1932-2000), J. Worrell Jr 等.

集态正规空间. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{U}_n=\{B(x, 1/2^n) : x\in X\}$, 则 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $x\in X$ 及 X 中含有 x 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $B(x, 1/n)\subset U$, 那么 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset B(x, 1/n)\subset U$. 所以 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是 X 的展开.

充分性. 设 X 是集态正规的可展空间. 于是 X 是正则空间, 为证明 X 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理, 只须证明 X 具有 σ 离散基.

设 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是空间 X 的展开, 不妨设每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{U}_n$. 让 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置 $U_{\alpha,n}=\{x\in X : st(x, \mathcal{U}_n)\subset U_\alpha\}$. 那么

(11.1) 若 $U\in\mathcal{U}_n$ 且 $U\cap U_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 则 $U\subset U_\alpha$.

若 $y\notin U_{\alpha,n}$, 则存在 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $y\in U\not\subset U_\alpha$, 由(11.1), $U\cap U_{\alpha,n}=\varnothing$, 所以 $U_{\alpha,n}$ 是 X 的闭集.

由 Zermelo 良序定理, 把指标集 Λ 良序化. 置 $F_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, 则 $F_{\alpha,n}$ 是 X 的闭集且 $F_{\alpha,n}\subset U_{\alpha,n}\subset U_\alpha$. 令 $\mathcal{F}_n=\{F_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则

(11.2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 是 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散闭加细.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, 取 $U\in\mathcal{U}_n$ 使得 $x\in U$, 若 U 与 $\mathcal{F}_n$ 中的某些元相交, 在 Λ 中存在最小的 α 使得 $U\cap F_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 于是 $U\cap U_{\alpha,n}\neq\varnothing$, 由(11.1), $U\subset U_\alpha$, 那么当 Λ 中的 $\gamma>\alpha$ 时 $U\cap F_{\gamma,n}=\varnothing$, 因此 U 与 $\mathcal{F}_n$ 中至多一个元相交. 故 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的离散集族. 另一方面, 若 $x\in X$, 则存在 $\alpha\in\Lambda$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$ 且 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset U_\alpha$, 于是 $x\in F_{\alpha,n}$, 所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 是 X 的覆盖.

(11.3) $\mathcal{U}$ 具有 σ 离散开加细.

因为 X 是集态正规空间, 由(11.2), 通过 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散闭加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ 可得到 $\mathcal{U}$ 的 σ 离散开加细.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由(11.3), 设 $\mathcal{B}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的 σ 离散开加细. 令 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$, 则 $\mathcal{B}$ 是 X 的 σ 离散开集族. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset U$, 存在

$B\in\mathcal{B}_n$ 使得 $x\in B$, 于是 $x\in B\subset \mathrm{st}(x,\mathcal{B}_n)\subset \mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\subset U$, 所以 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 故 X 具有 σ 离散基. ∎

对照 Stone 定理的证明. 在定理 2.3.11 中证明每一开覆盖具有 σ 离散开加细与 Stone 定理的证明是类似的. (1) Stone 定理 $U_{\alpha,n}$ 构造的球形邻域类似于定理 2.3.11 中 $U_{\alpha,n}$ 构造的星形邻域; (2) Stone 定理中把离散集族 $\{U^*_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 开扩张成 $\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 类似于定理 2.3.11 中集态正规性的使用.

下述例子表明定理 2.3.11 中的集态正规性是重要的.

例 2.3.12 非正规的 Moore 空间(Heath[37][1964]).

让 $X=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$. 集合 X 赋予下述拓扑: 对于 $y>0$, (x, y) 是 X 的孤立点; 当 $x\in\mathbb{Q}$ 时, $(x, 0)$ 的邻域基元形如 $H(x, n)=\{(x, z)\in X : z<1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$, 当 $x\in\mathbb{P}$ 时, $(x, 0)$ 的邻域基元形如 $H(x, n)=\{(x, z\text{-}x)\in X : x\leq z<x+1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$. 则 X 是 T_2 空间. 由于上述每一基元是 X 的开闭集, 所以 X 是正则空间. 显然, $\mathbb{R}\times\{0\}$ 是 X 的闭离散子空间.

(12.1) X 是 Moore 空间. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{U}_n=\{H(x, n) : x\in\mathbb{R}\}\bigcup\{\{(x, y)\} : y>0\}$, 则 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是空间 X 的展开. 故 X 是 Moore 空间.

