§1.5 Michael 定理

从仿紧性的局部有限加细刻画(定理 1.4.5)及逆紧映射保持局部有限集族(练习 1.3.5)易知, 逆紧映射保持 T_2 仿紧空间性质. 1957 年 E. Michael 证明了闭映射保持 T_2 仿紧性. 这一重要结果的证明依赖于 E. Michael 关于仿紧性的闭包保持加细刻画的著名定理. 为了第二章研究度量空间拓扑性质的需要, 本节一并介绍 1940 年 J. W. Tukey, 1948 年 A. H. Stone 关于仿紧性的点星加细刻画和星加细刻画.

对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$, $x\in X$ 和 $A\subset X$, 记 $st(x, \mathscr{P})=\bigcup\{P\in\mathscr{P} : x\in P\}$, $st(A, \mathscr{P})=\bigcup\{P\in\mathscr{P} : A\bigcap P\neq\varnothing\}$,分别称为 $\mathscr{P}$ 在 x 的星, $\mathscr{P}$ 在 A 的星.

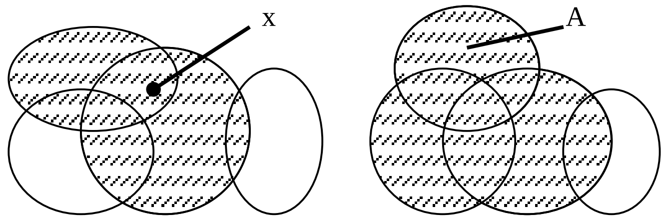

图　　st(x, $\mathscr{P}$)　　　　st(A, $\mathscr{P}$)

定义 1.5.1　设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是空间 X 的覆盖. 称 $\mathscr{U}$ 点星加细(point-star refinement) $\mathscr{V}$, 如果 $\{st(x, \mathscr{U}) : x\in X\}$ 加细 $\mathscr{V}$; 称 $\mathscr{U}$ 星加细(star refinement) $\mathscr{V}$, 如果 $\{st(U, \mathscr{U}) : U\in\mathscr{U}\}$ 加细 $\mathscr{V}$.

点星加细、星加细有时分别称为点星形加细和星形加细. 在证明 Michael 定理之前, 先介绍局部有限加细, 点星加细和星加细之间的一些关系.

引理 1.5.2　若空间 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 有局部有限的闭加细, 则 $\mathscr{U}$ 也有点星开加细.

证明　记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 设 $\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的闭加细. 对于每一 $\beta\in\Gamma$, 存在 $\alpha(\beta)\in\Lambda$ 使得 $F_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一 $x\in X$, 置 $\Gamma_x=\{\beta\in\Gamma : x\in F_\beta\}$, $V_x=(\bigcap_{\beta\in\Gamma_x}U_{\alpha(\beta)})\bigcap(X\setminus\bigcup_{\beta\notin\Gamma_x}F_\beta)$. 由 $\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ 的局部有限性和引理 1.4.4 知 Γ_x 是 Γ 的有限子集且 V_x 是 x 的开邻域, 于是 $\mathscr{V}=\{V_x\}_{x\in X}$ 是 X 的开覆盖. 下证 $\mathscr{V}$ 点星加细 $\mathscr{U}$. 对于 $x_0\in X$, 取定 $\beta\in\Gamma_{x_0}$, 如 $x_0\in V_x$, 而 $x_0\in F_\beta$, 则 $\beta\in\Gamma_x$, 从而 $V_x\subset U_{\alpha(\beta)}$, 所以 $st(x_0, \mathscr{V})=\bigcup\{V_x\in\mathscr{V} : x_0\in V_x\}\subset U_{\alpha(\beta)}$. ∎

引理 1.5.3　设 $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是空间 X 的覆盖. 若 $\mathscr{U}$ 点星加细 $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}$ 点星加细 $\mathscr{W}$, 则 $\mathscr{U}$ 星加细 $\mathscr{W}$.

证明　记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathscr{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于任意的 $\alpha\in\Lambda$, 若 $x\in U_\alpha$, 则存在 $\beta_x\in\Gamma$

使得 $U_\alpha \subset st(x, \mathscr{U}) \subset V_{\beta_x}$. 取定 $x_0 \in U_\alpha$, 则存在 $W \in \mathscr{W}$ 使得 $st(x_0, \mathscr{V}) \subset W$. 对于每一 $x \in U_\alpha$ 有 $x_0 \in V_{\beta_x}$, 从而 $st(U_\alpha, \mathscr{U}) = \bigcup_{x\in U_\alpha} st(x, \mathscr{U}) \subset \bigcup_{x\in U_\alpha} V_{\beta_x} \subset st(x_0, \mathscr{V}) \subset W$, 于是 $\mathscr{U}$ 星加细 $\mathscr{W}$. ▮

定义 1.5.4 (Bing[21][1951])设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为离散族(discrete family), 若对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 $\mathscr{P}$ 中至多一个元相交.

若空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的可数个离散集族的并, 则称 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 离散族(σ -discrete family). 显然, 空间 X 的离散集族是局部有限集族和互不相交集族. 实数空间 R 的集族$\{(n, n+1) : n\in \mathbb{N}\}$既是局部有限集族又是互不相交集族, 但它不是离散集族.

仿紧性的星加细刻画依赖选择公理. 下面介绍的 Zermelo 良序定理(Zermelo well-ordering theorem, Zermelo[1904])是选择公理的一种等价形式.

引理 1.5.5 (Zermelo 良序定理)任何集可按某个线性序使成为良序集. ▮

定理 1.5.6 对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有点星开加细;

(3) X 的每一开覆盖有星开加细;

(4) X 的每一开覆盖有σ 离散开加细.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 1.4.5 和引理 1.5.2, (2)$\Rightarrow$(3)由引理 1.5.3, (4)$\Rightarrow$(1)由定理 1.4.5, 所以只须证明(3)$\Rightarrow$(4).

设空间 X 的每一开覆盖有星开加细. 让 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 置 $\mathscr{U}_0=\mathscr{U}$, 则存在 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$使得

(6.1) 每一 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$.

对于每一$\alpha \in \Lambda$ 及 $n\in \mathbb{N}$, 置

(6.2) $U_{\alpha,n}=\{x\in X :$ 存在 x 的开邻域 V 使得 $st(V, \mathscr{U}_n)\subset U_\alpha\}$.

则对于每一 $n\in \mathbb{N}$, $\{U_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 从而有 $st(U_{\alpha,n}, \mathscr{U}_{n+1})\subset U_{\alpha,n+1}$. 事实上, 对于每一 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$, 存在 $W\in\mathscr{U}_n$ 使得 $st(U, \mathscr{U}_{n+1})\subset W$. 如果 $x\in U\cap U_{\alpha,n}$, 则 $W\subset st(x,$

---

[21] 美国数学家 R. H. Bing(1914-1986), 他是美国数学家 R. L. Moore(1882-1974)的学生.