(12.2) X 不是正规空间. 令 $A=\{(x, 0)\in X : x\in\mathbb{Q}\}$, $B=\{(y, 0)\in X : x\in\mathbb{P}\}$, 则 A 和 B 是 X 的不相交的闭集. 设 U 是 B 在 X 中的开邻域, 对于每一 $x\in\mathbb{P}$, 存在 $n(x)\in\mathbb{N}$ 使得 $H(x, n(x))\subset U$. 对于每一 $k\in\mathbb{N}$, 令 $P_k=\{x\in\mathbb{P} : n(x)\leq k\}$. 则 $\mathbb{P}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}P_k$. 由定理 1.7.6, 无理数子空间 $\mathbb{P}$(关于欧几里得拓扑)是第二范畴的, 从而存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 P_k 不是 $\mathbb{R}$ 的无处稠密子集, 即关于 $\mathbb{R}$ 的欧几里得拓扑有 $(P_k)^{-\circ}\neq\varnothing$, 所以存在实数 $a<b$ 使得开区间

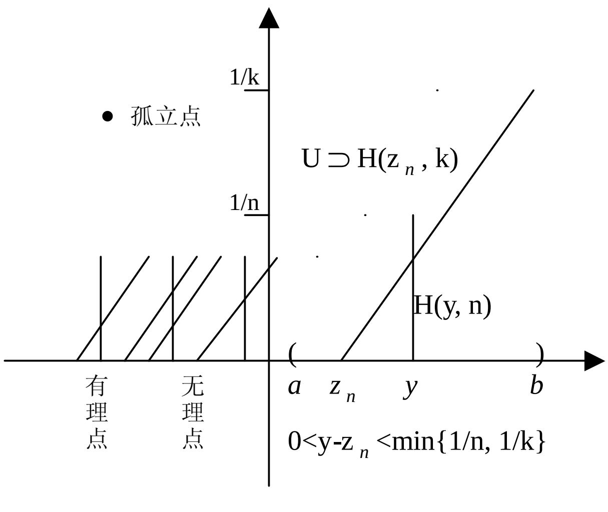

图 Heath 的 picket fence 空间

[37] R. W. Heath 是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)的学生.

$(a,\ b)\subset \overline{P}_k$，固定 $y\in(a,\ b)\cap\mathbb{Q}$，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，存在 $z_n\in(a,\ b)\cap P_k$ 使得 $H(y,\ n)\cap H(z_n,\ k)\neq\varnothing$，因此 $H(y, n)\cap U\neq\varnothing$，故 $(y, 0)\in\overline{U}$. 这表明不存在 X 中不相交的开集分别包含闭集 A 和 B. 因而, X 不是正规空间.

由于空间 X 的特殊构造, 上述空间称为 Heath 的 picket fence 空间, 相应的拓扑称为 picket fence 拓扑. ∎

由定理 2.3.11 和例 2.3.12, 很自然的问题是: 正规 Moore 空间是否是可度量空间?这是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)[1937]提出的著名猜想(Jones conjecture), 也称为正规 Moore 空间猜想(normal Moore space conjecture). 它的回答依赖于集论假设(见戴牧民[2003]). 为了讨论度量空间映象的需要, 下面再介绍与展开相关的两个度量化定理.

定理 2.3.13 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K,\ \overline{\mathcal{U}_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基;

(3) X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$ (Tukey 度量化定理, 1940).

证明 (1)$\Rightarrow$(3) 设 X 是可度量化空间. 由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11), X 是可展空间, 设$\{\mathcal{V}_n\}$是空间 X 的展开. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间, 再由定理 1.5.6, X 的每一开覆盖有星开加细, 于是 X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 既星加细 $\mathcal{U}_n$ 又星加细 $\mathcal{V}_{n+1}$. 这时每一 $st(x, \mathcal{U}_n)\subset st(x, \mathcal{V}_n)$, 所以$\{\mathcal{U}_n\}$是 X 的展开.

(3)$\Rightarrow$(2) 设空间 X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$. 下面证明 X 的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$满足条件(2). 首先注意到, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathcal{U}_n$ 加细 $\overline{\mathcal{U}_n}$，所以 $st(K,\ \overline{\mathcal{U}_n})$是 K 在 X 中的邻域. 其次注意到, 对于 X 的非空子集 A, $st(A,\ \overline{\mathcal{U}_{n+1}})\subset st(A,\ \mathcal{U}_n)$. 事实上, 设 $x\in st(A,\ \overline{\mathcal{U}_{n+1}})$, 则存在 $U_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $x\in\overline{U}_{n+1}$ 且 $\overline{U}_{n+1}\cap A\neq\varnothing$，取 $y\in\overline{U}_{n+1}\cap A$ 和 $V_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $y\in V_{n+1}$，那么 $U_{n+1}\cap V_{n+1}\neq\varnothing$，再取 $W_{n+1}\in\mathcal{U}_{n+1}$ 使得 $x\in W_{n+1}$，那么 $W_{n+1}\cap U_{n+1}\neq\varnothing$，由于 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$，于是存在 $U_n\in\mathcal{U}_n$ 使得$\{x,\ y\}\subset W_{n+1}\cup U_{n+1}\cup V_{n+1}\subset st(U_{n+1},\ \mathcal{U}_{n+1})\subset U_n$，从而 $x\in U_n\subset st(A,\ \mathcal{U}_n)$, 因此 st(A,