$\mathscr{U}_n)\subset U_\alpha$，所以 st(U, $\mathscr{U}_{n+1})\subset U_\alpha$. 由(6.2), $U\subset U_{\alpha,n+1}$. 因此 st($U_{\alpha,n}$, $\mathscr{U}_{n+1})\subset U_{\alpha,n+1}$. 由上述断言知

(6.3) 若 $x\in U_{\alpha,n}$ 且 $y\notin U_{\alpha,n+1}$，则不存在 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$ 使得 x, $y\in U$.

由 Zermelo 良序定理，把指标集 Λ 良序化，置

(6.4) $V_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\overline{\bigcup_{\gamma<\alpha}U_{\gamma,n+1}}$.

对于 Λ 中任意不同的 α，β，按 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$，由(6.4)分别得 $V_{\beta,n}\subset X\setminus U_{\alpha,n+1}$ 或 $V_{\alpha,n}\subset X\setminus U_{\beta,n+1}$. 对于任意的 $x\in X$，存在 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$ 使得 $x\in U$，若 $U\cap V_{\alpha,n}\neq\varnothing$，如果存在 $\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$ 使得 $U\cap V_{\beta,n}\neq\varnothing$，设 $a\in U\cap V_{\alpha,n}$，$b\in U\cap V_{\beta,n}$，则 a，$b\in\mathscr{U}_{n+1}$ 且当 $\alpha<\beta$ 时 $a\in U_{\alpha,n}$, $b\notin U_{\alpha,n+1}$；当 $\beta<\alpha$ 时 $b\in U_{\beta,n}$, $a\notin U_{\beta,n+1}$，这与(6.3)相矛盾，因而对于任意的 $\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$ 总有 $U\cap V_{\beta,n}=\varnothing$，所以 x 的开邻域 U 仅与 $\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中至多一个元相交，故 $\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散开集族.

下证 $\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的覆盖. 设 $y\in X$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，因为 $\{U_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的覆盖，令 $\alpha_n(y)=\min\{\alpha\in\Lambda : y\in U_{\alpha,n}\}$，再令 $\alpha(y)=\min\{\alpha_n(y) : n\in\mathbb{N}\}$，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\alpha(y)=\alpha_n(y)$，即 $\alpha(y)$ 是 Λ 中使得 $y\in U_{\alpha,n}$ 的最小者，从而 $y\in U_{\alpha(y),n}\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+2}$. 对于每一 $\gamma<\alpha(y)$ 若存在 $x\in$ st(y, $\mathscr{U}_{n+2})\cap U_{\gamma,n+1}$，则存在 $U\in\mathscr{U}_{n+2}$ 使得 x，$y\in U$，由(6.3)有 $y\in U_{\gamma,n+2}$，矛盾，于是 st(y, $\mathscr{U}_{n+2})\cap U_{\gamma,n+1}=\varnothing$，所以 st(y, $\mathscr{U}_{n+2})\cap(\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+1})=\varnothing$，故 $y\notin\overline{\bigcup_{\gamma<\alpha(y)}U_{\gamma,n+1}}$. 由(6.4), $y\in V_{\alpha(y),n}$. 因而 $\mathscr{U}$ 有 σ 离散开加细 $\{V_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$. ∎

J. W. Tukey[1940]称具有定理 1.5.6(3)性质的空间是全正规(fully normal)空间，并且证明了度量空间是全正规空间，定理 1.5.6 的(2)等价于(3). A. H. Stone[1948]证明了定理 1.5.6 的(1)等价于(3). E. Michael[1953]证明了定理 1.5.6 的(1)等价于(4).

下面进一步介绍 1957 年 E. Michael 关于仿紧性的闭包保持加细刻画. 若空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的可数个闭包保持集族的并，则称 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 闭包保持族(σ-closure-preserved family).

定理 1.5.7 (Michael[1957])对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有σ闭包保持的开加细;

(3) X 的每一开覆盖有闭包保持的闭加细;

(4) X 的每一开覆盖有闭包保持的加细.

证明 由定理 1.4.5 知(1)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 因为 X 是正则空间, X 有开覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$, 其中每一 $\mathscr{V}_i$ 是闭包保持的, 且不妨设 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_i=\bigcup\mathscr{V}_i$, $\mathscr{W}_i=\{\overline{V}\setminus\bigcup_{n<i}V_n : V\in\mathscr{V}_i\}$. 由于 $\overline{V}\setminus\bigcup_{n<i}V_n=\overline{V}\cap(X\setminus\bigcup_{n<i}V_n)$, $X\setminus\bigcup_{n<i}V_n$ 是 X 的闭集, 而 $\overline{\mathscr{V}_i}$ 是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.2), 所以 $\mathscr{W}_i$ 也是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.4), 从而对于每一 $m\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i$ 是 X 的闭包保持集族(练习 1.4.3). 设 $\mathscr{W}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i$, 则 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭加细. 现在要证 $\mathscr{W}$ 是 X 的闭包保持集族. 设 $\mathscr{W}'\subset\mathscr{W}$, $x\in\overline{\bigcup\mathscr{W}'}$, 由于$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in V_m$, 对于每一 $i>m$ 和 $W\in\mathscr{W}'\cap\mathscr{W}_i$, $W\cap V_m=\varnothing$, 所以 $x\in\overline{\bigcup(\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i))}$. 由于 $\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的, 所以存在 $W\in\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\le m}\mathscr{W}_i)\subset\mathscr{W}'$使得 $x\in\overline{W}=W$. 故 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的闭加细.

(3)$\Rightarrow$(4)是显然的.

(4)$\Rightarrow$(1). (7.1) X 的每一开覆盖有闭包保持的精确闭加细.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖. 由正则性, $\mathscr{U}$ 有闭包保持的闭加细$\{F_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于每一$\beta\in\Gamma$ 存在$\alpha(\beta)\in\Lambda$使得 $F_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$ 让 $C_\alpha=\bigcup\{F_\beta : \beta\in\Gamma, \alpha(\beta)=\alpha\}$(可能某些 $C_\alpha=\varnothing$), 那么$\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细.

(7.2) X 是正规空间.

设 A 和 B 是 X 的不相交的闭集, 那么$\{X\setminus A, X\setminus B\}$是 X 的开覆盖, 由(7.1), 存在 X 的闭覆盖$\{C_1, C_2\}$使得 $C_1\subset X\setminus A$ 且 $C_2\subset X\setminus B$, 于是 $X\setminus C_1$和 $X\setminus C_2$是 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集, 故 X 是正规空间.

(7.3) X 的每一开覆盖有σ离散的开加细.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的开覆盖, 由 Zermelo 良序定理, 把指标集Λ良序化. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 归纳构造 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$使得

(7.3.1) 对于每一$\alpha\in\Lambda$有$C_{\alpha,i}\bigcap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,i+1})=\varnothing$.

由(7.1)取$\{C_{\alpha,1}\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细. 设对于 $i\le n$ 已构造了$\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$的闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$满足(7.3.1), 下面构造$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置

(7.3.2) $U_{\alpha,n+1}=U_{\alpha}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n}$.

则$\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$是X的开覆盖, 这是因为对于每一$x\in X$, 记$\mathscr{U}$中含有x的第一个元是$U_{\gamma}$, 由归纳假定, $\{C_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$精确加细$\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 于是$\bigcup_{\beta<\gamma}C_{\beta,n}\subset\bigcup_{\beta<\gamma}U_{\beta}$, 所以$x\in U_{\gamma,n+1}$. 由(7.1), X 的开覆盖$\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$存在闭包保持的精确闭加细$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则$C_{\alpha,n}\bigcap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})=\varnothing$.

对于每一$\alpha\in\Lambda$及 $i\in\mathbb{N}$, 置 $V_{\alpha,i}=X\setminus\bigcup_{\beta\ne\alpha}C_{\beta,i}$. 则 $V_{\alpha,i}$是 X 的开集且对于每一$\alpha\ne\beta$, $V_{\alpha,i}\bigcap V_{\beta,i}=\varnothing$, 于是$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是X的互不相交的开集族. 由于$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\mathscr{U}$的精确加细, $V_{\alpha,i}\subset C_{\alpha,i}\subset U_{\alpha}$. 下面要证明$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$是空间X的覆盖. 设$x\in X$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 因为$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的覆盖, 置$\alpha_i(x)=\min\{\alpha\in\Lambda : x\in C_{\alpha,i}\}$. 取正整数 k 使得$\alpha_k=\min\{\alpha_i(x) : i\in\mathbb{N}\}$, 则 $x\in C_{\alpha_k,k}$. 当$\alpha<\alpha_k$时 $x\notin C_{\alpha,k+1}$, 当$\alpha>\alpha_k$时由(7.3.1), $x\notin C_{\alpha_k,k+1}$, 所以$x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 故$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$是$\mathscr{U}$的$\sigma$互不相交的开加细.

由(7.1), X 的开覆盖$\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$存在闭包保持的精确闭加细$\{D_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda,i\in\mathbb{N}}$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 因为 X 是正规空间, 存在开集 G_i使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_{\alpha,i}\subset G_i\subset\overline{G_i}\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_{\alpha,i}$. 置$\mathscr{W}_i=\{V_{\alpha,i}\bigcap G_i : \alpha\in\Lambda\}$. 对于$x\in X$, 若$x\notin\overline{G_i}$, 那么x的开邻域$X\setminus\overline{G_i}$与$\mathscr{W}_i$中的每一元不相交; 若$x\in\overline{G_i}$, 那么存在唯一的$\alpha\in\Lambda$使得$x\in V_{\alpha,i}$, 于是x的开邻域$V_{\alpha,i}$仅与$\mathscr{W}_i$中的一个元 $V_{\alpha,i}\bigcap G_i$相交. 所以$\mathscr{W}_i$是离散的开集族. 从而$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i$是$\mathscr{U}$的$\sigma$离散的开加细. 由定理 1.5.6 , X 是仿紧空间. █

定理 1.5.8 (Michael 定理[1957])闭映射保持 T_2 仿紧性.

证明 设$f:X\to Y$是闭映射, 其中X是T_2的仿紧空间. 由定理1.4.10, X是正规空间. 由

于 f 是闭映射, 所以 Y 是 T_1 的正规空间(练习 1.3.3), 于是 Y 是 T_2 的正则空间. 对于空间 Y 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, $f^{-1}(\mathscr{U})$是 X 的开覆盖, 由定理 1.5.7, $f^{-1}(\mathscr{U})$存在闭包保持的加细 $\mathscr{V}$, 从而 $f(\mathscr{V})$是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持的加细(练习 1.4.5), 故 Y 是仿紧空间. ▮

定理1.5.8 和定理 1.4.13 说明仿紧性有很好的映射性质. 但是闭映射未必保持 T_1 仿紧性.

回忆商映射的定义. 设映射 $f:X\to Y$. f 称为商映射(quotient mapping), 若 $f^{-1}(U)$是 X 的开集, 则 U 是 Y 的开集. 这时空间 Y 称为 X 的商空间(quotient space). f 是商映射等价于若 $f^{-1}(F)$是 X 的闭集, 则 F 是 Y 的闭集. Y 是商空间等价于 Y 赋予关于 f 的商拓扑(quotient topology), 即$\{U\subset Y : f^{-1}(U)$是 X 的开集$\}$是 Y 的拓扑. 特殊的商空间是粘合空间(identification space). 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的非空的闭子集, 对于商集 X/A, 让 $q:X\to X/A$ 是自然对应, 即对于 $x\in X$, 若 $x\in X\setminus A$, 则 $q(x)=x$; 若 $x\in A$, 则 $q(x)$是 A 的代表元. 集合 X/A 赋予 q 的商拓扑称为粘合空间, q 是自然商映射. 这时 q 是闭映射(练习 1.3.2).

显然, 开映射和闭映射都是商映射.

例 1.5.9 闭映射不保持 T_1 仿紧性(林寿[1988a]).

设 $X=(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\setminus\{(0, 0)\}$是例 1.4.11 的 T_1 仿紧空间. 把 X 的闭子空间$\{0\}\times\mathbb{N}$粘合成一点 0*所得到的商空间 $X/(\{0\}\times\mathbb{N})$记为 $Y=(\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\{0\}))\cup\{0^*\}$. 设 $q:X\to Y$ 是自然商映射, 则 q 是闭映射.

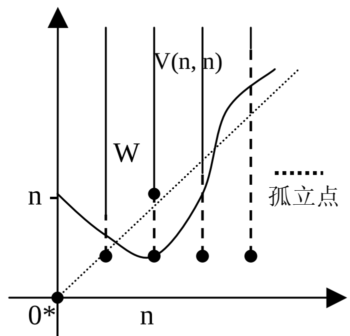

图 非仿紧空间

沿用例 1.4.11 的记号. 由商拓扑的定义, $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$中的点在空间 Y 中的邻域基取为 X 中相应点的邻域基, 点 0*在 Y 中的邻域基元形如$\{0^*\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(n, m_n))$, 其中每一 $m_n \geq n$. 让 $V=\{0^*\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(n, n))$, $\mathscr{V}=\{V\}\cup\{\{(n, 0)\}\cup V(n, n) : n\in\mathbb{N}\}\cup\{\{(n, m)\} : n>m\}$. 则 $\mathscr{V}$ 是 Y 的可数开覆盖, 但是 $\mathscr{V}$ 的任何开加细 $\mathscr{W}$ 都不可能在点 0*是局部有限的. 事实上, 由点 0*邻域基元的构造知 0*的任一邻域 W 与每一个$\{(n, 0)\}\cup V(n, m)$相交. 因而 $\mathscr{V}$ 不存在局部有限的开加细. 故 Y 不是仿紧空间. ▮

由 Tychonoff 积定理(定理 1.1.12)知道一族紧空间的积空间是紧空间. 由定理 1.3.3 和定

理 1.4.13 知仿紧空间与紧空间的积空间是仿紧空间(练习 1.4.6). 然而, 两个仿紧空间的积空间可以不是仿紧空间.

例 1.5.10 (Michael[1963])存在 T_2 的仿紧空间与无理数空间的闭子空间之积空间不是正规空间.