$\overline{\mathscr{U}_{n+1}}$) $\subset$ st(A, $\mathscr{U}_n$). 故为了证明{$\mathscr{U}_n$}满足条件(2), 只须证明对于 X 的非空紧子集 K, {st(K, $\mathscr{U}_n$)}$_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基. 用反证法证明这一断言. 若{st(K, $\mathscr{U}_n$)}$_{n\in\mathbb{N}}$ 不是 K 在 X 中的邻域基, 则存在 K 在 X 中的开邻域 U 使得每一 st(K, $\mathscr{U}_n$) $\not\subset$ U, 设 $x_n \in$ st(K, $\mathscr{U}_n$)$\setminus$U, 则存在 $U_n \in \mathscr{U}_n$ 使得 $x_n \in U_n$ 且 $U_n \cap K \neq \varnothing$, 取定 $y_n \in U_n \cap K$. 由于 K 的紧性, 序列{y_n}在 K 中存在聚点 y$\in$K$\subset$U, 于是存在 m$\in\mathbb{N}$使得 st(y, $\mathscr{U}_m$) $\subset$ U, 取 V$\in\mathscr{U}_{m+1}$使得 y$\in$ V, 那么存在 n>m 使得 $y_n \in$V, 从而 $x_n \in U_n \cup V \subset$ st(V, $\mathscr{U}_{m+1}$) $\subset$ st(y, $\mathscr{U}_m$) $\subset$ U, 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有开覆盖列{$\mathscr{U}_n$}满足条件(2). 显然, X 是可展空间. 由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11), 为证明 X 是可度量化空间, 只须证明 X 是集态正规空间. 不妨设每一 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 先证明对于每一 x$\in$X, {st(st(x, $\mathscr{U}_n$), $\mathscr{U}_n$)}$_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的邻域基. 若不然, 则存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得每一 st(st(x, $\mathscr{U}_n$), $\mathscr{U}_n$) $\not\subset$ U, 于是存在 $x_n \in$ st(st(x, $\mathscr{U}_n$), $\mathscr{U}_n$)$\setminus$U, 从而存在 $y_n \in$ st(x, $\mathscr{U}_n$)使得 $x_n \in$ st(y_n, $\mathscr{U}_n$). 因为{st(x, $\mathscr{U}_n$)}$_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的邻域基, 所以序列{y_n}收敛于 x. 不妨设所有的 $y_n \in$U. 让 K={x}$\cup${y_n : n$\in\mathbb{N}$}, 则 X 的紧子集 K$\subset$U, 因而存在 m$\in\mathbb{N}$使得 st(K, $\mathscr{U}_m$) $\subset$ U, 于是 $x_m \in$ st(y_m, $\mathscr{U}_m$) $\subset$ U, 矛盾.

下面证明 X 是集态正规空间. 设{F_α}$_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散闭集族, 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, x$\in F_\alpha$, 则 X$\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha} F_\gamma$ 是 x 的开邻域, 由于{st(st(x, $\mathscr{U}_n$), $\mathscr{U}_n$)}$_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的邻域基, 存在 n(x)$\in\mathbb{N}$使得 st(st(x, $\mathscr{U}_{n(x)}$), $\mathscr{U}_{n(x)}$) $\subset$ X$\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha} F_\gamma$, 令 $G_\alpha = \bigcup${st(x, $\mathscr{U}_{n(x)}$) : x$\in F_\alpha$}, 那么 $F_\alpha \subset G_\alpha$. 若存在 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 使得 $G_\alpha \cap G_\beta \neq \varnothing$, 则存在 x$\in F_\alpha$, y$\in F_\beta$ 使得 st(x, $\mathscr{U}_{n(x)}$) $\cap$ st(y, $\mathscr{U}_{n(y)}$) $\neq \varnothing$, 不妨设 n(x)$\le$n(y), 那么 st(x, $\mathscr{U}_{n(x)}$) $\cap$ st(y, $\mathscr{U}_{n(x)}$) $\neq\varnothing$, 即 y$\in$ st(st(x, $\mathscr{U}_{n(x)}$), $\mathscr{U}_{n(x)}$) $\subset$ X$\setminus\bigcup_{\gamma\neq\alpha} F_\gamma$, 于是 $\alpha=\beta$, 所以{G_α}$_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的互不相交的开集族. 因而, X 是集态正规空间. ∎

练习

2.3.1 直接证明: 具有 σ 局部有限基的正则空间是正规空间.