记单位闭区间$\mathbb{I}$中的有理点集为$\mathbb{Q}$, 无理点集为$\mathbb{P}$. 集合$\mathbb{I}$赋予如下拓扑: V 是$\mathbb{I}$的开集当且仅当存在$\mathbb{I}$中的欧几里得开集 G 和$\mathbb{P}$的子集 B 使得 $V=G\bigcup B$. 这样得到的拓扑空间记作 X, 称为 Michael 直线(Michael line). 显然, X 是 T_2 空间. 利用$\mathbb{I}$关于欧几里得拓扑的正则性及$\mathbb{P}$中点是 X 的孤立点知 X 是正则空间.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 因为$\mathbb{Q}$是可数集, 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子集 $\mathscr{U}'$覆盖$\mathbb{Q}$, 由于$\mathbb{P}$中的点是 X 的孤立点, $X\setminus\bigcup\mathscr{U}'$ 是 X 的闭子集, 所以$\mathscr{U}'\bigcup\{\{x\}: x\in X\setminus\bigcup\mathscr{U}'\}$是 $\mathscr{U}$ 的σ 离散的开加细. 由定理 1.5.6, X 是仿紧空间.

$\mathbb{P}$赋予实数空间的子空间拓扑, 则$\mathbb{P}$是正则的 Lindelöf 空间, 由推论 1.4.6, $\mathbb{P}$是仿紧空间. 下证 $X\times\mathbb{P}$不是正规空间.

令 $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{P}$, $B=\{(x, x): x\in\mathbb{P}\}$, 则 A 和 B 是$X\times\mathbb{P}$中不相交的闭集, 为证明$X\times\mathbb{P}$不是正规空间, 只要证明对于 $X\times\mathbb{P}$中包含 B 的任何开集 U 有 $A\bigcap\overline{U}\neq\varnothing$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $P_n=\{x\in\mathbb{P}: \{x\}\times B(x, 1/n)\subset U\}$, 其中对于每一 $x, y\in\mathbb{R}$, 让 $d(x, y)=|x-y|$, 且 $B(x, 1/n)=\{y\in\mathbb{P}: d(x, y)<1/n\}$. 显然, $\mathbb{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_n$.

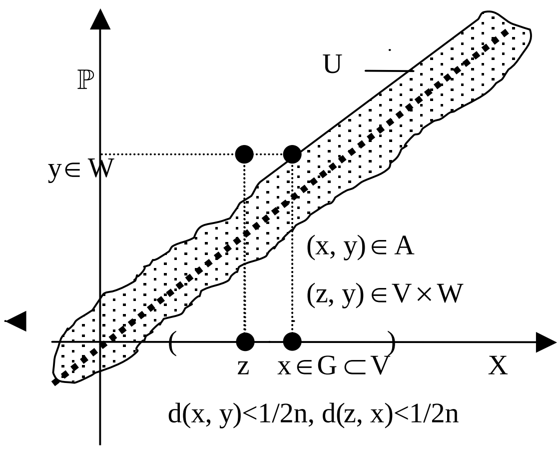

图 Michael 直线 X 与无理数子空间$\mathbb{P}$的积空间

因为无理数集$\mathbb{P}$不能表示为实数空间$\mathbb{R}$中的 F_σ 集(F_σ-set, 即可数个闭集之并, 见定理 1.7.6 或练习 1.7.3), 以τ 表示实数空间$\mathbb{R}$的欧几里得拓扑, 那么$\mathbb{P}\neq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}_\tau(P_n)$, 存在 $x\in\mathbb{Q}\bigcap\mathrm{cl}_\tau(P_n)$及 $y\in\mathbb{P}$使得 $d(x, y)<1/2n$. 由于$(x, y)\in A$, 为了证明 $A\bigcap\overline{U}\neq\varnothing$, 只要证明$(x, y)\in\overline{U}$, 即对于 x 在 X 中的任一开邻域 V 及 y 在$\mathbb{P}$中的任一开邻域 W 有$(V\times W)\bigcap U\neq\varnothing$. 由

X 中拓扑的构造, $V=G\bigcup B$, 其中 G 是$\mathbb{I}$中的欧几里得开集, $B\subset\mathbb{P}$, 于是 $x\in G\bigcap cl_\tau(P_n)$, 所以存在 $z\in G\bigcap P_n$ 使得 $d(z, x)<1/2n$, 从而$(z, y)\in V\times W$ 且 $d(z, y)\le d(z, x)+d(x, y)<1/n$. 由 P_n 的构造知$(z, y)\in U$, 所以$(V\times W)\bigcap U\neq\varnothing$. 因此, $X\times\mathbb{P}$不是正规空间. ▊

寻求适当的仿紧空间类使其有限乘积或可数乘积是仿紧空间诱发了一般拓扑中许多深刻的工作(见 Burke[1984]).

练习

1.5.1 设 A 是空间 X 的闭离散子集, 证明: $\{\{x\} : x\in A\}$是 X 的离散集族. 反之是否成立?

1.5.2 设 X 是 T_1空间, A 是 X 的子集. 证明下述条件相互等价: (1) A 是 X 的闭离散子空间; (2) $\{\{x\} : x\in A\}$是 X 的闭包保持集族; (3) $\{\{x\} : x\in A\}$是 X 的离散集族.

1.5.3 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的闭子集族, 证明: $\mathscr{P}$ 是 X 的离散集族当且仅当 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭包保持且互不相交的集族.

1.5.4 若空间 X 的每一开覆盖有点星开加细, 则 X 是正规空间.

1.5.5 若空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 存在局部有限(或点有限)的开加细, 则 $\mathscr{U}$ 也存在局部有限(或点有限)的精确开加细.

1.5.6 证明: T_2 仿紧空间的 F_σ 子集是仿紧子空间.

1.5.7 利用例 1.5.9的空间 Y 的一点紧化证明: T_1 仿紧空间的 F_σ 子集未必是仿紧子空间(葛英[1997]).

1.5.8 设$\mathscr{P}$是空间 X 的闭包保持的闭集族, 令 $E=\{x\in X : \bigcap\{P\in\mathscr{P} : x\in P\}=\{x\}\}$. 证明: E 是 X 的闭离散子空间.

1.5.9 设$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$是正规空间 X 的闭离散子集, 则存在 X 的离散开集列$\{V_n\}$使得每一 $x_n\in V_n$.

§1.6 局部紧空间

本节有二部分内容, 一是介绍局部紧空间的等价刻画和映射性质, 二是介绍局部紧空间的商映象——k 空间的性质. 回忆局部紧空间的定义, 空间 X 称为局部紧空间(locally compact space[22]), 若 X 的每一点具有一个紧的邻域.

引理 1.6.1 T_2 的局部紧空间是完全正则空间.

证明 设 X 是 T_2 的局部紧空间. 对于 X 中的点 z 及其开邻域 U, 由局部紧性, 存在 z 在 X 中的紧邻域 Z, 置 $V=U\cap Z^{\circ}$, 则 $z\in V$. 因为 X 是 T_2 空间, 由推论 1.1.6 和推论 1.1.5, 紧集 Z 是 X 的正规的闭子空间, 故存在连续函数 g: $Z\to\mathbb{I}$使得 g(z)=0, $g(Z\setminus V)\subset\{1\}$. 定义 f: $X\to\mathbb{I}$使得当 $x\in Z$ 时 f(x)=g(x), 当 $x\in X\setminus Z$ 时 f(x)=1. 下面验证 f 在 X 上连续. 设 F 是$\mathbb{I}$中的闭集, 若 $1\notin F$, 则 $f^{-1}(F)=g^{-1}(F)$是 X 的闭子集; 若 $1\in F$, 则 $f^{-1}(F)=g^{-1}(F)\cup(X\setminus V)$也是 X 的闭子集. 所以 f 是 X 上的连续函数, 且满足 f(z)=0, $f(X\setminus U)\subset\{1\}$, 故 X 是完全正则空间. ▌

定理 1.6.2 对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 T_2 的局部紧空间;

(2) 对于 X 的每一 T_2 紧化 cX, $cX\setminus c(X)$是 cX 的闭集;

(3) 一点紧化ωX 是 T_2 空间;

(4) 存在 X 的 T_2 紧化 cX 使得 $cX\setminus c(X)$是 cX 的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 T_2 的局部紧空间, 则 c(X)是 cX 的局部紧子集. 对于每一 $z\in c(X)$, 存在 z 在 c(X)中的紧邻域 V, 则 V 是 cX 的闭集. 令 $W=\mathrm{int}_{c(X)}(V)$, 则存在 cX 的开集U 使得 $W=U\cap c(X)$. 由于 c(X)是 cX 的稠密子集, 所以 $U=U\cap\overline{c(X)}\subset\overline{U\cap c(X)}=\overline{W}\subset V$, 因而 V 是 z 在 cX 中的邻域. 故 c(X)是 cX 的开集.

(1)$\Rightarrow$(3). 对于ωX 中不同的两点 x, z, 不妨设 $z=\Omega$, 由引理 1.6.1, 存在 x 在 X 中的闭紧邻域 U, 则 U 与$\omega X\setminus U$ 分别是 x, z 在ωX 中不相交的邻域, 所以ωX 是 T_2 空间.

(2)$\Rightarrow$(4)和(3)$\Rightarrow$(4)是显然的. (4)$\Rightarrow$(1). 设存在 X 的T_2 紧化 cX 使得 $cX\setminus c(X)$是cX 的闭集. 由于 cX 是正则空间, 于是 cX 的开子空间 c(X)是 T_2 的局部紧空间, 从而 X 是 T_2 的局部紧空间. ▌

---

[22] 1923 年由 P. Alexandroff 定义.

定理 1.6.3　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射，则 X 是局部紧空间当且仅当 Y 是局部紧空间.

证明　设 X 是局部紧空间. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集，因为 X 是局部紧空间，对于每一$x\in f^{-1}(y)$，存在 x 在 X 中的紧邻域 C_x，于是 X 的开子集族$\{(C_x)^\circ: x\in f^{-1}(y)\}$覆盖了 $f^{-1}(y)$，从而存在有限子覆盖$\{(C_{x_i})^\circ\}_{i\le n}$．令 $U_y=\bigcup_{i\le n}(C_{x_i})^\circ$，$C_y=\bigcup_{i\le n}C_{x_i}$．这时 U_y, C_y 分别是X的开子集和紧子集且 $f^{-1}(y)\subset U_y\subset C_y$．由于f是闭映射，由定理1.3.2，存在y在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset U_y$，因此 $y\in V_y\subset f(C_y)$. 由 f 的连续性, $f(C_y)$是 Y 的紧子集，所以 $f(C_y)$是 y 在 Y 中的紧邻域．故 Y 是局部紧空间.

反之，设 Y 是局部紧空间，对于每一$x\in X$, $f(x)=y$在 Y 中有紧邻域 K_y，因为 f 是逆紧映射，由定理 1.3.6, $f^{-1}(K_y)$是 x 在 X 中的紧邻域．故 X 是局部紧空间. ▉

定义 1.6.4　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖．空间 X 称为关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑(weak topology)，若 $A\subset X$ 使得对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap A$ 是 P 的闭集，则 A 是 X 的闭集.

若空间 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，那么 X 的子集 U 是 X 的开集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap U$ 是 P 的开集.

空间 X 称为 k 空间(k-space, Gale[1950])，若 X 关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑．即，空间 X 是 k 空间，若 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭集，则 A 是 X 的闭集.

定理 1.6.5　局部紧空间是 k 空间.

证明　设 X 是局部紧空间，若 X 的子集 A 不是 X 的闭集，则存在 $x\in\overline{A}\setminus A$. 因为 X 是局部紧空间，存在 x 的紧邻域 C，那么 $x\in \mathrm{cl}_C(A\cap C)\setminus(A\cap C)$，所以 $A\cap C$ 不是 X 的紧子空间 C 的闭集．故 X 是 k 空间. ▉

引理 1.6.6　商映射保持 k 空间性质.

证明　设 $f:X\to Y$ 是商映射，其中 X 是 k 空间．若 A 是 Y 的子集使得对于 Y 的每一紧子集K, $K\cap A$ 是 K 的闭集，如果 L 是 X 的紧子集，那么 f(L)是 Y 的紧子集，于是 $f(L)\cap A$ 是 f(L)的闭集．由于 $f_{|L}:L\to f(L)$是映射，所以$(f_{|L})^{-1}(f(L)\cap A)=L\cap f^{-1}(A)$是 L 的闭集．因为 X 是k 空间，因此 $f^{-1}(A)$是 X 的闭集，又因为 f 是商映射，所以 A 是 Y 的闭集，故 Y 是 k空间.

▉

为证明 k 空间是局部紧空间的商映象, 先对定义 1.4.8 中的拓扑和概念作补充说明. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的覆盖, 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 Z_α 是积空间 $X_\alpha\times\{\alpha\}$, 则 $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族互不相交的拓扑空间族, 定义拓扑和 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$, 称 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$ 是覆盖(或子空间族) $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的拓扑和. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 定义 $h_\alpha:Z_\alpha\to X_\alpha$ 使得 $h_\alpha((x,\alpha))=x$, 则 h_α 是同胚.

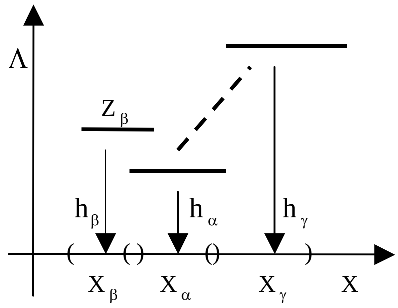

图 自然映射

令 $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z_\alpha$. 映射 $f:Z\to X$ 称为自然映射(natural mapping), 若对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 有 $f_{|Z_\alpha}=h_\alpha$.

引理 1.6.7 设 $\mathcal{F}$ 是空间 X 的覆盖, Z 是覆盖 $\mathcal{F}$ 的拓扑和. 若 $f:Z\to X$ 是自然映射, 则 f 是商映射当且仅当 X 关于 $\mathcal{F}$ 具有弱拓扑.