2.3.2 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathbb{I}_n=[0, 1]$. 证明: Hilbert 方体 $\mathbb{I}^{\omega}$ 同胚于 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}_n$.

2.3.3 若 T_2 的紧空间 X 是可数个可度量化闭子空间之并，则 X 也是可度量化空间.

2.3.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络. 若 $f:X\to Y$ 是映射，则 $f(\mathcal{P})$ 是空间 Y 的网络.

2.3.5 T_2 仿紧的局部可度量化空间是可度量化空间(Smirnov[1951]).

2.3.6 若 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是正规空间 X 的离散的闭集族，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的互不相交的开集族使得每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$，则存在 X 的离散的开集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得每一 $F_\alpha\subset V_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset G_\alpha$.

2.3.7 若 T_2 的局部紧空间 X 是可数个可分的可度量化子空间之并，则 X 也是可度量化的.

2.3.8 证明: 序数空间 $[0, \omega_1)$ 是集态正规空间.

2.3.9 设 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是空间 X 的展开，若 F 是 X 的非空闭集，则 $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}st(F, \mathcal{U}_n)$.

2.3.10 设 X 是度量空间. 利用仿紧性对空间 X 的球形邻域形成的覆盖进行加细，直接证明: X 存在局部有限的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \overline{\mathcal{U}_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基.

2.3.11 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 存在开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基(Jones[1958]);

(3) X 存在展开 $\{\mathcal{U}_n\}$ 满足对于每一 $U, V\in\mathcal{U}_{n+1}$，若 $U\cap V\neq\varnothing$，则存在 $W\in\mathcal{U}_n$ 使得 $U\cup V\subset W$(Alexandroff-Urysohn 度量化定理[1923]).

2.3.12 证明: Moore 空间具有 σ 离散网络.

2.3.13 证明: 具有 σ 局部有限网络的 T_2 的可数紧空间是可分的可度量化空间.

2.3.14 设 X 是正整数集 $\mathbb{N}$ 赋予有限补拓扑(例 1.1.7). 证明: (1) X 是可数个可分的闭度量子空间之并; (2) X 具有可数基; (3) X 是可展空间.

§2.4 Hanai-Morita-Stone 定理

本节讨论闭映射保持可度量性的条件，一是介绍Hanai(花井七郎)-Morita-Stone定理：度量空间的闭映象是可度量化空间当且仅当它是第一可数空间；二是介绍 Michael 定理：可数双商的闭映射保持可度量性. 下述例子说明即使是有限到一的开映射也未必保持可度量性.

例 2.4.1 Heath 的 picket fence 空间(例 2.3.12)：度量空间的至多二到一开映象.

让 X 是例 2.3.12 中由 Heath 构造的 picket fence 空间，则 X 是非正规的 Moore 空间，于是 X 不是可度量化空间. 下面把 X 表示为度量空间的至多二到一开映象.

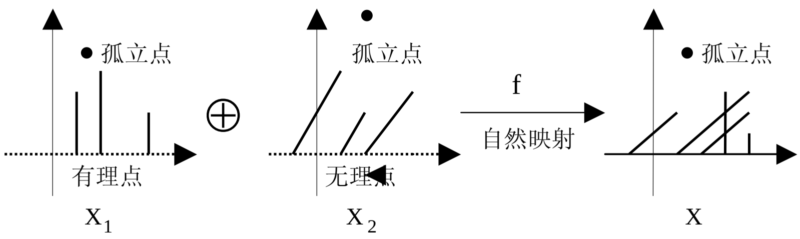

图 Heath 的空间：度量空间的至多二到一开映象

让 $X=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$. 令 $X_1=\{(x, y)\in X : y>0$ 或 $x\in\mathbb{Q}\}$, $X_2=\{(x, y)\in X : y>0$ 或 $x\in\mathbb{P}\}$，则 X_1 和 X_2 都是 X 的开子空间. 仍使用例 2.3.12 中点(x, 0)邻域基元的记号 H(x, n). 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{B}_{1,n}=\{H(x, n+1) : x\in\mathbb{Q}\}\cup\{\{(x, y)\} : y>1/n\}$, $\mathscr{B}_{2,n}=\{H(x, n+1) : x\in\mathbb{P}\}\cup\{\{(x, y)\} : y>1/n\}$，则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{1,n}$ 和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{2,n}$ 分别是 X_1 和 X_2 的 σ 离散基，于是 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的由度量子空间组成的开覆盖. 让 M 是覆盖 $\{X_1, X_2\}$ 的拓扑和，f 是从 M 到 X 上的自然映射，则 M 是度量空间，f 是至多二到一开映射. ∎

度量空间的闭映象也未必是可度量化空间(例 3.1.8). 下面将证明度量空间的逆紧映象是可度量化空间.

定理 2.4.2 逆紧映射保持可度量性.