证明 记 $\mathcal{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}Z$ 并且对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 存在同胚 $h_\alpha:Z_\alpha\to F_\alpha$. 由于 f 是自然映射, 所以每一 $f_{|Z_\alpha}=h_\alpha$.

设 f 是商映射. 对于 X 的子集 A, 若每一 $A\cap F_\alpha$ 是 F_α 的闭集, 那么 $f^{-1}(A)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha^{-1}(A\cap F_\alpha)$ 是 Z 的闭集, 于是 A 是 X 的闭集, 所以 X 关于 $\mathcal{F}$ 具有弱拓扑. 反之, 如果 X 关于 $\mathcal{F}$ 具有弱拓扑, 并且 X 的子集 A 使得 $f^{-1}(A)$ 是 Z 的闭集, 那么对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $Z_\alpha\cap f^{-1}(A)=h_\alpha^{-1}(A\cap F_\alpha)$ 是 Z_α 的闭子集, 所以 $A\cap F_\alpha$ 是 F_α 的闭集, 从而 A 是 X 的闭集, 故 f 是商映射. ▮

定理 1.6.8 (Gale[1950])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 k 空间;

(2) X 是仿紧局部紧空间的商空间;

(3) X 是局部紧空间的商空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 k 空间, 则 X 关于全体紧子集所组成的覆盖 $\mathcal{K}$ 具有弱拓扑. 让 Z 是 $\mathcal{K}$ 的拓扑和, 则 Z 是仿紧的局部紧空间. 由引理 1.6.7, X 是仿紧局部紧空间 Z 的商映象.

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. 而(3)$\Rightarrow$(1)由定理 1.6.5 和引理 1.6.6. ▮

设两映射 $f:Z\to Y$ 和 $h:X\to W$, 映射 f 与 h 的积映射 $f\times h:Z\times X\to Y\times W$ 定义为 $f\times h(z,$

x)=(f(z), h(x)). 对于空间 X, 以 $id_X: X\to X$ 表示恒等映射, 即每一 $id_X(x)=x$. 两个闭映射的积映射未必是商映射.

例 1.6.9 让 $X=\mathbb{R}\setminus\{1/2, 1/3, \dots\}$赋予实数空间$\mathbb{R}$的子空间拓扑, 且 $id_X:X\to X$ 是恒等映射. 让 $Y=\mathbb{R}/\mathbb{N}$赋予商拓扑且 $f:\mathbb{R}\to Y$ 是自然商映射. 则 id_X和 f 都是闭映射. 下面证明积映射 $g=id_X\times f:X\times\mathbb{R}\to X\times Y$不是商映射. 让 $F=\{(1/i+\pi/j, i+1/j) : i, j=2, 3, \dots\}$, 则 F 是$X\times\mathbb{R}$的闭集. 由于$(0, f(1))\in\overline{g(F)}\setminus g(F)$, 所以 g(F)不是 $X\times Y$ 的闭集, 又由于 $F=g^{-1}g(F)$, 于是 g 不是商映射. █

引理 1.6.10 (Whitehead[23]定理[1948])设映射 $f:Z\to Y$. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$. 若 X 是 T_2 的局部紧空间, f 是商映射, 则 g 是商映射.

证明 对于 $X\times Y$ 的子集 W, 设 $g^{-1}(W)$是 $X\times Z$ 的开集, 任取点$(x, y)\in W$, 则$\{x\}\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$, 对于 $z\in f^{-1}(y)$, 由定理 1.6.1, X 是正则空间, 选取 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 是 X 的紧子集且 $\overline{U}\times\{z\}\subset g^{-1}(W)$, 那么 $g^{-1}g(\overline{U}\times\{z\})\subset g^{-1}(W)$, 即 $\overline{U}\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$. 令 $V=\{\alpha\in Y: \overline{U}\times f^{-1}(\alpha)\subset g^{-1}(W)\}$, 则$(x, y)\in U\times V\subset W$. 往证 V 是 Y 的开集. 由于$\overline{U}$是紧空间, 由定理 1.3.3, 投影映射 $p_2:\overline{U}\times Z\to Z$ 是闭映射, 从而 $f^{-1}(V)=\{z\in Z : \overline{U}\times f^{-1}f(z)\subset g^{-1}(W)\}=\{z\in Z : \overline{U}\times\{z\}\subset g^{-1}(W)\}=Z\setminus p_2(\overline{U}\times Z\setminus g^{-1}(W))$是 Z 的开集, 所以 V 是 Y 的开集, 因此 W 是 $X\times Y$ 的开集, 故 g 是商映射. █

定理 1.6.11 (D. E. Cohen 定理[1954])T_2 的局部紧空间与 k 空间之积空间是 k 空间.

证明 设 X 是 T_2 的局部紧空间, Y 是 k 空间. 让 Z 是空间 Y 的全体紧子集所组成的空间族的拓扑和, $f:Z\to Y$ 是自然映射, 则 Z 是局部紧空间且 f 是商映射. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 由引理 1.6.10, g 是商映射. 由于 $X\times Z$是局部紧空间, 于是 $X\times Z$是 k 空间, 再由引理 1.6.6, $X\times Y$ 是 k 空间. █

加拿大数学家 C. H. Dowker(1912-1982)[1952]首次构造了两个 k 空间, 其乘积空间不是

[23] 英国数学家 J. H. C. Whitehead(1904-1960), 他是美国数学家 O. Veblen(1880-1960)的学生, 英国数学家和哲学家 A. N. Whitehead(1861-1947)是他的伯伯. 中国数学家张素诚(1916-)是 J. H. C. Whitehead 的学生.

k空间. 例1.6.9中的积空间$X\times Y$不是k空间. 事实上, 仍使用例1.6.9中的记号. 一方面, g(F)不是$X\times Y$的闭集. 另一方面, 对于$X\times Y$的任意的非空紧子集K, 那么$p_2(K)$可视为$\mathbb{R}$中的有界闭集, 于是$g(F)\cap K$是有限集, 所以$g(F)\cap K$是$X\times Y$的闭集. 这说明$X\times Y$不是k空间.

练习

1.6.1 证明: 开映射保持局部紧空间性质.

1.6.2 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是一族非空的$T_2$局部紧空间. 证明: 积空间$\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$是局部紧空间当且仅当存在$\Lambda$的有限子集$\Gamma$使得当$\alpha\in\Lambda\setminus\Gamma$时$X_\alpha$是紧空间.

1.6.3 设X是k空间, 证明: $f:X\to Y$是连续函数当且仅当对于X的任一非空紧子集K, $f_{|K}:K\to f(K)$是连续函数.

1.6.4 设映射$f:X\to Y$是k映射(k-mapping, 即空间Y的每一紧子集的逆象是空间X的紧子集), 若Y是T_2的k空间, 则f是闭映射.

1.6.5 设$\mathcal{F}$是空间X的覆盖, Z是覆盖$\mathcal{F}$的拓扑和, f是从Z到X上的自然映射. 证明: (1) 若$\mathcal{F}$是X的开覆盖, 则f是开映射; (2) 若$\mathcal{F}$是X的局部有限的闭覆盖, 则f是逆紧映射.