证明 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射，其中 X 是可度量化空间. 由 Stone 定理(定理 2.2.5), X 是仿紧空间，再由 Michael 定理(定理 1.5.8), Y 是 T_2 的仿紧空间. 为了证明 Y 是可度量化空间，由 Bing 度量化准则(定理 2.3.11)，只须证明 Y 是可展空间.

由 Tukey 度量化定理(定理 2.3.13)，存在 X 的展开$\{\mathscr{U}_n\}$使得每一$\mathscr{U}_{n+1}$星加细$\mathscr{U}_n$. 这时，

(2.1) 对于 X 的每一非空紧子集 K, $\{st(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基.

对于每一 $y\in Y$, $n\in\mathbb{N}$, 置 $U_{y,n}=st(f^{-1}(y),\ \mathcal{U}_n)$, $W_{y,n}=Y\setminus f(X\setminus U_{y,n})$, $V_{y,n}=f^{-1}(W_{y,n})$. 那么 $f^{-1}(y)\subset U_{y,n}$，由引理 1.3.1,

(2.2) $y\in W_{y,n}$, $f^{-1}(y)\subset V_{y,n}\subset U_{y,n}$.

(2.3) $\{W_{y,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 在 Y 中的开邻域基.

由于 f 是闭映射, 每一 $W_{y,n}$ 是 Y 的开集. 设 W 是 y 在 Y 中的开邻域, 那么 $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(W)$. 因为 $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集, 由(2.1), 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $st(f^{-1}(y),\mathcal{U}_n)\subset f^{-1}(W)$, 即 $U_{y,n}\subset f^{-1}(W)$, 于是 $W_{y,n}\subset W$. (2.3)得证.

由(2.2), $f^{-1}(y)\subset V_{y,n+1}$，再由(2.1), 存在正整数 $m\geq n+1$ 使得 $U_{y,m}\subset V_{y,n+1}$.

(2.4) 若 $y\in W_{z,m}$，则 $W_{z,m}\subset W_{y,n}$.

由于 $y\in W_{z,m}$，那么 $f^{-1}(y)\subset V_{z,m}\subset U_{z,m}$，对于每一 $x\in f^{-1}(y)$, 则 $x\in st(f^{-1}(z),\ \mathcal{U}_m)$, 存在 $U_x\in\mathcal{U}_m$使得 $x\in U_x$ 且 $\varnothing\neq f^{-1}(z)\cap U_x\subset f^{-1}(z)\cap U_{y,m}\subset f^{-1}(z)\cap V_{y,n+1}$，于是 $z\in f(V_{y,n+1})=W_{y,n+1}$，所以有(*): $f^{-1}(z)\subset V_{y,n+1}$. 下面证明 $W_{z,m}\subset W_{y,n}$.

对于任意的 $t\in W_{z,m}$，那么 $f^{-1}(t)\subset V_{z,m}\subset U_{z,m}$. 若 $s\in f^{-1}(t)$, 则 $s\in st(f^{-1}(z),\ \mathcal{U}_m)$, 存在 $U_s\in\mathcal{U}_m$ 使得 $s\in U_s$ 且 $f^{-1}(z)\cap U_s\neq\varnothing$，由于(*), $f^{-1}(z)\subset V_{y,n+1}\subset U_{y,n+1}$，取 $s'\in f^{-1}(z)\cap U_s$，则 $s'\in st(f^{-1}(y),\ \mathcal{U}_{n+1})$, 存在 $U_{s'}\in\mathcal{U}_{n+1}$使得 $s'\in U_{s'}$ 且 $f^{-1}(y)\cap U_{s'}\neq\varnothing$, 再取 $s''\in f^{-1}(y)\cap U_{s'}$，从而 $s'\in U_s\cap U_{s'}$，因为 $\mathcal{U}_m$ 加细 $\mathcal{U}_{n+1}$，所以 s, $s''\in U_s\cup U_{s'}\subset st(U_{s'},\ \mathcal{U}_{n+1})$, 又因为 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$，存在 $V_{s'}\in\mathcal{U}_n$ 使得 $s\in st(U_{s'},\ \mathcal{U}_{n+1})\subset V_{s'}\subset st(f^{-1}(y),\ \mathcal{U}_n)=U_{y,n}$. 故 $f^{-1}(t)\subset U_{y,n}$，再由引理 1.3.1, $t\in W_{y,n}$. 因此 $W_{z,m}\subset W_{y,n}$. (2.4)得证.

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{W}_n=\{W_{y,n}\}_{y\in Y}$. 对于每一 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的邻域 W, 由(2.3), 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $W_{y,n}\subset W$, 再由(2.4), 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $st(y,\mathcal{W}_m)\subset W_{y,n}$，所以 $\{st(y,\mathcal{W}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y在 Y 中的开邻域基. 故 $\{\mathcal{W}_n\}$是 Y 的展开, 所以 Y 是可展空间, 因此 Y 是可度量化空间. ■

度量空间到度量空间上的闭映射未必是逆紧映射，下面给出定理 2.4.2 更一般的形式.

定义 2.4.3 (Siwiec[38][1971])空间 X 称为强 Fréchet 空间(strongly Fréchet space)，若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$，则存在 $x_n\in A_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x.

强 Fréchet 空间是一类称之为 Fréchet 空间(见定义 3.1.5)的加强形式, Fréchet 空间的定义及基本性质将在第三章中介绍. 第一可数空间是强 Fréchet 空间(练习 2.4.3). 但是强 Fréchet 空间未必是第一可数空间(例 3.2.11).

引理 2.4.4 设闭映射 $f:X\to Y$，其中 T_1 空间 Y 是强 Fréchet 空间或局部紧空间，那么 X 上的每一实值连续函数在每一$\partial(f^{-1}(y))$上有界.

证明 若不然，存在实值连续函数 $h:X\to\mathbb{R}$及 $y\in Y$ 使得 h 在$\partial f^{-1}(y)$上无界，则可取$\partial f^{-1}(y)$中的序列$\{x_i\}$使得每一$|h(x_{i+1})|>|h(x_i)|+1$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$，置 $V_i=\{x\in X : |h(x)-h(x_i)|<1/2\}$，则$\{V_i\}$是 X 的离散开集列.

设 Y 是强 Fréchet 空间. 由于每一 $x_i\in V_i\cap\partial f^{-1}(y)$，对于 y 在 Y 中的任一邻域 U，$f^{-1}(U)\cap V_i$是 x_i在 X 中的邻域，于是 $f^{-1}(U)\cap V_i\setminus f^{-1}(y)\neq\varnothing$，即 $U\cap(f(V_i)\setminus\{y\})\neq\varnothing$，所以$y\in\overline{f(V_i)\setminus\{y\}}\subset\overline{f(\bigcup_{n\geq i}V_n)\setminus\{y\}}$，从而存在$y_i\in f(\bigcup_{n\geq i}V_n)\setminus\{y\}$使得序列$\{y_i\}$在 Y 中收敛于 y，因此存在由互不相同点组成的子序列$\{y_{i_k}\}$和子集列$\{V_{n_k}\}$使得每一 $y_{i_k}\in f(V_{n_k})$. 对于每一 $k\in\mathbb{N}$，存在 $z_k\in V_{n_k}$ 使得 $y_{i_k}=f(z_k)$. 因为$\{V_{n_k}\}$是 X 的离散集列，所以$\{\{z_k\} : k\in\mathbb{N}\}$在 X 中是离散的，又因为 f 是闭映射, $\{\{y_{i_k}\} : k\in\mathbb{N}\}$在 Y 中是闭包保持的，而 Y 是$T_1$空间, 所以$\{y_{n_k} : k\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭子集，这与序列$\{y_i\}$在 Y 中收敛于 y 相矛盾.

设 Y 是局部紧空间. 存在 y 在 Y 中的紧邻域 C_y. 由于 $x_i\in\partial f^{-1}(y)$，所以对 x_i的每一邻域V 有$V\setminus f^{-1}(y)\neq\varnothing$. 从归纳法可选取$z_1\in V_1\cap f^{-1}(C_y)\setminus f^{-1}(y)$, $z_{i+1}\in V_{i+1}\cap f^{-1}(C_y)\setminus f^{-1}(\{y, f(z_1), \ldots, f(z_i)\})$(利用了 Y 是 T_1空间). 因为$f(z_i)\in C_y$，而 C_y是 Y 的紧子集，因

[38] F. Siwiec 是日本数学家 J. Nagata(1925-)的学生.

而序列$\{f(z_i)\}$在 Y 中有聚点. 然而每一$z_i \in V_i$, 于是$\{f(z_i) : i \in \mathbb{N}\}$是 Y 的闭离散子集, 所以序列$\{f(z_i)\}$在 Y 中无聚点, 矛盾. ∎

引理 2.4.5 设映射 $f:X \to Y$. 若 X 是 T_1空间, 则存在 X 的闭子空间 Z 满足: $f_{|Z}:Z \to Y$ 是映射且对于每一$y \in Y$, $(f_{|Z})^{-1}(y)$或者是单点集, 或者是非空集$\partial f^{-1}(y)$.