1.6.6 设$f:X\to Y$是商映射. 若空间X关于覆盖$\mathcal{P}$具有弱拓扑, 则Y关于覆盖$f(\mathcal{P})$具有弱拓扑.

§1.7 Čech 完全空间

为了讨论度量空间和函数空间的完全性作准备, 本节介绍T_2局部紧空间的重要推广: Čech 完全空间及 Baire 空间. 先看定理 1.6.2 的推广.

引理 1.7.1 对于空间X下述条件相互等价:

(1) 对于X的每一T_2紧化cX, $cX\setminus c(X)$是cX的F_σ集;

(2) $\beta X\setminus\beta(X)$是βX的F_σ集;

(3) 存在X的T_2紧化cX使得$cX\setminus c(X)$是cX的F_σ集.

证明 只须证明(3)$\Rightarrow$(1). 设存在X的T_2紧化cX使得$cX\setminus c(X)$是cX的F_σ集. 由βX的最大性, 存在连续函数$f:\beta X\to cX$使得$f\beta=c$, 又由定理1.3.10, $f^{-1}(cX\setminus c(X))=\beta X\setminus$

$\beta(X)$，所以$\beta X\setminus\beta(X)$是βX的F_σ集．令$\beta X\setminus\beta(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$，其中每一$F_n$是$\beta X$的闭集．对于X的任一$T_2$紧化$c_1X$，存在连续函数$f_1:\beta X\to c_1X$使得$f_1\beta=c_1$，再由定理1.3.10，$f_1(\beta X\setminus\beta(X))=c_1X\setminus c_1(X)$，所以$c_1X\setminus c_1(X)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f_1(F_n)$且每一$f_1(F_n)$是$c_1X$的闭集，即$c_1X\setminus c_1(X)$是$c_1X$的$F_\sigma$集．∎

1937 年 E. Čech 定义了引理 1.7.1 刻画的拓扑性质.

定义 1.7.2 空间 X 称为 Čech 完全空间(Čech-complete space)[24]，如果 X 是完全正则的T_1空间且满足定理 1.7.1 中的条件之一，即 X 是(某一或任一)T_2紧化 cX 中的G_δ集.

由定理1.6.2, T_2的局部紧空间是Čech完全空间. 无理数空间是非局部紧的Čech完全空间. 下面建立 Čech 完全空间的内在刻画. 设$\mathcal{A}$是空间 X 的覆盖，称 X 的子集 B 的直径小于$\mathcal{A}$，如果存在$A\in\mathcal{A}$使得$B\subset A$，记为$\delta(B)<\mathcal{A}$.

定理 1.7.3 完全正则的T_1空间 X 是 Čech 完全空间当且仅当存在 X 的开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足：对于 X 的每一具有有限交性质的闭集族$\mathcal{F}$，如果对于每一$i\in\mathbb{N}$，存在$\mathcal{F}$中的元直径小于$\mathcal{A}_i$，则$\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$.

证明 必要性. 设 X 是 Čech 完全空间，不妨设 X 是 Stone-Čech 紧化βX的G_δ集，即存在βX的开集列$\{G_i\}$使得$X=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$．对于每一$x\in X$和$i\in\mathbb{N}$，存在$\beta X$中的开集$V_{x,i}$使得$x\in V_{x,i}\subset\overline{V_{x,i}}\subset G_i$．令$\mathcal{A}_i=\{X\cap V_{x,i}\}_{x\in X}$，则$\mathcal{A}_i$是 X 的开覆盖．下面证明 X 的覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$具有所要求的性质.

设$\{F_s\}_{s\in S}$是X的具有有限交性质的闭集族且对于每一$i\in\mathbb{N}$，存在$\{F_s\}_{s\in S}$中的元直径小于$\mathcal{A}_i$．因为$\{\overline{F_s}\}_{s\in S}$(关于$\beta X$的闭包)是紧空间$\beta X$的具有有限交性质的闭集族，存在$x\in\bigcap_{s\in S}\overline{F_s}$．对于每一$i\in\mathbb{N}$，存在$s_i\in S$和$x_i\in X$使得$F_{s_i}\subset X\cap V_{x_i,i}$，那么$x\in\overline{F_{s_i}}\subset\overline{X\cap V_{x_i,i}}\subset\overline{V_{x_i,i}}\subset G_i$，于是$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i=X$．故$x\in X\cap(\bigcap_{s\in S}\overline{F_s})=\bigcap_{s\in S}F_s$，即$\bigcap_{s\in S}F_s\neq\varnothing$.

---

[24] 过去习惯上将 Čech-complete space 译为 Čech 完备空间. 本书按《数学名词》(科学出版社, 1993)改译为 Čech 完全空间.

充分性. 设完全正则的T_1空间X具有开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足所列条件. 记$X\subset\beta X$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 置$\mathcal{A}_i=\{U_{s,i}\}_{s\in S_i}$, 存在$\beta X$的开集$V_{s,i}$使得$U_{s,i}=X\cap V_{s,i}$, 令$G_i=\bigcup_{s\in S_i}V_{s,i}$, 则$G_i$是$\beta X$的开集且$X\subset G_i$. 设$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$, 让$\mathcal{B}_x$是x在$\beta X$中的邻域基, $\mathcal{F}=\{X\cap\overline{V}:V\in\mathcal{B}_x\}$(关于$\beta X$的闭包). 则$\mathcal{F}$是X的具有有限交性质的闭集族. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 存在$s\in S_i$使得$x\in V_{s,i}$, 由$\beta X$的正则性, 存在$V\in\mathcal{B}_x$使得$x\in V\subset\overline{V}\subset V_{s,i}$, 于是$\delta(X\cap\overline{V})<\mathcal{A}_i$. 由假设, $\bigcap\mathcal{F}\neq\varnothing$. 因为$\bigcap\{\overline{V}:V\in\mathcal{B}_x\}=\{x\}$, 所以$x\in X$. 故$X=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}G_i$, 即X是Čech完全空间. ∎

定理 1.7.4 设X, Y都是完全正则的T_1空间. 如果存在完全映射$f:X\to Y$, 则X是Čech完全空间当且仅当Y是Čech完全空间.

证明 由定理1.3.13, f的扩张$f_\beta:\beta X\to\beta Y$满足$f_\beta(\beta X\setminus X)\subset\beta Y\setminus Y$. 又由于$f_\beta$是满射, 于是$f_\beta(\beta X\setminus X)=\beta Y\setminus Y$. 这说明$\beta X\setminus X$是$\beta X$的$F_\sigma$集当且仅当$\beta Y\setminus Y$是$\beta Y$的$F_\sigma$集, 即X是Čech完全空间当且仅当Y是Čech完全空间. ∎

Čech完全空间的重要应用是它具有1899年法国数学家R. Baire(1874-1932)就实直线建立的一种拓扑性质. 回忆Baire空间(N. Bourbaki[1948]定义)和第二范畴集的概念. 空间X称为Baire空间(Baire space), 若X中可数个开的稠密子集的交集是X的稠密子集. 设A是空间X的子集, A称为X的无处稠密集(或疏集, nowhere dense set), 若$A^{-\circ}=\varnothing$. 易验证, A是X的无处稠密集当且仅当对于X的每一不空的开集U, 存在U的不空开子集V使得$V\cap A=\varnothing$(练习1.7.4). A称为X的第一范畴集(first category set), 若A是X中可数个无处稠密集的并; A称为X的第二范畴集(second category set), 若A不是X的第一范畴集.