证明 对于每一 $y \in Y$, 取定点 $p_y \in f^{-1}(y)$. 置 $Z=\bigcup\{\partial f^{-1}(y) : \partial f^{-1}(y) \neq \varnothing\} \cup \{p_y : \partial f^{-1}(y)=\varnothing\}$. 由于 $X \setminus Z=(\bigcup\{(f^{-1}(y))^{\circ} : \partial f^{-1}(y) \neq \varnothing\}) \cup (\bigcup\{(f^{-1}(y))^{\circ} \setminus \{p_y\} : \partial f^{-1}(y)=\varnothing\})$是 X 的开子集, 所以 Z 是 X 的闭集. $g=f_{|Z}: Z \to Y$ 是满射且每一 $g^{-1}(y)$或者是单点集, 或者是非空集$\partial f^{-1}(y)$. ∎

定义 2.4.6 设映射 $f:X \to Y$. f 称为边界紧映射(或边缘紧映射, boundary compact mapping), 若每一$\partial f^{-1}(y)$是 X 的紧子集.

定理 2.4.7 (Hanai[1956]-Morita[1956]-Stone[1956]定理)设 $f:X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量化空间;

(2) Y 是第一可数空间;

(3) f 是边界紧映射.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 Y 是第一可数空间. 因为 X 是度量空间, 为了证明 f 是边界紧映射, 由定理 2.2.9, 只须证明对于每一$y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$是 Y 的伪紧子空间, 即$\partial f^{-1}(y)$上的每一实值连续函数是有界函数. 设 h 是$\partial f^{-1}(y)$上的实值连续函数, 由 Tietze 扩张定理(引理 1.2.11)及 X 是正规空间, 不妨设 h 是 X 上的实值连续函数, 再由引理 2.4.4, h 在$\partial f^{-1}(y)$上有界. 故 f 是边界紧映射.

(3)$\Rightarrow$(1). 设 f 是边界紧映射. 由引理 2.4.5, 不妨设 f 是逆紧映射. 再由定理 2.4.2, Y 是可度量化空间. ∎

由定理 2.4.2, 度量空间的逆紧映象是度量空间, 但是保持可度量性的闭映射未必是逆紧映射, 定理 2.4.7 表明这闭映射必定是边界紧映射. 虽然度量空间的闭映射未必是逆紧映射, 但是利用定理 2.4.7 的证明可得到较弱的结果.

定义 2.4.8 (Michael[1964]) 设映射 $f:X \to Y$. f 称为紧覆盖映射(compact-covering mapping), 若 Y 是每一紧子集是 X 的某一紧子集在 f 的映象.

由定理 1.3.6, 逆紧映射是紧覆盖映射.

推论 2.4.9 度量空间上的闭映射是紧覆盖映射.

证明 设 $f:X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 对于 Y 的每一非空紧子集 K, 让 $g=f_{|K}: f^{-1}(K) \to K$, 则 g 是闭映射且 $f^{-1}(K)$是度量空间. 由引理 2.4.4, 利用定理 2.4.7 中(2)$\Rightarrow$(3)同样的方法可证明 g 是边界紧映射. 由引理 2.4.5, 存在 $f^{-1}(K)$的闭子集 L 使得 $g_{|L}: L \to K$ 是逆紧映射, 而 K 是紧空间, 由定理 1.3.6, L 是 X 的紧子集且 $f(L)=g_{|L}(L)=K$. 故 f 是紧覆盖映射. ∎

引理 2.4.10 开映射保持第一可数性.

证明 设 $f:X \to Y$ 是开映射, 其中 X 是第一可数空间. 对于每一 $y \in Y$, 取定 $x \in f^{-1}(y)$. 由于 X 是第一可数空间, 让$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的可数邻域基, 因为 f 是开映射, 于是$\{f(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 y 在 Y 中的可数邻域基. 所以 Y 是第一可数空间. ∎

由定理 2.4.7 和引理 2.4.10 有下述推论.

推论 2.4.11 开闭映射保持可度量性. ∎

1972 年 E. Michael 对于 Hanai-Morita-Stone 定理中"边界紧的闭映射"条件给出了进一步的推广.

定义 2.4.12 (Siwiec[1971])设映射 $f:X \to Y$. f 称为可数双商映射(countably bi-quotient mapping), 若对于每一 $y \in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的可数开子集族 $\mathcal{U}$, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 使得 $f(\bigcup\mathcal{U}')$是 y 在 Y 中的邻域.

可数双商映射的定义源于 E. Michael[1968]定义的双商映射(bi-quotient mapping). 设映射 $f:X \to Y$. f 称为双商映射, 若对于每一 $y \in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的开子集族 $\mathcal{U}$, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$使得 $f(\bigcup\mathcal{U}')$是 y 在 Y 中的邻域. 显然, 开映射是双商映射, 双商映射是可数双商映射. 下述两个引理说明了(可数)双商映射与闭映射的一些关系.

引理 2.4.13 (朱俊[1983])象空间是 T_1 空间的边界紧的闭映射是双商映射.

证明 设 $f:X \to Y$ 是边界紧的闭映射, 其中 Y 是 T_1 空间. 对于每一 $y \in Y$ 及 X 的覆盖

$f^{-1}(y)$的开子集族 $\mathscr{U}$, 因为 $\mathscr{U}$ 也覆盖 X 的紧子集$\partial f^{-1}(y)$, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}'$覆盖 $\partial f^{-1}(y)$, 不妨设存在 $U\in\mathscr{U}'$使得 $U\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$, 从而 $y\in f(U)$. 由于 $f^{-1}(y)=\partial f^{-1}(y)\cup(f^{-1}(y))^{\circ}\subset(\cup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ}$, 又由于 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset(\cup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ}$, 从而 $y\in V\subset f((\cup\mathscr{U}')\cup(f^{-1}(y))^{\circ})\subset f((\cup\mathscr{U}')\cup f^{-1}(y))=f(\cup\mathscr{U}')\cup\{y\}=f(\cup\mathscr{U}')$, 所以 $f(\cup\mathscr{U}')$是 y 在 Y 中的邻域. 故 f 是双商映射. █

引理 2.4.14 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 T_2 空间 Y 是强 Fréchet 空间, 则 f 是可数双商映射.

证明 若 f 不是可数双商映射, 则存在 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的可数开子集族$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $y\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)^{\circ}=\overline{Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)}$. 由于 Y 是强 Fréchet 空间, 存在 $y_n\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)$使得序列$\{y_n\}$收敛于 y. 这时每一 $y_n\neq y$, 不妨设 y_n是互不相同的. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 那么这些 x_n是互不相同的. 若序列$\{x_n\}$在 X 中没有聚点, 则$\{\{x_n\}:n\in\mathbb{N}\}$是 X 的局部有限集族, 由于 f 是闭映射, $\{\{y_n\}:n\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭包保持集族, 再由于 Y 是 T_1空间, $\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$是 Y 的闭集, 矛盾, 故$\{x_n\}$在 X 中有聚点, 设 x 是它的一个聚点, 那么 f(x)是$\{y_n\}$在 Y 中的一个聚点, 由于 Y 是 T_2空间, 于是 f(x)=y, 即 $x\in f^{-1}(y)$, 于是存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x\in U_i$, 从而存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得所有的 $x_{n_k}\in U_i$, 相应地有 $y_{n_k}\in f(U_i)$, 矛盾. 故 f 是可数双商映射. █

引理 2.4.15 可数双商映射保持强 Fréchet 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是可数双商映射, 其中 X 是强 Fréchet 空间. 让$\{A_n\}$是空间 Y 中递减的集列且 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)}$. 否则, $f^{-1}(y)\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)})=\varnothing$, 即 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})$, 由于 f 是可数双商映射, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $y\in f(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})^{\circ}$, 从而$\varnothing\neq A_n\cap f(X\setminus\overline{f^{-1}(A_n)})\subset A_n\cap(Y\setminus A_n)=\varnothing$, 矛盾. 因为 X 是强 Fréchet 空间, 所以存在 $x_n\in f^{-1}(A_n)(\forall n\in\mathbb{N})$使得序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于

x, 从而 $f(x_n)\in A_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$且序列$\{f(x_n)\}$在 Y 中收敛于 y. 因而, Y 是强 Fréchet 空间. ∎

定理 2.4.16 (Michael[1972])设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量化空间;

(2) Y 是强 Fréchet 空间;

(3) f 是可数双商映射.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的. (2)$\Rightarrow$(3)由引理 2.4.14. (3)$\Rightarrow$(1). 设 f 是可数双商映射, 由引理 2.4.15, Y 是强 Fréchet 空间, 再由引理 2.4.4 及 X 的可度量性, f 是边界紧映射. 由 Hanai-Morita-Stone 定理(定理 2.4.7), Y 是可度量化空间. ∎

练习

2.4.1 设映射 $f:X\to Y$. 若 X 是紧度量空间, Y 是 T_2 空间, 则 Y 是可度量化空间.

2.4.2 若空间 X 被度量子空间组成的局部有限闭集族覆盖, 则 X 是可度量化空间(利用练习 1.6.5).

2.4.3 证明: 第一可数空间是强 Fréchet 空间.

2.4.4 证明: T_2 仿紧空间上的闭映射是紧覆盖映射(Michael[1964]).

2.4.5 设 $f:X\to Y$ 是闭映射且每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子集. 若 X 是 T_1 的正则空间, 则 f 是紧覆盖映射.

2.4.6 设 X 是度量空间, 下述条件相互等价: (1) X 的非孤立点集是 X 的紧子集; (2) X 的任一闭映象是可度量化空间; (3) X 的任一闭集的边界是 X 的紧子集(Jayanthan, Kannan[1988]).