定理 1.7.5 (Baire范畴定理)Čech完全空间是Baire空间.

证明 设X是Čech完全空间, 则存在X的开覆盖列$\{\mathcal{A}_i\}$满足定理1.7.3的条件. 让$\{G_n\}$是X的开的稠密子集列且$G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$, 要证G是X的稠密子集, 即若U是X的非空开集, 则$U\cap G\neq\varnothing$. 下面由归纳法构造满足定理1.7.3条件的集列$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得每一$F_n\subset U\cap G_n$.

因为 G_1 稠密于 X, U 是 X 的非空开集且 $\mathcal{A}_1$ 是 X 的开覆盖, 所以存在 $A_1 \in \mathcal{A}_1$ 使得 $U \cap A_1 \cap G_1 \neq \varnothing$, 取 $x_1 \in U \cap A_1 \cap G_1$. 由 X 的正则性, 存在 x_1 在 X 中的开邻域 V_1 使得 $\overline{V}_1 \subset U \cap A_1 \cap G_1$. 因为 G_2 稠密于 X, V_1 是 X 的非空开集且 $\mathcal{A}_2$ 是 X 的开覆盖, 所以存在 $A_2 \in \mathcal{A}_2$ 使得 $V_1 \cap A_2 \cap G_2 \neq \varnothing$, 取 $x_2 \in V_1 \cap A_2 \cap G_2$, 存在 x_2 在 X 中的开邻域 V_2 使得 $\overline{V}_2 \subset V_1 \cap A_2 \cap G_2$. 显然 $\overline{V}_2 \subset U \cap G_2$. 继续上述过程, 得到 X 的非空闭集列 $\{F_n\}=\{\overline{V}_n\}$满足每一 $F_{n+1} \subset F_n \subset U \cap G_n$ 且 $\delta(F_n) < \mathcal{A}_n$. 由定理 1.7.3, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, 从而 $U \cap G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U \cap G_n) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$. ∎

定理 1.7.6 Baire 空间是第二范畴的.

证明 设 X 是 Baire 空间. 若 X 不是第二范畴的, 则 X 是第一范畴的, 即 X 是可数个无处稠密子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的并. 由于每一 A_n 是 X 的无处稠密子集, 即$(A_n)^{-\circ} = \varnothing$, 所以 $\overline{X \setminus \overline{A_n}} = X$, 因而 $X \setminus \overline{A_n}$ 是 X 的开的稠密子集, 而 X 是 Baire 空间, 所以$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \overline{A_n}) \neq \varnothing$. 然而, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$, 矛盾. 故 X 是第二范畴的. ∎

然而, 第二范畴空间未必是 Baire 空间. 如记$(0, 1) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, 并且让 $X = \mathbb{Q}_1 \cup (1, 2)$赋予实直线$\mathbb{R}$的子空间拓扑. 那么每一$(\mathbb{Q}_1 \setminus \{r_n\}) \cup (1, 2)$是空间 X 的开的稠密子集, 且$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Q}_1 \setminus \{r_n\}) \cup (1, 2) = (1, 2)$不是 X 的稠密子集, 所以 X 不是 Baire 空间. 又因为 X 的开子空间(1, 2)是第二范畴的, 所以 X 也是第二范畴的. 下面给出一个使得第二范畴空间是 Baire 空间的条件. 空间 X 称为齐性空间(homogeneous space[25]), 若对于任意的 x, $y \in X$, 存在同胚 $h: X \to X$ 使得 $h(x)=y$.

定理 1.7.7 齐性的第二范畴空间是 Baire 空间.

证明 先证明 Banach[26]范畴定理(Banach category theorem, Oxtoby[1980]): 空间 X 中一族第一范畴开集族 $\mathcal{G}$ 的并是第一范畴的. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 的“加细”$\mathcal{G}$ 的极大互不相交非空开集族.

---

[25] 1920 年由波兰数学家 W. Sierpiński(1882-1969)定义, 他是波兰数学学派(华沙学派)的创始人之一. 波兰数学家 S. Mazurkiewicz(1888-1945), K. Kuratowski(1896-1980), S. Marczewski(1907-1976)都是他的学生.

[26] 波兰数学学派(里沃夫学派)的创始人之一 S. Banach(1892-1945), 他是波兰数学家 H. Steinhaus(1887-1972)的学生, 而 Steinhaus 是德国数学家 D. Hilbert(1862-1943)的学生.

记 $\mathscr{F}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 则每一 U_α 是第一范畴的，存在 X 的无处稠密集列$\{V_{\alpha n}\}$使得 $U_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_{\alpha n}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $V_n=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_{\alpha n}$，则 V_n 是无处稠密的. 事实上，若 X 的开集 U 与 V_n 相交，则 U 与某一 $V_{\alpha n}$ 相交，于是存在 $U\cap U_\alpha$ 的非空开子集 V 使得 $V\cap V_{\alpha n}=\varnothing$，从而 $V\cap V_\alpha=\varnothing$，因此 V_n 是无处稠密的. 令 $G=\bigcup\mathscr{G}$，由 $\mathscr{F}$ 的极大性，$\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F}$也是 X 的无处稠密集. 从而 $G\subset(\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F})\cup(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha)=(\overline{G}\setminus\bigcup\mathscr{F})\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n)$是第一范畴的. 故 Banach 范畴定理得证.

下面证明定理 1.7.7. 设 Z 是齐性的第二范畴空间. 如果 Z 具有非空的第一范畴开子集，由 Z 的齐性, Z 具有第一范畴的开覆盖，再由 Banach 范畴定理, Z 是第一范畴的，矛盾. 所以 Z 的任何非空开集均是第二范畴的. 设$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是空间 Z 的开的稠密子集列, O 是 Z 的非空开集，则$\{G_n\cap O\}_{n\in\mathbb{N}}$是子空间 O 的开的稠密子集列. 由于 O 是第二范畴的，$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n)\cap O=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(G_n\cap O)\neq\varnothing$，即$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$是 Z 的稠密子集，故 Z 是 Baire 空间. ∎

练习

1.7.1 证明: Čech 完全空间是 k 空间.

1.7.2 证明: Čech 完全性是关于闭子空间和 G_δ 子空间遗传的.

1.7.3 设 A 是空间 X 的第二范畴集. 若 $X\setminus A$ 是 X 的稠密子集，则 A 不是 X 的 F_σ 集.

1.7.4 证明: 空间 X 的子集 A 是 X 的无处稠密集当且仅当对于 X 的每一不空的开集 U, 存在 U 的不空开子集 V 使得 $V\cap A=\varnothing$.

1.7.5 证明: 空间 X 是 Baire 空间当且仅当 X 的每一非空开子空间是第二范畴的.